

工程电磁理论

工 程 电 磁 理 论

北 京 工 业 学 院

楼 仁 海 编 著

国防工业出版社

工程电磁理论

北京工业学院

楼仁海 编著

*

国防工业出版社 出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092 $\frac{1}{16}$ 印张 27 $\frac{1}{2}$ 639 千字

1983年6月第一版 1983年6月第一次印刷 印数: 0,001—4,400册

统一书号: 15034·2569 定价: 3.65元

序 言

本书是为已具有“电磁场理论基础”知识，尚需从理论及数学方法上加深学习正弦电磁场和导行电磁波的读者而编写的，可供电磁场与微波技术专业专业的研究生、科研人员、工程技术人员、高年级大学生学习和参考之用。

本书第一章是电磁理论基础，这一章从麦克斯韦方程组出发，讨论了电磁场和电磁位函数的波动方程在三种主要坐标中的解；分析了平面波的传播特性、能量守恒定理和二重性等，为以后各章打些基础。第二章是线性场的格林函数，这一章从点源场的格林函数开始，讨论了有限和自由空间中线性场的格林函数；分析了唯一性定理、镜象法、等效原理和互易定理等。第三章是各向异性媒质中的电磁波，这一章以二种典型各向异性媒质亦即等离子体和铁氧体为例，分别讨论了张量电容率和张量导磁率，以及磁化等离子体和磁化铁氧体中的平面波。第四章是电磁波的辐射、散射和衍射。这一章由滞后位的展开式，讨论了电偶极辐射、磁偶极辐射和电四极辐射；分析了自由电荷的散射、束缚电荷的散射、圆柱的散射和球的散射；又讨论了标量衍射理论和矢量衍射理论；还介绍了小孔衍射理论和巴俾涅原理等。第五章是波导，这一章分析了柱形波导中电磁波的一般理论，波型的正交性，理想波导与非理想波导和传输线的对比，波导中波型的衰减；还结合矩形波导、圆波导和圆介质波导等进行了具体分析。第六章是谐振腔，这一章分析了谐振腔的一般理论；并结合矩形谐振腔、圆柱形谐振腔和球形谐振腔，进行场分布、谐振频率和Q值的具体分析；还讨论了谐振腔的激励和微扰。第七章是波导中的不连续性，这一章以波导中几种典型的不连续性问题为例，叙述解析方法：场分量匹配法、准静场法、变分法、威纳-霍普夫法、微扰法和耦合波理论的概念及解题技巧，使得读者可以把这些数学方法应用到其它不连续性问题中去。第八章是数值方法，这一章以任意截面波导为例，叙述通常应用的数值方法：有限差分法、有限元素法和矩量法的概念及求解过程，使得读者对于一些有实际意义的、难以用解析方法处理的电磁场边值问题，具有使用计算机进行求解的基础。

本书采用工程上通行的国际制(SI)单位，时谐因子取 $e^{j\omega t}$ 。

每章末均附有习题，使得读者可以运用书中所阐述的数学方法，借以巩固理论学习。

全书曾由董宏发同志校阅一遍，提出了不少宝贵意见，特此致谢。限于编者的学识水平，书中不妥或错误之处在所难免，希望读者批评、指正。

编 者

目 录

第一章 电磁理论基础	1
§ 1.1 麦克斯韦方程组	1
§ 1.2 物质方程 (组成关系)	2
§ 1.3 麦克斯韦方程组的积分形式和边界条件	5
§ 1.4 麦克斯韦方程组的复数形式	8
§ 1.5 波动方程	9
§ 1.6 直角坐标中的标量波函数——平面波	10
§ 1.7 导电媒质中的平面波	15
一、在良好介质中的平面波	26
二、在良导体中的平面波	20
§ 1.8 能量守恒, 坡印亭定理	21
§ 1.9 平面波的极化	25
§ 1.10 电磁波在平面分界面上的反射和透射	28
一、不同介质分界面上的垂直极化波	30
二、不同介质分界面上的平行极化波	31
三、理想介质和理想导体分界面上的垂直极化波	33
四、理想介质和理想导体分界面上的平行极化波	33
§ 1.11 磁荷与磁流, 二重性 (对偶性)	34
§ 1.12 电磁位函数	36
一、矢量磁位和标量电位	37
二、矢量电位和标量磁位	39
三、赫兹矢量	40
§ 1.13 圆柱坐标中的标量波函数	42
§ 1.14 球面坐标中的标量波函数	47
§ 1.15 矢量波函数	51
习题	57
参考资料	63
第二章 线性场的格林函数	64
§ 2.1 迪拉克 (Dirac) δ 函数	64
§ 2.2 $1/R$ 的梯度及拉普拉斯运算	65
§ 2.3 格林定理	67
§ 2.4 唯一性定理	69
§ 2.5 格林函数	70
§ 2.6 镜像法	72
§ 2.7 格林函数的直接解法	77
§ 2.8 直角坐标中标量波动方程的格林函数	81
§ 2.9 圆柱坐标中标量波动方程的格林函数, 等效原理	84

