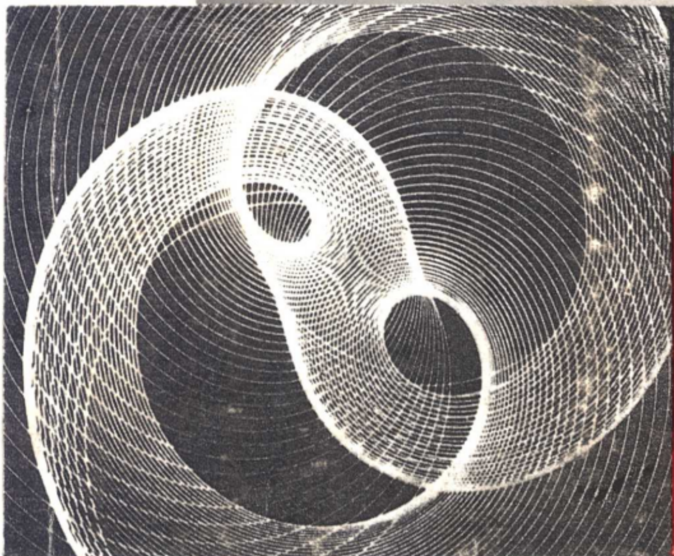
WEI FEN TUO P



微分拓扑

徐森林 著

天津教育出版社

微 分 拓 扑

徐森林

天津教育出版社

微分拓扑

徐森林

*

天津教育出版社出版

（天津市张自忠路 189 号）

邮政编码：300020

新华书店天津发行所发行

天津新华印刷二厂印刷

*

850×1168 毫米　32 开　17 印张　420 千字

1997 年 10 月第 1 版

1997 年 10 月第 1 次印刷

印数 1—500

ISBN 7—5309—2141—x

G·1744　定价：58.00 元

序　　言

微分拓扑学是研究微分流形在微分同胚下保持不变的各种性质的，它的最初思想归于 H. Poincaré，当时他所谓的拓扑学就是现在的微分拓扑学这一分支. 由于 H. Whitney, S. S. Cairns, J. H. C. Whitehead 等人的工作，在三十年代取得了迅速的发展. 接着，在 J. Milnor, R. Thom, S. Smale 和 M. Kervaire 等著名数学家的努力下，又有了新的进展，一方面有新理论的创立，如 Thom 的配边理论(Cobordism Theory)，Milnor 的微观丛理论(Microbundle Theory) 等；另一方面，一些看来高不可攀的著名古典问题得到了解决，例如，球面可以具有许多不同的微分构造，而且在许多场合，我们能够计算它们的种数(Milnor-Smale). Milnor 于 1956 年发表了一篇论文，给出了一个与 7 维标准球面同胚但不微分同胚的微分流形(Milnor 怪球，参阅[Milnor, J. W][3]) 时，引起了人们巨大的惊讶，更进一步，Kervaire 和 Milnor 于 1962 年证明了 S^7 上共有 28 种不微分同胚的微分构造(参阅[Kervaire, M. and Milnor, J. W., Groups of Homotopy Spheres: I, Annals of Math., Vol. 77, No. 3, May, 1963, Printed in Japan.])；此外，还存在这样的拓扑流形，它们根本没有微分构造(M. Kervaire)；Haupt-Vermutung(主要猜测) 已被否定(Mazur-Milnor)；H. Poincaré 猜测除了 3 维和 4 维

外已被(Smale-Stallings)证明等等.

本书第1章是预备知识,介绍了 C^r 微分流形、C^r 映射、C^r 单位分解、Lie 群、向量丛、切向量场、张量场、外微分形式以及 Stokes 定理等概念.

为了刻划映射的逼近,描述映射和研究流形的光滑化,第2章引进了 C^r 强拓扑 $C^r_S(M,N)$ 和 C^r 弱拓扑 $C^r_W(M,N)(r=0,1,\cdots,\infty,\omega)$.这一章的许多定理的结果,若对 C^∞ 流形和 C^∞ 映射成立,那么实际上它在可微性次数稍小时也成立.

