掌握一个解题方法　比做一百道题更重要

OLYMPIC

点击金牌

初中数学奥林匹克竞赛解题方法大全

周春荔
王中峰　主编

OLYMPIC

山西教育出版社

序 言

走进数学奥林匹克　学点奥林匹克数学

人们常说：数学是思维的体操．数学是打开科学大门的钥匙．前者说的是数学的教育功能，是对主体自身能力的发展，后者则说的是数学被主体掌握以后的社会功用．前者是基础、后者是目的．体校对体操运动员的训练，可以全面提高运动员的素质，使运动员具备夺取金牌的条件．学校的数学教育有如体校对体操运动员的训练，可以全面地进行思维训练，使学生具备良好的科学思维的素养．数学是科学的语言，数学是现实世界的空间形式和数量关系的模型、结构或模式，抽象思维是数学的威力．谁能基本掌握抽象思维的数学工具，谁就获取了未来进入现代科学殿堂的通行证．大家知道，体育课对每个学生是必修课，虽然体育课也学体操动作，但它不要求每个学生都达到体操运动员的水平．对体操感兴趣的学生他就会到体操馆专门培训，以期发展他的特长．学校的数学教育也是这样，义务教育数学教学大纲是对公民数学知识能力的基本要求，具有普适性，而对数学有兴趣的学生，则需要发展提高，达到更高的要求．这些为了数学爱好者在原来基础上提高发展的数学，就是所谓的奥林匹克数学．奥林匹克数学首先是数学，她是训练发展数学智能、展现人的数学才华的数学．他是发展青少年的数学思维、培养钻研精神的数学．事实证明，奥林匹克数学使你越学越聪明，学与不学大不一样．是数学爱好者走向成功的桥梁．

像体操训练一样，必须刻苦，必须能吃苦．学数学也必须刻苦．只有刻苦努力、勇于在崎岖小路上攀登、不畏艰险的人才可能达到光辉的顶点．

数学竞赛也叫做数学奥林匹克，她是数学爱好者的节日．正像蒙族盛大的节日要进行摔跤、叼羊的较量一样，数学爱好者的节日是通过解题进行智力的较量．

国际奥林匹克的权威人士认为，以激发数学才能和引起数学兴趣为目的、中学生自愿参加的数学竞赛是从 1894 年的匈牙利开始的．将中学生的数学竞赛与体育竞赛相提并论，把这种竞赛活动命名为“数学奥林匹克”的是前苏联．在 1934 年和 1935 年，彼得格勒与莫斯科国立大学分别组织了地区性的中学数学奥林匹克，并将成绩优秀者推荐到大学．1956 年由罗马尼亚的罗曼教授发起第一次国际数学奥林匹克，并于 1959 年 7 月在罗马尼亚的布拉索夫得以正式举行．此后除 1980 年间断外，一直延续至今．

我国的中学生数学竞赛始于 1956 年，是由华罗庚、苏步青等前辈数学家倡导举办的. 以后时断时续，在十年动乱期间被迫中断. 1978 年，经国务院批准，教育部和中国科协决定举办部分省市的中学数学竞赛，1979 年举办了全国中学生数学竞赛，1980 年全国中学生数学竞赛暂停一年，自 1981 年开始举办全国高中联合数学竞赛，1985 年开始举办全国初中联合数学竞赛. 1985 年我国派观察员带两名学生参加了第 26 届国际数学奥林匹克，此后，每年都派 6 名选手参加国际数学奥林匹克，并取得好的成绩. 1990 年第 31 届国际数学奥林匹克由我国承办，在北京举行，我国选手全部获得金牌并取得团体总分第一名.

目前，初中学生除了参加本省(市)、地区的数学竞赛外，全国性的竞赛主要有：每两年一次的"华罗庚金杯少年数学邀请赛"(小学高年级和初中一年级)，每年一次的"希望杯全国数学邀请赛"(初一年级和初二年级)，每年一次的"全国初中联合数学竞赛"(初三年级为主)等，适合条件的数学爱好者可以自愿选择参加.

数学竞赛试题既要贴近教材，又要有趣味性，还要能发挥学生的创造性. 通过竞赛达到普及数学知识，促进数学教学，激发学生的进取探索精神，培养学生的创新意识和用数学的意识. 有益于学生素养的全面提高 . 因此，数学竞赛是对青少年全面素质教育的一种有益的途径和形式. 竞赛数学，也就是通常所说的"奥林匹克数学"，正是由于数学竞赛的发展与普及，逐渐形成的一门有益于开发学生智力、提高学生数学素养的新兴的数学学科.

竞赛数学的问题既注重基础，又比较灵活. 解法往往直观、巧妙. 有些问题还有着较为深刻的高等数学的背景，有些问题富有一定的挑战性，能使你受到数学美的感染.