§ 2.10 球面坐标中标量波动方程的格林函数	88
§ 2.11 并矢函数	90
§ 2.12 自由空间中的并矢格林函数	92
§ 2.13 互易定理	95
习题	96
参考资料	97
第三章 各向异性媒质中的电磁波	98
§ 3.1 等离子体及张量电容率	98
§ 3.2 在磁化等离子体中的平面波	101
一、纵向传播的波 ($\theta = 0$)	102
二、横向传播的波 ($\theta = \pi/2$)	105
§ 3.3 铁氧体及张量导磁率	107
§ 3.4 有损耗铁氧体	110
§ 3.5 在磁化铁氧体中的平面波	115
一、纵向传播的波 ($\theta = 0$)	116
二、横向传播的波 ($\theta = \pi/2$)	117
§ 3.6 经过介质-等离子体分界面的平面波	119
习题	120
参考资料	121
第四章 电磁波的辐射、散射和衍射	122
§ 4.1 滞后位	122
§ 4.2 辐射矢量	123
§ 4.3 电偶极辐射	125
§ 4.4 磁偶极辐射和电四极辐射	132
§ 4.5 半波天线	136
§ 4.6 行波天线	139
§ 4.7 汤姆逊 (Thomson) 散射与瑞利 (Rayleigh) 散射	141
§ 4.8 圆柱的散射	148
§ 4.9 球的散射	152
§ 4.10 标量衍射理论	160
§ 4.11 基尔霍夫积分公式的矢量等效式	164
§ 4.12 夫琅和费 (Fraunhofer) 衍射	165
§ 4.13 圆孔衍射	167
§ 4.14 矩形孔衍射和狭缝衍射	170
§ 4.15 菲涅耳 (Fresnel) 衍射	171
§ 4.16 小孔衍射	172
§ 4.17 巴俾涅 (Babinet) 原理	181
习题	182
参考资料	184
第五章 波导	185
§ 5.1 柱形波导中的场关系	185
§ 5.2 波的速度	189
§ 5.3 波长、波导波长和截止波长	191

§ 5.4 横电磁波	192
§ 5.5 二维格林恒等式	193
§ 5.6 波型的正交性	194
§ 5.7 规则波导的一般解	196
§ 5.8 传输线方程的简正波型解	203
§ 5.9 波导波型的传播特性	204
§ 5.10 波导波型场	206
§ 5.11 波导中的功率和能量	207
§ 5.12 非理想波导的传输线方程	210
§ 5.13 波导中的衰减	213
§ 5.14 矩形波导	222
§ 5.15 矩形波导中波型的衰减	229
§ 5.16 圆波导	231
§ 5.17 同轴波导	238
§ 5.18 圆介质波导	243
习题	250
参考资料	252
第六章 谐振腔	253
§ 6.1 场分析	253
§ 6.2 波导谐振腔	256
§ 6.3 矩形谐振腔	257
§ 6.4 圆柱形谐振腔	261
§ 6.5 球形谐振腔	266
§ 6.6 谐振腔的激励	272
§ 6.7 谐振腔的微扰	279
习题	283
参考资料	284
第七章 波导中的不连续性	285
§ 7.1 场分量匹配法	285
一、矩形波导阶梯	286
二、电感性圆栓	296
三、电容性栓	299
§ 7.2 准静场法	303
一、波导阶梯	303
二、电感性窗口	306
三、电感性导片	311
四、电容性窗口	320
五、电容性导片	323
§ 7.3 变分法	327
一、电容性窗口	327
二、电感性窗口	332
三、加载介质板矩形波导	334
§ 7.4 威纳-霍普夫法	342
§ 7.5 微扰法	356

§ 7.6 耦合波理论	360
一、锥形波导	367
二、定向耦合器	372
习题	373
参考资料	375
第八章 数值方法	376
§ 8.1 有限差分法	377
一、差商与微商	377
二、网格及差分方程的形成	378
三、场问题变成联立方程组	380
四、线性差分方程组的解法	382
五、用逐步过弛豫法 (SOR法) 求解任意截面波导中的场	388
§ 8.2 有限元素法	401
一、基本概念及解题步骤	401
二、求解波导中的二维场	403
三、求解波导中的三维场	415
§ 8.3 矩量法	417
一、基本概念及解题过程	417
二、近似方法	420
三、计算举例	422
习题	430
参考资料	431