在第3章内,证明了著名的 Morse-Sard 定理,并应用 Sard 定理证明了 Whitney 嵌入定理、Thom 横截性定理和 Brouwer 不动点定理等.

第4章证明了管状邻域定理、∂M 的乘积邻域定理(戴领定理)以及带边流形的光滑化定理.

第5章在 C^r 定向(不可定向)流形上引进了 C^r 映射的 Brouwer 度(模2度),并证明了 Brouwer 度(模2度)的同伦不变性,给出了 Brouwer 度(模2度)的许多应用.此外,还证明了 Hopf 分类定理.

第6章证明了 Morse 引理和 Poincaré-Hopf 指数定理,反复使用 Morse 引理,用临界值刻划 $M^a=\{p\in M \mid f(p)\leqslant a\}$ 的同伦型,从而论证了 C^∞ 流形具有 CW 复形的同伦型,最后还讨论了 Morse 不等式.

第7章介绍了微分拓扑中最优美的理论之一:R.Thom 的下配边(Bordism)理论和配边(Cobordism)理论.

第8章引进了 de Rham 上同调群,给出了大量 C^∞ 流形的 de Rham 上同调群的具体例子,论述了 de Rham 上同调群的 Mayer-Vietoris 序列,并应用它计算了 S^m 的 de Rham 上同调群.

此外,建立了著名的 de Rham 定理,并藉助系数在予层中的上同调群证明了 de Rham 定理.

以上诸定理在微分拓扑、微分几何、微分方程和其他许多数学分支以及理论物理中都有广泛的应用.同时,这些定理及其证明方法有很重要的理论价值,到目前为止,我国还没有这方面的详细论著,本书就是为满足国内读者的需求而撰写的.它的编写参照了许多名著,主要有[Milnor, J.W., Morse Theory], [Munkres, J. R., Elementry Differential Topology], [Hirsch, M. W., Differential Topology], [Hu, S. T., Differentiable Manifolds], [数学百科全书(Encylopaedia Mathematics), 科学出版社, 1994] 等,在此,向有关的著名数学家表示衷心的感谢.

此书能顺利完成,完全应该归功于六十年代教导我们的老师吴文俊教授和李培信教授,没有他们的精心培育就没有今天这本《微分拓扑》书的出版.

全书内容在中国科学技术大学数学系研究生和 89 级部分大学生中讲授过,经过两学期的训练,学生的数学修养和研究能力都有很大提高.

科大老师薛春华、陈广华、研究生张华明、陈春生、优秀大学生曾小兰为本书的编著作了很多工作,提出许多宝贵的意见,在此我也向他们表示衷心的谢意.

作者　徐森林

1994 年 1 月于中国科学技术大学

内容提要

本书主要介绍和证明微分拓扑中的一些重要定理:映射的逼近定理、映射和流形的光滑化定理;Morse-Sard 定理、Whitney 嵌入定理、Thom 横截性定理;管状邻域定理、戴领定理;Brouwer 度的同伦不变性定理、Hopf 分类定理;Morse 理论:Morse 引理、Poincaré-Hopf 指数定理,用临界值刻划流形的同伦型和 Morse 不等式;de Rham 定理;还有 Thom 的下配边和配边理论.这些定理及其方法在微分拓扑、微分几何、微分方程和理论物理等学科中都有广泛的应用.无疑,阅读本书可使读者具有良好的近代数学修养并能增加研究的能力.

本书可作为理科大学数学系和物理系高年级研究生和大学几何、拓扑专门化学生的教科书、选修课和自学参考书.