为了使初中学生学好奥林匹克数学，我们先从小学数学竞赛的几类问题讲起，边复习，边提高，使你产生兴趣，引导你逐步进入状态，为大家进一步学习准备条件.

一、巧算与估算

对整数、分数的运算，直观估计是很重要的. 小学和初一数学的特点是以算为主. 推理为辅. 因此计算能力的培养是十分重要的. 要求会利用算律、会拆、分，会结合简单推理估算、巧算. 要求算得准、算得快、算得巧. 使计算题的演算赋予开发智力的作用.

例1 计算 12345678910111213 ÷ 31211101987654321. 它的小数点后前三位数字是______.

【解析】直接作除法,运算很繁.由于只要求小数点后的前三位数字,不妨可以估值.根据是:一个分数,当分子不变而分母增大时,分数值变小;如果分子不变而分母减小时,分数值变大.

$$\frac{12345678910111213}{31220000000000000}<\frac{12345678910111213}{31211101987654321}<\frac{12345678910111213}{31210000000000000}$$

要求商的小数点后前三位数字,只要求出商的小数点后前四位数字就可以了.

$$0.39544\approx\frac{1234.5679}{3122}<\frac{12345678910111213}{31211101987654321}<\frac{1234.5679}{3121}\approx 0.39556$$

可见,商的小数点后前三位数字是 395.

例2 有一个算式,左边的圆括号里都是整数.右边答案只写出了四舍五入的近似值.

$$\frac{(\quad)}{3}+\frac{(\quad)}{5}+\frac{(\quad)}{7}\approx 1.16$$

那么算式左边的三个圆括号中的数从左到右依次是多少?

【解析】 借助数轴直观地看,精确计算是用一个点来对应一个数.近似计算则是用一个线段来盖一个数.当然来盖一个数的线段越短,近似效果越好.由于 1.16 是四舍五入的结果,因此,它代表的是“一片数”.即从 1.155 到 1.164 之间的所有数的四舍五入近似值都是 1.116.所以

$$1.155\leqslant\frac{(\quad)}{3}+\frac{(\quad)}{5}+\frac{(\quad)}{7}\leqslant 1.164$$

整理得 $121.275\leqslant 35\times(\quad)+21\times(\quad)+15\times(\quad)\leqslant 122.22$

由于(　　)中填的都是正整数,因此 $35\times(\quad)+21\times(\quad)+15\times(\quad)$ 必为整数,而且只能是 122.即 $35\times(\quad)+21\times(\quad)+15\times(\quad)=122$.由于 122 被 3 除余 2,知第一个(　　)内的数是 1;由于 122 被 5 除余 2,第二个(　　)内的数被 5 除余 2,只能是 2;易知第三个(　　)内的数是 3.

【答案】 算式左边的三个圆括号中的数从左到右依次是 1,2,3.

例3 已知 $S=\dfrac{1}{\dfrac{1}{1980}+\dfrac{1}{1981}+\dfrac{1}{1982}+\cdots+\dfrac{1}{1990}+\dfrac{1}{1991}}$

求 S 的整数部分.

【解析】 根据“一个分数,当分子不变而分母增大时,分数值变小;如果分子不变而分母减小时,分数值变大”这个原理,可以知道

$$\frac{1}{1980}+\frac{1}{1981}+\frac{1}{1982}+\cdots+\frac{1}{1990}+\frac{1}{1991}<12\times\frac{1}{1980}=\frac{1}{165}$$

$$\frac{1}{1980}+\frac{1}{1981}+\frac{1}{1982}+\cdots+\frac{1}{1990}+\frac{1}{1991}>12\times\frac{1}{1991}=\frac{12}{1991}$$

所以 $S>\dfrac{1}{\dfrac{1}{165}}=165$. 并且 $S<\dfrac{1}{\dfrac{12}{1991}}=\dfrac{1991}{12}=165\dfrac{11}{12}$.

即 $165<S<165\dfrac{11}{12}$. 因此 S 的整数部分是 165.

例4 计算：$19961997\times19971996-19961996\times19971997=$______.

【解析】 原式 $=(19961996+1)\times19971996-19961996\times(19971996+1)$

$=19961996\times19971996+19971996-19961996\times19971996-19961996$

$=19971996-19961996=10000$.

一般地：$a(b+1)-b(a+1)=ab+a-ba-b=a-b$.

当 $a=19971996$, $b=19961996$ 时，就是例 4.

例5 将五个分数：$\frac{2}{3}$，$\frac{5}{8}$，$\frac{15}{23}$，$\frac{10}{17}$，$\frac{12}{19}$由小到大地或由大到小地排列，问排在中间位置的数是其中的哪个数？

【解析】 这是比较分数大小的问题，通常的做法是：

当分母相同时，只须比较分子的大小；

当分母不同时，就先通分化成同分母的分数，再去比较相应的分子的大小. 对于本题：公分母是 $3\times8\times23\times17\times19$.