第一章 电磁理论基础

本章讨论电磁场的基本定律、波动方程、平面波、能量守恒定理,并加深讨论磁荷与磁流、电磁位函数、圆柱和球坐标中的标量波函数以及矢量波函数等,作为以后各章进一步研究电磁理论的基础。由于在很多工程问题中,场是按正弦规律变化,而且由于任意能够具体实现的周期性或非周期性时变场,可以应用傅里叶级数或傅里叶积分分解成为正弦场的离散或连续频谱:

$$f(t) = \sum c_n e^{j\omega t}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-jn\alpha} d\alpha \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

或

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

(我们用复数指数 $e^{j\omega t}$ 代表正弦时变场,其中 ω 是角频率),故本书着重研究正弦电磁场。

§ 1.1 麦克斯韦方程组

麦克斯韦电磁理论是根据已有的电学和磁学上的基本定律(高斯定律、安培定律、法拉第定律和自由磁极不存在)创建起来的。麦克斯韦的重要贡献是在安培定律中引入了称做位移电流的附加项,从而既解决了交变场中电流连续性问题,又揭示了变化的电场(即位移电流)可以激发磁场,并和变化的磁场又激发电场(法拉第定律)在空间不断地相互转化,预言电磁波的存在,提出光是电磁波的学说。麦克斯韦的重要预见(首先由赫兹的实验所证实),修正了原先的基本定律,创建了完善地反映宏观电磁现象的基本规律——麦克斯韦方程组,给无线电电子技术,特别是微波技术奠定了重要的理论基础。

下列四个方程构成了麦克斯韦方程组

麦克斯韦-安培定律	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	(1.1-1)
-----------	--	---------

法拉第定律	$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	(1.1-2)
-------	---	---------

自由磁极不存在	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	(1.1-3)
---------	-------------------------------	---------

高斯定律	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	(1.1-4)
------	----------------------------------	---------

式中,

$\mathbf{E}$ = 电场强度 (伏/米);

$\mathbf{D}$ = 电通密度 (库/米²);

$\mathbf{H}$ = 磁场强度 (安/米);

B = 磁通密度 (韦/米²);

J = 电流密度 (安/米²);

ρ = 电荷密度 (库/米³)。

上面四个方程不是独立的, 因为两个散度方程可以从两个旋度方程及电流连续性方程

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.1-5)$$

推导出来。取式 (1.1-2) 的散度, 得

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B})$$

由于 $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E} = 0$, 故有

$$-\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0$$

因自由磁极是不存在的, 显然

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

取式 (1.1-1) 的散度, 得

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{D}$$

由于 $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = 0$, 并从电流连续性方程 (1.1-5), 得

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D}) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D} - \rho) = 0$$

按高斯定律, 电荷是电场源, 显然

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

可见, 麦克斯韦方程组中两个旋度关系式 (1.1-1) 和 (1.1-2) 是独立方程, 而两个散度关系式 (1.1-3) 和 (1.1-4) 是非独立方程。

麦克斯韦-安培定律式 (1.1-1)、法拉第定律式 (1.1-2)、电流连续性方程 (1.1-5) 连同洛伦兹力方程

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.1-6)$$

构成了经典电动力学的基础, 再加上牛顿第二定律, 就可以完全确定电磁场和带电粒子的运动。式 (1.1-6) 中,

$\mathbf{F}$ —— 洛伦兹力 (牛);

q —— 带电粒子的电量 (库);

$\mathbf{v}$ —— 带电粒子的运动速度 (米/秒)。

§ 1.2 物质方程(组成关系)

由于一个矢量方程可以分解成三个标量方程, 故由式 (1.1-1)、(1.1-2) 和 (1.1-5) 所示的三个独立方程等效于七个标量方程, 其中包含有十六个未知标量函数。这显然是不能求解的。要使方程的数目和未知量的数目相等, 还必须利用关于表征物质在电磁场作用下的特性的关系式, 这类关系式称为物质方程(组成关系)。恰好有三个这种矢量方程, 补充了所缺的九个标量方程, 使得未知场函数和方程的数目相等, 场方程组就成为可解的了。

自由空间指的是真空或基本上与真空具有相同特性的任何其它媒质（如空气），其组成关系的表示式特别简单，有

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (1.2-1)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (1.2-2)$$

$$\mathbf{J} = 0 \quad (1.2-3)$$

式中， ε_0 和 μ_0 分别称为真空的电容率（或称介电常数）和导磁率。它们的量纲和大小决定于所采用的单位制。现行国际单位制（SI）中

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} (\text{亨/米})$$

由于真空中的光速 $c = 1/(\mu_0 \varepsilon_0)^{1/2} \approx 3 \times 10^8$ (米/秒)，故得

$$\varepsilon_0 = 1/c^2 \mu_0 \approx \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} (\text{法/米})$$