目　　录

第 1 章　微分流形

在研究 Euclid 空间中大量的曲线、曲面的基础上，§ 1 引进局部坐标和微分流形，并介绍了微分流形之间的映射的可微性和浸入、浸没、微分同胚等重要概念. § 2 证明了微分流形上单位分解的存在性定理. § 3 研究了 Lie 群，它具有相容的微分流形和群的两种构造. 此外，还分析了一些典型群的例子，具体给出了它们的 Lie 代数，维数，紧致性和道路连通分支的个数. § 4 定义的纤维丛和向量丛是用 Lie 群将若干平凡的积空间 $\{U_\alpha \times F \mid \alpha \in \Gamma\}$ 光滑粘贴而成的. 其特殊的向量丛是 § 5 和 § 6 中的切丛、张量丛和外形式丛. C^∞ 张量场有两个重要的例子：一个是 $(0,2)$ 型对称正定 C^∞ 协变张量场，即 C^∞ 向量丛上的 Riemann 度量，不难证明，C^∞ 向量丛上存在 C^∞ Riemann 度量；另一个是 C^∞ 反称协变张量场，即 C^∞ 外微分形式. 最后，还证明了著名的 Stokes 定理. 这些重要的内容作为全书的预备知识，目的是为了让读者不必查阅大量参考资料而能顺利和熟练地掌握微分拓扑的基本方法.

§1　微分流形$(M,\mathscr{D})$

设 $\boldsymbol{R}$ 为实数域, $\boldsymbol{N}$ 为自然数集, $m\in\boldsymbol{N}$, m 维 Euclid 空间

$$\boldsymbol{R}^m=\{x=(x^1,\cdots,x^m)\mid x^i\in\boldsymbol{R},1\leqslant i\leqslant m\},$$

其中 x^i 为点 x 的第 i 个坐标. 如果 $x,y\in\boldsymbol{R}^m$, 我们用 $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{m}x^iy^i$ 和 $\rho(x,y)=[\sum_{i=1}^{n}(x^i-y^i)^2]^{1/2}$ 分别表示 x,y 的内积和距离, 而 $\|x\|=[\langle x,x\rangle]^{1/2}=[\sum_{i=1}^{m}(x^i)^2]^{1/2}$ 表示 x 的模.

设 $U\subset\boldsymbol{R}^m$ 为开集, 如果函数 $f:U\to\boldsymbol{R}$ 连续, 则称 f 是 C^0 类的; 如果 f 有 r 阶连续偏导数, 则称 f 是 C^r 类的 $(r\in\boldsymbol{N})$; 如果 f 有任意阶连续偏导数, 则称 f 是 C^∞ 类的; 如果 f 是实解析函数 (f 在 U 的每一点的某个开邻域里可展开成 m 元收敛的幂级数), 则称 f 是 C^ω 类的.

设 $f=(f_1,\cdots,f_n):U\to\boldsymbol{R}^n$ 为映射, 如果 $f_1,\cdots,f_n$ 都是 C^r 类的, 则称映射 f 是 C^r 类的, 其中 $r\in\{0,1,\cdots,\infty,\omega\}$. 记 $C^r(U,\boldsymbol{R}^n)=\{\mathrm{f}\mid \mathrm{f}:\mathrm{U}\to\boldsymbol{R}^n$ 是 C^r 的$\}$, 并规定 $0<1<2<3<\cdots<\infty<\omega$.

在研究 Euclid 空间中大量的光滑曲线、曲面的基础上, 引进了局部坐标, 就产生了流形这个近代数学中极其重要和基本的概念.

定义 1　设 M 为 T_2(Hausdorff)、A_2(具有可数拓扑基) 空间, 如果对任何 $p\in M$, 都存在 p 在 M 中的开邻域 U 和同胚 φ: $U\to\varphi(U)$, 其中 $\varphi(U)\subset\boldsymbol{R}^m$ 为开集(局部欧), 则称 M 为 $\boldsymbol{m}$

维拓扑流形或 **C^0 流形**.