这是一个很大的数，显然计算量很大，不好！仔细观察，分子的最小公倍数好求，我们转而考虑：把分子化为相同的.

因为 2,5,15,10,12 的最小公倍数是 60，所以

$$\frac{2}{3}=\frac{60}{90},\frac{5}{8}=\frac{60}{96},\frac{15}{23}=\frac{60}{92},\frac{10}{17}=\frac{60}{102},\frac{12}{19}=\frac{60}{95}.$$

显然 $\dfrac{60}{102}<\dfrac{60}{96}<\dfrac{60}{95}<\dfrac{60}{92}<\dfrac{60}{90}$

所以 中间位置的数是$\frac{12}{19}$.

二、整数与整除

整数与整除中有许多重要的基本概念. 如质数与合数，最大公约数，最小公倍数等.

这些知识始终是小学初一年级竞赛的重要内容.但题目类型大多是把关系隐藏起来,让学生去发现,灵活应用整数与整除的概念与知识.

例6 算式

$$\frac{8}{\text{华杯赛}}=\frac{1}{\text{新世纪}}$$

寓意第8届华杯赛于新世纪的第1年举办.新、世、纪、华、杯、赛代表1,2,3,4,5,6,7,8,9中的六个数字(不同的文字代表不同的数字).请把这个算式恢复出来.

【解析】 原式变形为$\frac{\text{华杯赛}}{\text{新世纪}}=8$.由于华杯赛最大可能是987.易知 新=1.

由 $12\times8=96$,$13\times8=104$,可知 世=2.

若 纪$\geqslant5$,新世纪$\times8\geqslant1000>987$,所以纪等于4或3.

若 纪=4,$124\times8=992$,出现华=杯=9,世=赛=2,与题设条件不符.

若 纪=3,$123\times8=984$,合乎题意.

所以,题设等式恢复出来是:$\frac{8}{984}=\frac{1}{123}$.

例7 在算式$\square+91=\bigcirc$中,已知$\square$盖住的是一个能被9整除的两位数,$\bigcirc$盖住的是7的倍数.

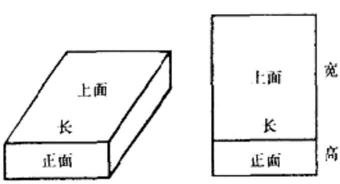
请你回答:$\bigcirc$盖住的数是多少?

【解析】 $\bigcirc$盖住的数是7的倍数,91也是7的倍数,则$\square$盖住的数必是7的倍数.但$\square$盖住的数又是9的倍数,因为7与9互质,所以$\square$盖住的数是63的倍数.又$\square$盖住的数是两位数,只能是63.因此,$\bigcirc$盖住的数是

$$63+91=154.$$

例8 面前有一个长方体,它的正面和上面的面积之和是209,如果它的长、宽、高都是质数,求这个长方体的体积.

【解析】 如图,长方体的正面与上面的面积之和恰等于209.



$$\underset{\text{质数}}{\text{长}}\times(\underset{\text{质数}}{\text{宽}}+\underset{\text{质数}}{\text{高}})=209=\underset{\text{质数}}{11}\times\underset{\text{质数}}{19}$$

有两种可能:

(1)长=11,宽+高=19;

(2)长=19,宽+高=11.

由宽+高=奇数,易知宽、高必一奇一偶,由于只有2是偶质数,19=17+2合乎要

求,而 $11=9+2$ 不合要求(9 不是质数),所以长 $=11$.

长方体的体积为 $11\times17\times2=374$.

例9 请在算式 $1\square\times1\square=1\square\times1\square$ 中的四个方框内填入四个互不相同的数码,使等号成立.

问:所填的四个数码之和是多少?

【解析】 当等号成立时,左、右两边乘积的质因数分解式完全相同.因此,等号左右两边应该含有相同的质因数.

这个算式是由四个首位为 1 的两位数组成,它们只能是 10,11,12,13,14,15,16,17,18,19 这十个自然数中的四个.质数 11,13,17,19 在它们中均只出现一次,因此,这些质因数中的 11,13,17,19 及合数 14 不可以在算式中出现.于是还有五个数 10,12,15,16,18 可供选择.

由于 $16=2\times2\times2\times2$,而 10,12,15,18 中只有 3 个质因数 2,因此 16 不能出现在算式之中.所以所求算式只能由 10,12,15,18 填在等号两边组成.显然,其中最大的 18 与最小的 10 应放在等号的一边,12 与 15 放在等号的另一边,这样才有可能相等.即 $18\times10=12\times15$,经检验等式确实成立.

所以,四个方框内填入的四个数码是 8,0,2,5,它们的和为 $8+0+2+5=15$.