在电磁场作用之下，物质产生极化和磁化，并引起电流。电通密度 $\mathbf{D}$ 则由两部分组成，其一是与自由空间电容率 ε_0 有关的电场，其二称为极化强度矢量 $\mathbf{P}$ ，由

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \mathbf{p}_e}{\Delta V} \quad (\text{库/米}^2) \quad (1.2-4)$$

来定义。式中， $\mathbf{p}_e$ 称为电偶极矩。故 $\mathbf{D}$ 可写成

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (1.2-5)$$

磁通密度 $\mathbf{B}$ 亦由两部分组成，其一是与自由空间导磁率 μ_0 有关的磁场，其二称为磁化强度矢量 $\mathbf{M}$ ，由

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \mathbf{p}_m}{\Delta V} \quad (\text{韦/米}^2) \quad (1.2-6)$$

来定义。式中， $\mathbf{p}_m$ 称为磁偶极矩。故 $\mathbf{B}$ 可写成

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (1.2-7)$$

媒质的组成关系是以实验为基础的。对于线性媒质， $\mathbf{P}$ 与 $\mathbf{E}$ 成正比， $\mathbf{M}$ 与 $\mathbf{H}$ 成正比，可分别写成

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (1.2-8)$$

及

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (1.2-9)$$

式中， χ_e 和 χ_m 分别称为媒质的相对电极化率和相对磁极化率。因此，组成关系可写成

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = (1 + \chi_e) \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (1.2-10)$$

$$\mathbf{B} = (1 + \chi_m) \mu_0 \mathbf{H} \quad (1.2-11)$$

设

$$\varepsilon = (1 + \chi_e) \varepsilon_0, \quad \mu = (1 + \chi_m) \mu_0 \quad (1.2-12)$$

分别代表媒质的电容率和导磁率，线性媒质的组成关系即可写成

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (1.2-13)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} \quad (1.2-14)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (1.2-15)$$

式中,

$$\varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_0 = 1 + \chi_e \quad (1.2-16 a)$$

$$\mu_r = \mu / \mu_0 = 1 + \chi_m \quad (1.2-16 b)$$

分别称为媒质的相对电容率和相对导磁率; σ 代表媒质的导电率 (西门子)。如果 E 或 H 很大, 或者 E 或 H 的时间导数很大, 上列线性关系就可能不成立。

对于各向异性的结晶媒质, 导磁率和电容率不是标量, 而是张量。同时具有张量电容率和张量导磁率的媒质, 目前在应用上尚属少见。如果媒质的电容率是一张量, 电通密度 D 和电场强度 E 不再具有相同的方向。在直角坐标制中, 由于外加电场 $E = \hat{z}E_z$, 同时在三个方向导致媒质的极化, 极化强度矢量 P 则可写成

$$P = \varepsilon_0 (\hat{x}\chi_{exx}E_x + \hat{y}\chi_{exy}E_x + \hat{z}\chi_{exz}E_x) \quad (1.2-17)$$

式中, $\hat{x}$, $\hat{y}$ 和 $\hat{z}$ 代表相应轴上的单位矢量。如用下标 1, 2 和 3 分别代替下标 x , y 和 z , 则在电场 $E = \hat{x}E_1 + \hat{y}E_2 + \hat{z}E_3$ 的作用下, 有

$$P_1 = \varepsilon_0 (\chi_{e11}E_1 + \chi_{e12}E_2 + \chi_{e13}E_3) \quad (1.2-18 a)$$

$$P_2 = \varepsilon_0 (\chi_{e21}E_1 + \chi_{e22}E_2 + \chi_{e23}E_3) \quad (1.2-18 b)$$

$$P_3 = \varepsilon_0 (\chi_{e31}E_1 + \chi_{e32}E_2 + \chi_{e33}E_3) \quad (1.2-18 c)$$

由 $D = \varepsilon_0 E + P$, 得

$$D_1 = \varepsilon_0 E_1 + P_1 = (1 + \chi_{e11})\varepsilon_0 E_1 + \chi_{e12}\varepsilon_0 E_2 + \chi_{e13}\varepsilon_0 E_3 \quad (1.2-19 a)$$

$$D_2 = \varepsilon_0 E_2 + P_2 = \chi_{e21}\varepsilon_0 E_1 + (1 + \chi_{e22})\varepsilon_0 E_2 + \chi_{e23}\varepsilon_0 E_3 \quad (1.2-19 b)$$

$$D_3 = \varepsilon_0 E_3 + P_3 = \chi_{e31}\varepsilon_0 E_1 + \chi_{e32}\varepsilon_0 E_2 + (1 + \chi_{e33})\varepsilon_0 E_3 \quad (1.2-19 c)$$