(U,φ) 称为**局部坐标系**(坐标卡、图片), U 称为**局部坐标邻域**, φ 称为**局部坐标映射**. $x^i(p)=(\varphi(p))^i$, $1\leqslant i\leqslant m$ 为 $p\in U$ 的**局部坐标**,简记为 $\{x^i\}$,有时也称它为局部坐标系.如果记 $\mathscr{D}^0$ 为局部坐标系的全体,那末,拓扑流形就是由 $\mathscr{D}^0$ 中的图片粘成的图册,如果 $p\in U$,则称 (U,φ) 为 **p 的局部坐标系**.

设 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$, $(U_\beta,\varphi_\beta)\in\mathscr{D}^0$, $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$,称 $\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}$ 和 $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$ 为坐标变换,对实函数 $f:M\to\boldsymbol{R}$,如果 $f\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha)\to\boldsymbol{R}$ 是 C^r 类的 $(r\geqslant 1)$, $f\circ\varphi_\beta^{-1}:\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\to\boldsymbol{R}$ 不一定是 C^r 类的.但是,当 $\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}$ 是 C^r 类时, $f\circ\varphi_\beta^{-1}=(f\circ\varphi_\alpha^{-1})\circ(\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1})$ 也是 C^r 类的.由此引导我们定义下面 C^r 微分流形的概念.

定义 2 设 $(M,\mathscr{D}^0)$ 为 m 维拓扑流形, Γ 是指标集,如果 $\mathscr{D}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\mid\alpha\in\Gamma\}\subset\mathscr{D}^0$ 满足:

(1) $\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}U_\alpha=M$;

(2) 相容性:如果 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$, $(U_\beta,\varphi_\beta)\in\mathscr{D}$, $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$,则 $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$ 是 C^r 类的, $r\in\{1,2,\cdots,\infty,\omega\}$(由对称性,当然 $\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}$ 也是 C^r 类的).即

$$\begin{cases}y^1=(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})_1(x^1,\cdots,x^m)\\ \cdots\\ y^m=(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})_m(x^1,\cdots,x^m)\end{cases}$$

是 C^r 类的;

(3) 最大性: $\mathscr{D}$ 关于(2)是最大的,也就是说,如果 $(U,\varphi)\in\mathscr{D}^0$,且它和任何 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathscr{D}$ 是 C^r 相容的,则 $(U,\varphi)\in\mathscr{D}$,它等价于,如果 $(U,\varphi)\,\overline{\in}\,\mathscr{D}$,则 (U,φ) 必与某个 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathscr{D}$ 不

是 C^r 相容的.

我们称 $\mathscr{D}$ 为 M 上的**C^r 微分构造**或**C^r 构造**, $(M,\mathscr{D})$ 为 M 上的 **C^r 微分流形**或**C^r 流形**. 当 $r=\omega$ 时, 称$(M,\mathscr{D})$ 为**实解析流形**(图 1).

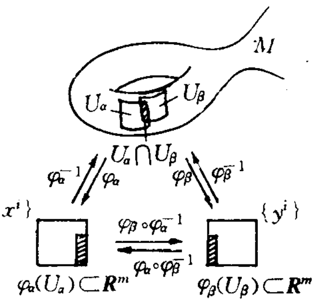


图 1

类似于拓扑流形, C^r 微分流形就是由 $\mathscr{D}$ 中图片光滑(C^r, $r \geqslant 1$) 粘成的图册.

如果$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$, $\{x^i\} \in \mathscr{D}$ 和(U_β,φ_β), $\{y^i\} \in \mathscr{D}$为 p 的两个局部坐标系, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, 则由 Jacobi 行列式的等式

$$1=\frac{\partial(y^1,\cdots,y^m)}{\partial(y^1,\cdots,y^m)}=\frac{\partial(y^1,\cdots,y^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}\cdot\frac{\partial(x^1,\cdots,x^m)}{\partial(y^1,\cdots,y^m)}$$

可知, 在 $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ 中,

$$\frac{\partial(y^1,\cdots,y^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)} \neq 0.$$

一般说来, 要得到 $\mathscr{D}$ 中所有的图片是困难的, 下面定理指出, 只要得到满足定义 2 中(1) 和(2) 的 $\mathscr{D}'$ 就可唯一确定 $\mathscr{D}$ 了. 我们称 $\mathscr{D}'$ 为微分构造 $\mathscr{D}$ 的一个**基**, 这就给出了具体构造微分流形的方法, 它与线性代数中由基生成向量空间以及点集拓扑中由拓扑基生成拓扑的想法是完全类似的.