例10 将 1,2,3,4,5,6,7,8,9 九个数排成一行,使得第二个数整除第一个数,第三个数整除前两个数的和,第四个数整除前三个数的和…第九个数整除前八个数的和.如果第一个数是 6,第四个数是 2,第五个数是 1.问排在最后的数是几?

【解析】 设第九个数是 p,即

$\boxed{6}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{2}$ $\boxed{1}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{p}$

依题意,前八个数之和被第九个数 p 整除,因此,前九个数之和也被第九个数 p 整除.即 $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ 被 p 整除.由于 p 是 1~9 的整数,所以 p 只能取 1,3,5,9 这四个值.

由于第五个数是 1,所以 $p\neq1$.

由第一个数是 6,第五个数是 1,所以第二个数只能是 2 或 3,又第四个数已知是 2,所以第二个数只能取 3. $p\neq3$.

这样,前两个数之和为 $6+3=9$,第三个数是 9 的约数只取 1,3,9,但第二个数是 3,第五个数是 1,所以第三个数取 9,因此 $p\neq9$.所以只能有 $p=5$.

事实上,6,3,9,2,1,7,4,8,5 就是满足题设要求的九个数.

三、余数应用初步

整除问题已经谈过，然而，两个自然数相除，"不整除"更是普遍的．这就产生了一个"碍手碍脚"的余数．其实，余数并不可怕：其一，可以设法把有余数问题划归为熟知的整除问题，其二，可利用余数研究某些有趣的问题．

将余数问题划归为整除问题，根据如下两个法则：

法则 1：如果 $a=bq+r$，则 $a-r=bq$，即 $b\mid(a-r)$．

换句话说，若　被除数 = 除数 × 商 + 余数，那么被除数与余数之差为除数所整除．

法则 2：如果 $a=bq_1+r$，$c=bq_2+r$，则 $a-c=b(q_1-q_2)$，即 $b\mid(a-c)$．

换句话说，若两个整数被第三个整数去除所得的余数相同，则这两个整数之差被第三个整数整除．

例 11　5397 除以一个质数，所得的余数是 15，问这个质数是多少？

【解析】　设所求的质数为 p，即 5397 除以 p 余数是 15．根据法则 1，应有 $p\mid(5397-15)$，即 $p\mid 5382$．

可见，p 应是 5382 的一个质因数，为此，将 5382 分解质因数，得

$5382=2\times3^2\times13\times23$．

因为除数 p 要大于余数 15，p 又为质数，所以只能 $p=23$．

例 12　381，286，210 被某数去除的余数恰为同一个非零的自然数，问某数是多少？

【解析】　设所求的某数为 b，因为 b 去除 381 与 286 的余数相同，依法则 2 可知，$b\mid(381-286)$．

同理，b 去除 381 与 210 的余数相同，$b\mid(381-210)$．b 去除 286 与 210 的余数相同，$b\mid(286-210)$．

因此，$b\mid95$，$b\mid171$，$b\mid76$，所以 b 应是 95，171，76 的公约数．

而 $95=5\times19$，$171=3^2\times19$，$76=2^2\times19$，

所以 95，171，76 的公约数只能是 1 与 19．由于被 b 除的余数是同一个非零的自然数，因此 $b\neq1$，所以 $b=19$．

例 13　有一个自然数，用它去除 63，91，129 所得三个余数的和是 25，问这个自然数是多少？

【解析】 本题又是关于余数的问题，但直接应用法则 1 或法则 2 都不行. 因为只知道三个余数之和，所以要设法通过三个被除数之和与三个余数之和的差转化为整除的问题.

设所求的自然数为 a，由题意知

$63 = a\times k_1 + r_1, 91 = a\times k_2 + r_2, 129 = a\times k_3 + r_3.$

相加得

$63+91+129 = a\times(k_1+k_2+k_3)+(r_1+r_2+r_3) = a(k_1+k_2+k_3)+25$

由法则 1 知，$(63+91+129)-25 = 258$ 被 a 整除，换句话说，a 是 258 的约数.

将 258 作因数分解得　$258 = 2\times 3\times 43$.

因为三个余数的和为 25，所以其中一定有一个余数大于 8，从而除数 $a>8$，另外，a 不会超过三个被除数 63，91，129 中的最小数 63. 因此 a 在 8 与 63 之间. 258 的因数中符合要求的只有 $a=43$，因此所求的自然数是 43.

例 14 小明、小华计算乘法结果如下：

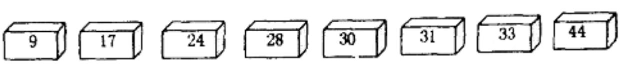
小明的算式：$28997\times 39495 = 1145236415$

小华的算式：$28997\times 39495 = 1145236515$

老师告诉他们，一个做对了，另一个做错了，请你判断谁做错了？谁做对了？

【解析】 我们通过余数来检验. 28997 被 9 除的余数是 8，39495 被 9 除的余数是 3，因此，28997×39495 被 9 除的余数等于 8×3 被 9 除的余数——等于 6. 而 1145236415 被 9 除的余数是 5，1145236515 被 9 除的余数是 6，可见小明的算式不正确，小华的算式可能正确. 但已知二人一对一错，所以小华的算式是正确的.