设 $\varepsilon_{11} = (1 + \chi_{e11})\varepsilon_0$, $\varepsilon_{12} = \chi_{e12}\varepsilon_0$, $\varepsilon_{13} = \chi_{e13}\varepsilon_0$, ..., $\varepsilon_{33} = (1 + \chi_{e33})\varepsilon_0$, 则式 (1.2-19) 变成

$$D_1 = \varepsilon_{11}E_1 + \varepsilon_{12}E_2 + \varepsilon_{13}E_3 \quad (1.2-20 a)$$

$$D_2 = \varepsilon_{21}E_1 + \varepsilon_{22}E_2 + \varepsilon_{23}E_3 \quad (1.2-20 b)$$

$$D_3 = \varepsilon_{31}E_1 + \varepsilon_{32}E_2 + \varepsilon_{33}E_3 \quad (1.2-20 c)$$

或写成矩阵形式

$$[D] = [\varepsilon][E] \quad (1.2-21)$$

也可用

$$D_j = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{jk} E_k, \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.2-22)$$

来表示。如写成矢量表示式, 则有

$$D = \hat{\varepsilon}E \quad (1.2-23)$$

式中, 并矢 $\hat{\varepsilon}$ 为

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_{11}\hat{x}\hat{x} + \varepsilon_{12}\hat{x}\hat{y} + \varepsilon_{13}\hat{x}\hat{z} + \varepsilon_{21}\hat{y}\hat{x} + \varepsilon_{22}\hat{y}\hat{y} + \varepsilon_{23}\hat{y}\hat{z} + \varepsilon_{31}\hat{z}\hat{x} + \varepsilon_{32}\hat{z}\hat{y} + \varepsilon_{33}\hat{z}\hat{z} \quad (1.2-24)$$

即媒质的张量电容率。式 (1.2-21)~(1.2-23) 通常代表各向异性媒质在电场作用下的组成关系。

对于各向异性铁磁材料, 在所需的磁场作用下, 导磁率是一张量, 类似于具有张量电

容率的媒质, 磁通密度 $\mathbf{B}$ 和磁场强度 $\mathbf{H}$ 之间的关系可以写成下列各种表示式

$$[\mathbf{B}] = [\mu][\mathbf{H}] \quad (1.2-25)$$

$$B_j = \sum_{k=1}^3 \mu_{jk} H_k, \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.2-26)$$

$$\mathbf{B} = \vec{\mu} \mathbf{H} \quad (1.2-27)$$

式中, 并矢 $\vec{\mu}$ 为

$$\vec{\mu} = \mu_{11} \hat{x}\hat{x} + \mu_{12} \hat{x}\hat{y} + \mu_{13} \hat{x}\hat{z} + \mu_{21} \hat{y}\hat{x} + \mu_{22} \hat{y}\hat{y} + \mu_{23} \hat{y}\hat{z} + \mu_{31} \hat{z}\hat{x} + \mu_{32} \hat{z}\hat{y} + \mu_{33} \hat{z}\hat{z} \quad (1.2-28)$$

即媒质的张量导磁率。

少许物质和半导体里面的整流边界, 或恒定磁场中的等离子体则具有张量导电率, 在电场的作用下, 媒质的组成关系有

$$\mathbf{J} = \vec{\sigma} \mathbf{E} \quad (1.2-29)$$

式中, 并矢 $\vec{\sigma}$ 代表媒质的张量导电率。

§ 1.3 麦克斯韦方程组的积分形式和边界条件

麦克斯韦方程组的微分形式 (1.1-1)~(1.1-5) 只适用于媒质的物理性质 (由 ϵ , μ 和 σ 来表征) 处处连续的空间。但是, 电磁波经常要遇到媒质的性质在一个或多个界面处有突变的情况。因而分界面处的矢量 $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{D}$ 也会有不连续的突变。所以, 对于这些面上的各点麦克斯韦方程组的微分形式已失去意义, 而必需去考虑有限空间中场量之间的关系。这关系是由麦克斯韦方程组的积分形式所制约的。电磁场的边界条件即可由之而导出。

把式 (1.1-1)~(1.1-5) 对媒质中某一闭合面 s 所包围的体积 V 进行积分, 得

$$\int_V \nabla \times \mathbf{H} dV = \int_V \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dV \quad (1.3-1)$$

$$\int_V \nabla \times \mathbf{E} dV = - \int_V \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dV \quad (1.3-2)$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = 0 \quad (1.3-3)$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV = \int_V \rho dV \quad (1.3-4)$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (1.3-5)$$