设$(U,\varphi) \in \mathscr{D}^0$, 如果对任何$(V,\psi) \in \mathscr{D}' \subset \mathscr{D}^0$, $\psi \circ \varphi^{-1}$ 和 $\varphi \circ \psi^{-1}$ 是 C^r 类的, 则称(U,φ) 与 $\mathscr{D}'$ 是 C^r 相容的.

定理1　1° 设 $\mathscr{D}' \subset \mathscr{D}^0$ 满足定义 2 中条件(1) 和(2), 则它唯一确定了一个 C^r 微分构造($r \geqslant 1$)$\mathscr{D}=\{(U,\varphi) \in \mathscr{D}^0 \mid (U,\varphi)$

与 $\mathscr{D}'C^r$ 相容};

2° 设 $\mathscr{D}'_1,\mathscr{D}'_2\subset\mathscr{D}^0$ 满足定义 2 中条件(1)和(2)且彼此的元素 C^r 相容,则它们所确定的 C^r 微分构造是相同的,即 $\mathscr{D}_1=\mathscr{D}_2$.

证明 1° 由条件(2)和 $\mathscr{D}$ 的定义,$\mathscr{D}'\subset\mathscr{D}$,故 $\mathscr{D}$ 满足条件(1).设 $(U,\varphi),(V,\psi)\in\mathscr{D}$,若 $p\in U\cap V$,则存在 p 的局部坐标系 $(W,\theta)\in\mathscr{D}'$ 使在 $U\cap V\cap W$ 中,$\psi\circ\varphi^{-1}=(\psi\circ\theta^{-1})\circ(\theta\circ\varphi^{-1})$ 是 C^r 类的,因此,$\mathscr{D}$ 满足条件(2).设 (U,φ) 与 $\mathscr{D}C^r$ 相容,由 $\mathscr{D}'\subset\mathscr{D}$ 可知 (U,φ) 与 $\mathscr{D}'C^r$ 相容,即 $(U,\varphi)\in\mathscr{D}$.因此,$\mathscr{D}$ 满足条件(3),这就证明了 $\mathscr{D}$ 为 C^r 微分构造.

2° 设 $(U,\varphi)\in\mathscr{D}_1$,对任何 $(V,\varphi)\in\mathscr{D}'_2$,若 $p\in U\cap V$,则存在 p 的局部坐标系 $(W,\theta)\in\mathscr{D}'_1$,使在 $U\cap V\cap W$ 中,$\psi\circ\varphi^{-1}=(\psi\circ\theta^{-1})\circ(\theta\circ\varphi^{-1})$ 和 $\varphi\circ\psi^{-1}=(\varphi\circ\theta^{-1})\circ(\theta\circ\psi^{-1})$ 是 C^r 类的,所以 $(U,\varphi)\in\mathscr{D}_2$,$\mathscr{D}_1\subset\mathscr{D}_2$.同理,$\mathscr{D}_2\subset\mathscr{D}_1$,这就证明了 $\mathscr{D}_1=\mathscr{D}_2$.

#

引理1 设 $k,r\in\{0,1,2,\cdots,\infty,\omega\}$,$k<r$,则存在 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$,使 f 是 C^k 类但不是 C^r 类的.