例 15 八个盒子，各盒内装奶糖数分别为 9，17，24，28，30，31，33，44 块. 甲先取走了一盒，其余各盒被乙、丙、丁三人所取走. 已知乙丙取到的糖的块数相同，并且为丁的两倍. 问：甲取走的一盒中有多少块奶糖？



【解析】 根据题意，乙、丙、丁取走的糖的块数总和一定是 5 的倍数，我们可以先分别计算这八盒糖的块数被 5 除的余数，它们依次是：

原　　数	9，	17，	24，	28，	30，	31，	33，	44
被 5 除的余数	4，	2，	4，	3，	0，	1，	3，	4

这些余数的和是 $4+2+4+3+0+1+3+4=21$.

而 21 除以 5 余 1，从而得出甲取走的糖块数被 5 除余 1. 根据问题所给的八盒糖的块数可以知道，甲取走的一盒中有 31 块糖.

四、简单的逻辑推理问题

日常生活中，人们在观察现象以后总要进行推理.要正确推理，就要依据形式逻辑的基本规则.而数学是思维的科学，数学是学习与锻炼思维的优良载体，数学是锻炼思维的体操.因此，要学会数学的思维方式，练习一些简单的逻辑推理问题是很有益处的.

例16 华罗庚教授曾提出过这样一个问题.

一位教师让三位聪明的学生看了一下事先准备好的五顶帽子：三顶白帽子，两顶黑帽子.然后请三位同学闭上眼睛并给每人戴上一顶帽子，将余下的两顶帽子收藏起来.随后，请三位学生睁开眼睛后说出自己头上所戴帽子的颜色.三个人睁开眼睛互相看了一下，踌躇了一会，觉得为难.而后，三个人几乎同时说出了自己头上所戴帽子的颜色.请问，这三个人是如何判定自己头上所戴帽子颜色的？他们三人头上各戴的是什么颜色的帽子？

【解析】 三人所戴帽的颜色有3种可能：二黑一白；一黑二白；三白.若是二黑一白，则必有一人能看到另二人戴的都是黑帽，从而马上断定自己戴的是白帽，不会“踌躇不决”.所以不会是二黑一白的情况.于是只能是一黑二白或三白的情况.也就是三人中至多只有一人戴黑帽子.这一点在“踌躇的”一瞬间，三个聪明的学生都意识到了.此时，每个学生都在想：“若我戴的是黑帽子，那么另二人应猜出自己是戴白帽子的.”由于三人都在踌躇为难，可见自己头上戴的是白帽子.因此，三个学生几乎同时猜到了自己戴的是一顶白帽子.

所以三个学生戴的都是白帽子.

整个分析过程，按分类讨论分为三类，对‘二黑一白’是通过反证法推理否定的.对‘至多一顶黑帽子’的情况，也是通过反设推理进行判定的.猜帽子的推理既是形式逻辑推理，也含有数学推理.是依据现象中反映的条件进行的推理.比如“踌躇了一会，觉得为难”就是一个举足轻重的条件.

例17 甲、乙、丙三个学生分别戴着3种不同颜色的帽子，穿着3种不同颜色的衣服去参加申办新奥运的活动.已知：

(1)帽子和衣服的颜色都只有红、黄、蓝3种；

(2)甲没戴红帽子，乙没戴黄帽子；

(3)戴红帽子的学生没有穿蓝衣服；

(4)戴黄帽子的学生穿着红衣服；

(5)乙没有穿黄衣服.

试问：甲、乙、丙三个学生各戴什么颜色的帽子，各穿什么颜色的衣服？

【解析】 用列表方法帮助推理.画两张 3×3 的表格：比如甲没戴红帽子即在左表中'甲红'格画×；乙穿红衣服，就在右表'乙红'格画○，其余类推.

帽子

	红	黄	蓝
甲	×		
乙	○	×	
丙			

衣服

	红	黄	蓝
甲			
乙	○	×	×
丙			

由(2)甲没戴红帽子.乙没戴黄帽子，可分乙戴红帽、丙戴红帽两种情况讨论.

若乙戴红帽子('乙红'画○)，由(3)戴红帽子的学生没有穿蓝衣服('乙蓝'填×)，就得出乙穿红衣服或黄衣服('乙红'是○或'乙黄'是○)，由(5)乙没有穿黄衣服('乙黄'不是○)，所以得出乙穿红衣服('乙红'是○).与(4)戴黄帽子的学生穿着红衣服矛盾.所以'乙戴红帽子'不成立，只能是丙戴红帽子.