对式 (1.3-1) 和 (1.3-2) 应用矢量斯托克定理

$$\int_V (\nabla \times \mathbf{F}) dV = \oint_s (\hat{n} \times \mathbf{F}) ds \quad (1.3-6)$$

式中, $\mathbf{F}$ 代表任意位置矢量函数, $\hat{n}$ 是界面 s 的外向法线方向上的单位矢量; 又对式 (1.3-3)~(1.3-5) 应用高斯定理

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \oint_s \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.3-7)$$

式 (1.3-1)~(1.3-5) 又可写成

$$\oint_s (\hat{n} \times \mathbf{H}) ds = \int_V \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dV \quad (1.3-8)$$

$$\oint_s (\hat{n} \times \mathbf{E}) ds = - \int_V \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dV \quad (1.3-9)$$

$$\oint_s (\hat{n} \cdot \mathbf{B}) ds = 0 \quad (1.3-10)$$

$$\oint_s (\hat{n} \cdot \mathbf{D}) ds = \int_V \rho dV \quad (1.3-11)$$

$$\oint_s (\hat{n} \cdot \mathbf{J}) ds = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (1.3-12)$$

式 (1.3-8)~(1.3-11) 通称麦克斯韦方程组的积分形式。另外, 麦克斯韦-安培定律和法拉第定律的积分形式通常写成

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s} \quad (1.3-13)$$

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.3-14)$$

对于边界条件的推导, 式 (1.3-8) 和 (1.3-9) 用起来是比较简便的。

设一个无限小的圆盒横跨电磁性质不同的两种媒质的分界面, 其顶面和底面平行, 并与分界面平行, 见图 1-1。当电磁场从媒质 1 进入媒质 2 遇到分界面时, 场量之间的关系即边界条件即可从式 (1.3-8)~(1.3-12) 求得。取圆盒的顶面和底面都向分界面靠拢, 则 Δh_1 和 $\Delta h_2 \rightarrow 0$, 故只要分界面邻近的磁通密度是有限的, 便有

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} (\Delta h_1 \mathbf{B}_1 + \Delta h_2 \mathbf{B}_2) = 0$$

因此, 式 (1.3-9) 变成

$$\hat{n}_1 \times \mathbf{E}_1 + \hat{n}_2 \times \mathbf{E}_2 = 0 \quad (1.3-15)$$

此即 $\mathbf{E}$ 的切向分量的边界条件, 表明 $E_{t1} = E_{t2}$ 。

如分界面上有电荷和电流时, 应用麦克斯韦方程组必须用面电荷密度 ρ_s 和面电流密度 $\mathbf{J}_l$ 的概念, 去代替体电荷密度 ρ 和电流密度 $\mathbf{J}$, 因为后者在分界面上是奇异的。 ρ_s 和 $\mathbf{J}_l$ 的定义分别为

$$\rho_s = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} (\rho_1 \Delta h_1 + \rho_2 \Delta h_2) \text{ (库/米}^2\text{)} \quad (1.3-16)$$

$$\mathbf{J}_l = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} (\mathbf{J}_1 \Delta h_1 + \mathbf{J}_2 \Delta h_2) \text{ (安/米)} \quad (1.3-17)$$

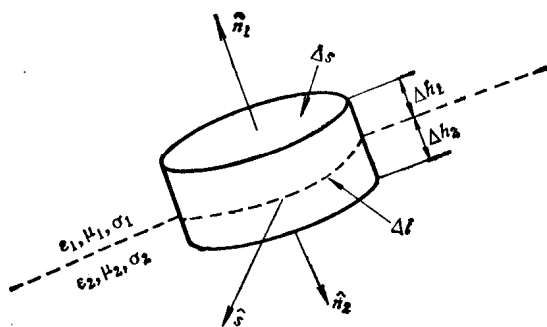


图1-1 不同媒质的分界面

因此, 由式 (1.3-8) 求得 H 的切向分量的边界条件是

$$\hat{n}_1 \times H_1 + \hat{n}_2 \times H_2 = J_t, \quad \text{即} \quad H_{t1} - H_{t2} = J_t \quad (1.3-18)$$

又由式 (1.3-10) 有

$$\oint_s (\hat{n} \cdot B) ds = (\hat{n}_1 \cdot B_1 + \hat{n}_2 \cdot B_2) \Delta s = 0$$

因此, B 的法向分量的边界条件是

$$\hat{n}_1 \cdot B_1 + \hat{n}_2 \cdot B_2 = 0, \quad \text{即} \quad B_{n1} = B_{n2} \quad (1.3-19)$$

由式 (1.3-11) 又有

$$\oint_s (\hat{n} \cdot D) ds = (\hat{n}_1 \cdot D_1 + \hat{n}_2 \cdot D_2) \Delta s = \rho_s \Delta s$$