证明 如果 $0\leqslant k<\infty$,则

$$f(x)=\begin{cases}x^{2k+1}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

为所求函数.如果 $k=\infty$,$r=\omega$,则

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

为所求函数,事实上,由归纳法和 L'Hospital 法则可知

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}p_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

其中 $p_n(u)$ 为 u 的多项式,这就证明了 f 是 C^∞ 类的,但它不是 C^ω 类的,因为若 f 是 C^ω 类的,则 $\exists\,\delta>0$,使 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=0, x\in(-\delta,\delta)$,这与 $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}>0, x\in(0,\delta)$ 相矛盾.

#

定理 2 设 $k,r\in\{0,1,2,\cdots,\infty,\omega\}$, $k<r$, $\mathscr{D}'\subset\mathscr{D}^0$ 满足定义 2 中的条件(1) 和(2). 由 $\mathscr{D}'$ 唯一确定的 C^r 微分构造 $\mathscr{D}^r=\{(U,\varphi)\in\mathscr{D}^0\mid(U,\varphi)$ 与 $\mathscr{D}'C^r$ 相容$\}$. 如果将 $\mathscr{D}'$ 的 C^r 相容自然视作 C^k 相容,而由 $\mathscr{D}'$ 唯一确定的 C^k 构造 $\mathscr{D}^k=\{(U,\varphi)\in\mathscr{D}^0\mid(U,\varphi)$ 与 $\mathscr{D}'C^k$ 相容$\}$,则 $\mathscr{D}^r\subsetneqq\mathscr{D}^k$.

证明 因 $k<r$,故 (U,φ) 与 $\mathscr{D}'C^r$ 相容也是 C^k 相容,这就推出了 $\mathscr{D}^r\subset\mathscr{D}^k$.

再证 $\mathscr{D}^r\neq\mathscr{D}^k$. 设 f 为引理 1 中的 f,如果 $k>0$,令 $g(x)=x+f(x)$,则 $g'(0)=1+f'(0)=1$;如果 $k=0$,令 $g(x)=x^{1/3}$. 于是 $\exists\,\delta>0$,使 g 在 $(-\delta,\delta)$ 内严格递增,设 $(U,\varphi)\in\mathscr{D}^r$, $p\in U$,令 $\theta(x)=x-\varphi(p)$ 为平移; $(-\delta,\delta)^m=\{x=(x^1,\cdots,x^m)\in\boldsymbol{R}^m\mid|x^i|<\delta\}$, $\eta:(-\delta,\delta)^m\to\boldsymbol{R}^m$, $\eta(x)=(g(x^1),x^2,\cdots,x^m)$. 则 $\exists\,p$ 的开邻域 $V\subset U$,且 $0\in\theta\circ\varphi(V)\subset(-\delta,\delta)^m$,于是,

$$(\eta\circ\theta\circ\varphi)\circ\varphi^{-1}=\eta\circ\theta$$

是 C^k 类的但不是 C^r 类的,这就证明了 $(V,\eta\circ\theta\circ\varphi)$ 和 (U,φ) 是 C^k 相容但不是 C^r 相容的,即 $(V,\eta\circ\theta\circ\varphi)\in\mathscr{D}^k$ 但 $(V,\eta\circ$

$\theta \circ \varphi) \overline{\in} \mathscr{D}^r$.

#

从这个定理可知，当 $k < r$ 时，如果加进与 C^r 流形 $(M, \mathscr{D}^r)$ C^k 相容的所有图片，它就可成为一个 C^k 流形 $(M, \mathscr{D}^k)$，此时，$\mathscr{D}^k$ 的图片确实比 $\mathscr{D}^r$ 的图片严格增多了. 以后，当 $k < r$ 时，凡是 C^r 流形，总是按上述理解，它也是一个 C^k 流形.

有了上述定理，我们就可以构造各种各样的流形了.

例 1 设 M 为 $\boldsymbol{R}^m$ 的开集，$\mathscr{D}' = \{(M, Id_M) \mid Id_M : M \to M, Id_M(p) = p, p \in M\}$，则由 $\mathscr{D}'$ 唯一确定了一个 C^ω 流形(由定理2，它也唯一确定了一个 C^r 流形，$r \in \{0, 1, 2, \cdots, \infty\}$，但当 r 增大时，图片严格减少). 它就是通常所指的流形，称 Id_M 为 M 上的恒等映射.