当丙戴红帽子时，左表'丙红'填○，则'乙红'填×.这时'乙蓝'填○.

帽子

	红	黄	蓝
甲	×	○	
乙	×	×	○
丙	○		

衣服

	红	黄	蓝
甲	○		
乙	×	×	○
丙	×	○	×

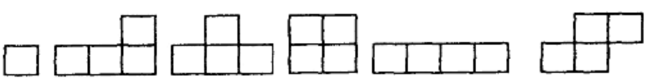
于是知甲戴黄帽('甲黄'填○).由条件(4)戴黄帽子的学生穿着红衣服，右表'甲红'填○.再由(3)戴红帽子的学生没有穿蓝衣服，右表'丙蓝'填×.至此可知，'乙蓝'填○，'丙黄'填○.

所以得出，甲：穿红衣服、戴黄帽子；

乙：穿蓝衣服、戴蓝帽子；

丙：穿黄衣服、戴红帽子.

例18 用六种图形拼成下列图形.

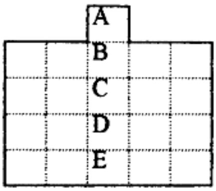


① ② ③ ④ ⑤ ⑥

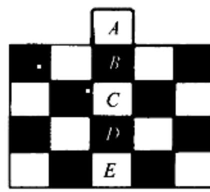
已知图形①放在中间一列.

问:(1)图形①放在中间 A、B、C、D、E 中的哪一格?

(2)画出拼图的方法.



【解析】 把图中的小方格黑白相间染色.其中 11 个白格,10 个黑格.如果图形已拼成,图块②、④、⑤、⑥一定黑白各 2 块,图块③必须 3 白 1 黑或 3 黑 1 白.前四种共占黑格 8 个,白格 8 个.还有 2 个黑格.因此图块③只能占 3 白 1 黑,还剩下一个黑格.图块①一定是 B 或 D 格.而 B 显然不可能.图块①只能是占 D 格的方案.事实上这种方案是存在的,如右图所示.

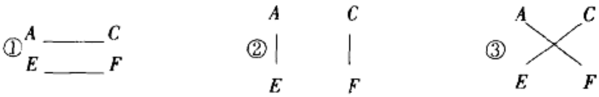


例 19 A、B、C、D、E、F 六名选手进行乒乓球单打的单循环比赛(每人都与其他选手各赛一场).每天同时在三张球台各进行一场比赛.已知第一天 B 对 D;第二天 C 对 E;第三天 D 对 F;第四天 B 对 C.问第五天 A 与谁对阵?

【解析】 我们用列表法帮助推理分析.用 (A,B) 表示 A 与 B 同台对阵比赛.由于是单循环比赛,A、B、C、D、E、F 六名选手每天在三张球台上分三组比赛.每位选手每天恰赛一场,每对选手 5 天内也恰赛一场.由于比赛与在几号球台无关,我们不妨记已知的各场比赛都安排在第 1 号台.我们只要按天顺次填好下表,其解答自然水落石出.

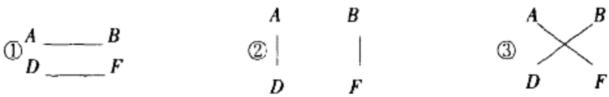
	1 号球台	2 号球台	3 号球台
第一天	(B,D)		
第二天	(C,E)		
第三天	(D,F)		
第四天	(B,C)		
第五天	$(A,?)$		

第一天第 1 台 (B,D) 已赛,另两台为 A、C、E、F 组赛.可能的搭配为



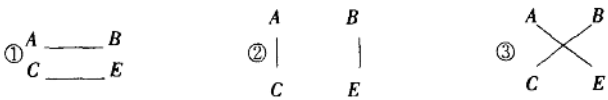
由于(C,E)在第二天赛，故排除③. 所以第2台、第3台分别是(A,C)，(E,F)或(A,E)，(C,F).

第二天由于(C,E)在第1台，另两台是A、B、D、F组赛. 可能的搭配为



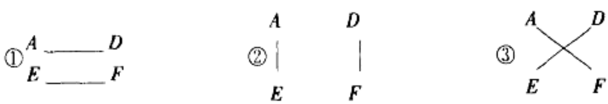
由于(D,F)在第三天赛，故①排除. 由(B,D)在第一天已赛，故排除③. 因此只能出现②(A,D)，(B,F).

第三天(D,F)已安排在第1台赛，另两台是由A、B、C、E组赛. 可能的搭配为



由于(C,E)在第二天已赛，故排除①. 又知(B,C)将在第四天比赛，故排除③. 所以，另两台只能是(A,C)，(B,E). 此时可判定第一天第2台、第3台(A,C)，(E,F)不可能，只能是(A,E)，(C,F).