故 D 的法向分量的边界条件是

$$\hat{n}_1 \cdot D_1 + \hat{n}_2 \cdot D_2 = \rho_s, \quad \text{即} \quad D_{n1} - D_{n2} = \rho_s \quad (1.3-20)$$

通过圆盒表面 (顶面, 底面和侧面) 的电流, 由式 (1.3-12) 有

$$\oint_s \hat{s} \cdot (J_1 \Delta h_1 + J_2 \Delta h_2) dl + (\hat{n}_1 \cdot J_1 + \hat{n}_2 \cdot J_2) \Delta s = - \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} \Delta h_1 + \frac{\partial \rho_2}{\partial t} \Delta h_2 \right) \Delta s \quad (1.3-21)$$

为了求出式 (1.3-21) 的极限值, 我们必须引进二维散度 (即表面散度), 它定义为

$$\nabla \cdot F = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\oint_s (\hat{s} \cdot F) dl}{\Delta s} \quad (1.3-22)$$

式中, $\hat{s}$ 是圆盒侧面的外向法线上的单位矢量, 当 Δh_1 , Δh_2 和 $\Delta s \rightarrow 0$ 时, 式 (1.3-21) 变成

$$\nabla \cdot J_t + (\hat{n}_1 \times J_1 + \hat{n}_2 \times J_2) = - \frac{\partial \rho_s}{\partial t} \quad (1.3-23)$$

此即 J 的切向分量的边界条件。为了便于查看与比较, 我们把这些结果与经常遇到的两种特殊情况的边界条件列于表1-1。完全导体指的是导电率 $\sigma \rightarrow \infty$, 因而内部不存在电磁场的媒质

表1-1 边界条件

麦克斯韦方程组	一般边界条件	媒质 I, II 非完全导体	媒质 II 是完全导体
$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$	$\hat{n}_1 \times H_1 + \hat{n}_2 \times H_2 = J_t$	$\hat{n}_1 \times H_1 + \hat{n}_2 \times H_2 = 0$	$\hat{n}_1 \times H_1 = J_t$
$\nabla \times E = - \frac{\partial B}{\partial t}$	$\hat{n}_1 \times E_1 + \hat{n}_2 \times E_2 = 0$	$\hat{n}_1 \times E_1 + \hat{n}_2 \times E_2 = 0$	$\hat{n}_1 \times E_1 = 0$
$\nabla \cdot B = 0$	$\hat{n}_1 \cdot B_1 + \hat{n}_2 \cdot B_2 = 0$	$\hat{n}_1 \cdot B_1 + \hat{n}_2 \cdot B_2 = 0$	$\hat{n}_1 \cdot B_1 = 0$
$\nabla \cdot D = \rho$	$\hat{n}_1 \cdot D_1 + \hat{n}_2 \cdot D_2 = \rho_s$	$\hat{n}_1 \cdot D_1 + \hat{n}_2 \cdot D_2 = \rho_s$	$\hat{n}_1 \cdot D_1 = \rho_s$
$\nabla \cdot J = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$	$\nabla \cdot J_t + \hat{n}_1 \cdot J_1 + \hat{n}_2 \cdot J_2 = - \frac{\partial \rho_s}{\partial t}$	$\hat{n}_1 \cdot J_1 + \hat{n}_2 \cdot J_2 = - \frac{\partial \rho_s}{\partial t}$	$\nabla \cdot J_t + \hat{n}_1 \cdot J_1 = - \frac{\partial \rho_s}{\partial t}$

§ 1.4 麦克斯韦方程组的复数形式

这章一开头就曾指出, 正弦电磁场是交变场中着重加以研究的。从数学的观点来看, 正弦电磁场可用复数来表示, 因而可在场方程中消去时间变量, 使得场方程得到简化, 从而便于运算。复数法的基础是欧拉公式

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \quad (1.4-1)$$

因此, 正弦函数相当于上面指数式中的虚数部分, 并用

$$\sin \omega t = \text{Im}[e^{j\omega t}] \quad (1.4-2)$$

来表示。把 $\partial/\partial t$ 用 $j\omega$ 代替以后, 式 (1.1-1)~(1.1-5) 变成

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega \mathbf{D} \quad (1.4-3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \quad (1.4-4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.4-5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.4-6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega \rho \quad (1.4-7)$$