例 2 设 $(M, \mathscr{D}_M)$ 为 m 维 C^r 流形，$U \subset M$ 为开集，$\mathscr{D}_M = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in \Gamma\}$，令

$\mathscr{D}_U = \{(U \cap U_\alpha, \varphi_\alpha \mid U \cap U_\alpha) \mid U \cap U_\alpha \neq \varnothing, \alpha \in \Gamma\}$，易证 $(U, \mathscr{D}_U)$ 也是一个 m 维 C^r 流形，称为 $(M, \mathscr{D}_M)$ 的 **C^r 开子流形**.

例 3 S^m 为 m 维 C^ω 流形.

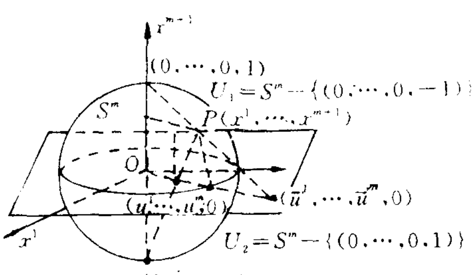


图 2

设 $p \in S^m \subset \boldsymbol{R}^{m+1}$,它的直角坐标为$(x^1, \cdots, x^{m+1})$.如果将 $\boldsymbol{R}^m = \{(x^1, \cdots, x^m, 0) \mid x^i \in \boldsymbol{R}, 1 \leqslant i \leqslant m\} \subset \boldsymbol{R}^{m+1}$ 与 $\{(x^1, \cdots, x^m) \mid x^i \in \boldsymbol{R}, 1 \leqslant i \leqslant m\}$ 视作相同,则从图 2 容易算出

$$\varphi_1 : U_1 \to \boldsymbol{R}^m,$$

$$\begin{aligned}(u^1, \cdots, u^m) &= \varphi_1(x^1, \cdots, x^{m+1}) \\ &= \left(\frac{x^1}{1+x^{m+1}}, \cdots, \frac{x^m}{1+x^{m+1}}\right),\end{aligned}$$

$$(x^1, \cdots, x^{m+1}) = \varphi_1^{-1}(u^1, \cdots, u^m)$$

$$= \left(\frac{2u^1}{1+\sum\limits_{i=1}^{m}(u^i)^2}, \cdots, \frac{2u^m}{1+\sum\limits_{i=1}^{m}(u^i)^2}, \frac{1-\sum\limits_{i=1}^{m}(u^i)^2}{1+\sum\limits_{i=1}^{m}(u^i)^2}\right)$$

$$\varphi_2 : U_2 \to \boldsymbol{R}^m.$$

$$\begin{aligned}(\bar{u}^1, \cdots, \bar{u}^m) &= \varphi_2(x^1, \cdots, x^{m+1}) \\ &= \left(\frac{x^1}{1-x^{m+1}}, \cdots, \frac{x^m}{1-x^{m+1}}\right)\end{aligned}$$

$$(x^1, \cdots, x^{m+1}) = \varphi_2^{-1}(\bar{u}^1, \cdots, \bar{u}^m)$$

$$= \left(\frac{2\bar{u}^1}{1+\sum\limits_{i=1}^{m}(\bar{u}^i)^2}, \cdots, \frac{2\bar{u}^m}{1+\sum\limits_{i=1}^{m}(\bar{u}^i)^2}, \frac{\sum\limits_{i=1}^{m}(\bar{u}^i)^2-1}{1+\sum\limits_{i=1}^{m}(\bar{u}^i)^2}\right),$$

且

$$(\bar{u}^1, \cdots, \bar{u}^m) = \left(\frac{u^1}{\sum\limits_{i=1}^{m}(u^i)^2}, \cdots, \frac{u^m}{\sum\limits_{i=1}^{m}(u^i)^2}\right),$$