第四天，第1台(B,C)比赛，另两台由A、D、E、F组赛. 可能的搭配为



由于(A,D)在第二天已赛，故排除①. (D,F)在第三天已赛，故排除②. 因此另两台只能是(A,F)，(D,E)组赛.

第五天由于A与C、D、E、F前四天均已赛过，所以只能是(A,B). 另两台分别为(C,D)，(E,F). 填如下表：

	1号球台	2号球台	3号球台
第一天	(B,D)	(A,E)	(C,F)
第二天	(C,E)	(A,D)	(B,F)
第三天	(D,F)	(A,C)	(B,E)
第四天	(B,C)	(A,F)	(D,E)
第五天	(A,B)	(C,D)	(E,F)

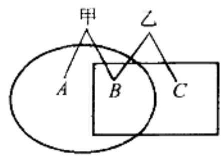
【答案】 第五天A与B对阵. 另两台上分别是C与D对阵，E与F对阵.

例20 某校学生中,没有一个学生读过学校图书馆的所有图书.又知道图书馆内任何两本书都至少被一个同学读过.

问:能不能找到两个学生甲、乙和三本书 A、B、C,使得甲读过 A、B 没有读过 C,乙读过 B、C 没有读过 A? 说明你的判断过程.

【解析】 应注意两个条件:①没有一个学生读过学校图书馆的所有图书;②任何两本书都至少被一个同学读过.

第一步,取读书最多的一位同学设为甲.由条件①,甲没读过图书馆中的所有的图书.因此,至少有一本书 C 甲没读过.在被甲读过的书中任取一本为 B,根据② B、C 至少被一位学生读过.不妨设读过 B、C 的学生是乙.易知乙$\neq$甲(因甲未读过 C).



第二步,可以断言,甲读过的所有书中一定有乙未读过的书(否则,甲读过的书乙都读过,而乙比甲还多读一本书 C,这与甲是读书最多的一个学生的假设相矛盾).为确定起见,设 A 是甲读过的书中乙未读过的.这样一来,我们就找到了甲、乙两个学生和 A、B、C 三本书,满足甲读过 A、B 没有读过 C,乙读过 B、C 没有读过 A.

学习逻辑可以使你的思维灵活、严谨、有条理.通过数学练习,可以帮助我们学习和掌握基本的形式逻辑的常识.学习和掌握了基本的形式逻辑的常识,又可以提高我们分析问题与解决问题的能力.

五、能与不能的判定

现实世界有许多问题,涉及存在性、可行性的判定问题.如果事先能够证明所期望的事物的存在性或可行性,我们就可以科学地决策.数学竞赛中许多能与不能的判定问题,可以从小培养学生科学决策的意识与智慧.

例21 你能在 3×3 的方格表中每个格子里都填一个自然数,使得每行、每列及两条对角线上的三数之和都等于 1997 吗? 若能,请填出一例,若不能,请说明理由.

【解析】 若能填入九个自然数 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_8,a_9$ 满足题设条件,则

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

$a_1 + a_5 + a_9 = 1997$

$a_2 + a_5 + a_8 = 1997$

$a_3 + a_5 + a_7 = 1997$

$a_4 + a_5 + a_6 = 1997$

相加得$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9) + 3a_5 = 4 \times 1997$

而 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 3 \times 1997$

所以 $3a_5 = 1997$.即 $a_5 = \dfrac{1997}{3}$,与 a_5 是自然数矛盾.

因此题设要求的填数法不存在.

例22 有如图所示的 12 张扑克牌:2 点,6 点,10 点各四张:

2 方块	2 红桃	2 黑桃	2 草花	6 方块	6 红桃
6 黑桃	6 草花	10 方块	10 红桃	10 黑桃	10 草花

你能从中选出七张牌,使其上面点数之和恰等于 52 吗?请说明理由.

【解析】 我们发现,所给 12 张牌中每张牌的点数都是被 4 除余 2 的数.其中任意七张牌点数之和仍是被 4 除余 2 的数,而 52 被 4 整除(余数是 0),所以无论如何从中取的七张牌点数之和都不会等于 52.

例23 有一长为 11cm,宽为 9cm,高为 7cm 的长方体木块,能否切割成 77 块长、宽都是 3cm,高是 1cm 的长方体形状的积木块?说明理由.

【解析】 不能切割.

理由如下:木块体积为 $11 \times 9 \times 7 = 693\text{cm}^3$.77 块 $3 \times 3 \times 1\text{cm}^3$ 的积木也恰为 693cm^3.

如果能将 $11 \times 9 \times 7\text{cm}^3$ 的木块切割为 77 块 $3 \times 3 \times 1\text{cm}^3$ 的积木,那么,11×7 的侧面将被小积木的侧面盖满.而小积木侧面面积要么是 3cm^2,要么是 9cm^2.

由 $11 \times 7 = 3m + 9n$,可知 $3 \mid 11 \times 7$,得出矛盾.

所以,长为 11cm,宽为 9cm,高为 7cm 的长方体木块不能切割成 77 块 $3 \times 3 \times 1\text{cm}^3$ 的长方体积木.

例24 如右图,在 3×3 的方格表中填入了九个质数,如果将表中同一行或同一列的三个数加上相同的自然数称为一次操作.问:你能通过若干次操作使得表中九个数都变为相同的数吗?为什么?

2	3	5
13	11	7
17	19	23

【解析】 题设要求的操作不能办到.

理由如下:表中九个质数之和恰为100,100被3除余1.经过第一次操作,总和增加3的倍数.

设 m 次操作后能使表中各数都相等.此时表中诸数总和为

$100+3(k_1+k_2+\cdots+k_m)$

它仍应是个被3除余1的数.但表中九个数变为相等,其总和应能被3整除.这就得出了矛盾!

所以,无论经过多少次操作,表中的数都不会变为九个相等的数.

例25 二十七名小运动员所穿运动服的号码恰是1,2,3,…,26,27这二十七个自然数.问:这些小运动员能否站成一个圆圈,使得任意相邻两个运动员号码数之和都是质数?请说明理由.

【解析】 不能办到!

理由如下:不同的两个奇数、两个偶数之和都是大于2的偶数,它必是合数.所以,要使任意相邻两个运动员号码之和都是质数,这些质数必都是奇数.因此,相邻两运动员号码必定奇偶性相反.这样一来,运动员必须号码奇偶相间地排成一圈.这表明号码为奇数的运动员与号码为偶数的运动员个数必须相等.因此,运动员总数为偶数个.这与运动员个数是奇数(27)不符.所以题设要求的站圈排列法是不能办到的.

【另解】 不同的两个奇数、两个偶数之和都是大于2的偶数,它必是合数.所以,要使任意相邻两个运动员号码之和都是质数,这些质数必都是奇数.这样,一方面由于相邻的运动员号码和数的和是27个奇数的和,它应是个奇数.另一方面,这个和又等于 $2\times(1+2+3+4+\cdots+26+27)$ 是个偶数.这样就得出"奇数=偶数"的矛盾.因此,题设要求的站圈排列法是不能办到的.

例26 能将1,2,3,4,5,6,7,8,9填在 3×3 的方格表中,使得横向与竖向任意相邻两数之和都是质数吗?如果能,请给出一种填法;如果不能,请你说明理由.

【解析】 不能办到.

理由如下:奇数1,3,5,7,9中任两个之和都是大于2的偶数,因而是合数.所以在填入 3×3 的表格时它们中任两个横向、竖向都不能相邻.如果满足题设条件的 3×3 表格的填法存在,那么奇数1,3,5,7,9只能填在表的四角格和中心格.而偶数2,4,6,8填在★处.于是中间所填的奇数要与2,4,6,8横向或竖向相邻,即中间所填的奇数与2,4,6,8之和都要是质数.

然而,这是不可能的.原因是:

1 + 8 = 9 是个合数，
3 + 6 = 9 是个合数，
5 + 4 = 9 是个合数，
7 + 2 = 9 是个合数，
9 + 6 = 15 是个合数，

	★	
★		★
	★	

这表明，1，3，5，7，9 都不能填在中心格，与前面所推出的 1，3，5，7，9 中必有一个数填在中心格矛盾.

所以在 3×3 的表格中满足题设要求的填数法是不存在的.

例27 在十个容器中分别装有 1，2，3，4，5，6，7，8，9，10 毫升的水. 每次操作可由盛水多的甲容器向盛水少的乙容器注水，注水量恰好等于乙容器原有的水量. 问能否在若干次操作后，使得 5 个容器都装有 3 毫升的水，而其余容器分别装有 6，7，8，9，10 毫升的水？如果能，请说明操作程序；如果不能，请说明理由.

【解析】 不能！

理由如下：设甲容器水量为 a，乙容器水量为 b，转注前后两容器水量和相等. 所以

转注前				转注后		
甲容器		乙容器		甲容器		乙容器
a	+	b	=	$(a-b)$	+	$2b$
奇		奇		偶		偶
奇		偶		奇		偶
偶		偶		偶		偶
偶		奇		奇		偶

从以上可见，每次操作后，水量为奇数的容器数目不增. 由于初始状态有 5 个杯中水量是奇数毫升，因此无论多少次操作，水量为奇数毫升的容器数总不能比 5 多. 所以 5 个容器有 3 毫升，其余容器分别装有 6，7，8，9，10 毫升水（总计有 7 个容器水量为奇数毫升）的状态不可能出现！

六、归纳、猜想、发现规律

通过观察，发现图形或数量的规律，是一类非常重要的训练问题，也是数学竞赛中