式 (1.4-3)~(1.4-4) 通称麦克斯韦方程组的复数形式。

在复数形式方程的场量中, 我们采用了与瞬时量方程相同的符号。显然, 两者含义是不一样的。瞬时量方程中, 场量指的是矢量或标量的瞬时值; 而在复数形式方程中, 场量指的是复矢量或复标量, 即时间因子 $e^{j\omega t}$ 前面的复乘数。由于在工程电磁理论中, 除少数 (如包含有功率关系) 问题以外, 大多数都是线性的, 因此, 在以后的分析中, 我们将主要采用正弦时间函数的复数法, 把四维 (x, y, z, t) 场问题简化成三维 (x, y, z) 场问题来研究。为了避免不同含义的相同符号有时碰在一起会产生混淆, 瞬时量使用时间 t 的正弦函数或 $\text{Im}[e^{j\omega t}]$ 来表示。

下面以电场强度为例, 表明场量的瞬时值和它的复量是怎样表示出来有区别的。设电场强度矢量 $\mathbf{E}$ 随时间 t 以角频率 ω 作正弦变化, $\mathbf{E}$ 的瞬时量方程可以写成

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z, t) = & \hat{x}\sqrt{2}E_x\sin(\omega t + \varphi_x) + \hat{y}\sqrt{2}E_y\sin(\omega t + \varphi_y) \\ & + \hat{z}\sqrt{2}E_z\sin(\omega t + \varphi_z) \end{aligned} \quad (1.4-8)$$

式中, E_x, E_y 和 E_z 代表有效值; φ_x, φ_y 和 φ_z 是初相角。上式如用复数形式来表示, 则可写成

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \text{Im}[\sqrt{2}(\hat{x}E_x e^{j\varphi_x} + \hat{y}E_y e^{j\varphi_y} + \hat{z}E_z e^{j\varphi_z}) \times e^{j\omega t}] \quad (1.4-9)$$

式中, $(\hat{x}E_x e^{j\varphi_x} + \hat{y}E_y e^{j\varphi_y} + \hat{z}E_z e^{j\varphi_z})$ 代表电场强度的复矢量, 仅是位置坐标 x, y, z 的函数; 而电场强度矢量的瞬时量等于复矢量乘以 $e^{j\omega t}$, 再取其虚部 (也可取实部)。

物质方程的复数形式类似于式 (1.2-1)~(1.2-3), 写成

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\omega)\mathbf{E} \quad (1.4-10)$$

$$\mathbf{B} = \mu(\omega)\mathbf{H} \quad (1.4-11)$$

$$\mathbf{J} = \sigma(\omega)\mathbf{E} \quad (1.4-12)$$

式中, 诸场量是复矢量; $\sigma(\omega), \mu(\omega)$ 和 $\varepsilon(\omega)$ 分别称为媒质的复导电率、复导磁率和复电容率。对于金属, 红外频谱以下的 $\sigma(\omega)$ 十分接近于直流的 σ 。非磁性金属的 $\varepsilon(\omega)$ 接近于 ε_0 , $\mu(\omega)$ 接近于 μ_0 。在一般介质中, 极化强度 $\mathbf{P}$ 及 $\mathbf{M}$ 依外加场以同一频

率 ω 随时间而变化,但由于介质内部的或多或少的阻尼力,使得 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{M}$ 常常滞后于场 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 。因此, $\varepsilon(\omega)$ 和 $\mu(\omega)$ 都必须是复数,才能把时间上的差异包含在内。 $\varepsilon(\omega)$ 和 $\mu(\omega)$ 的复数性质之所以反映出来,是由于在克服摩擦阻尼力过程中必须做功,所以,介质内部产生功率损耗。如 $\mathbf{E}$ 是作用在介质上的电场强度复矢量,介质中电极化强度复矢量 $\mathbf{P}$ 则为

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \alpha e^{-j\varphi} \mathbf{E} \quad (1.4-13)$$

式中, α 是正实常数, φ 是 $\mathbf{P}$ 滞后于 $\mathbf{E}$ 的相角。因此,相对电极化率 χ_e 为

$$\chi_e = \alpha e^{-j\varphi} \quad (1.4-14)$$

电容率 $\varepsilon(\omega)$ 为

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0(1 + \chi_e) = \varepsilon_0(1 + \alpha \cos \varphi - j\alpha \sin \varphi) = \varepsilon' - j\varepsilon'' \quad (1.4-15)$$

而是一个复数,它的实部代表媒质的电容率。把式(1.4-15)代入旋度方程(1.4-3),得

$$\nabla \times \mathbf{H} = [j\omega\varepsilon(\omega) + \sigma] \mathbf{E} = j\omega\varepsilon' \left(1 - j \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} - j \frac{\sigma}{\omega\varepsilon'} \right) \mathbf{E} = j\omega\varepsilon' (1 - j\operatorname{tg} \delta) \mathbf{E} \quad (1.4-16)$$

这表明,式(1.4-15)中 $\varepsilon(\omega)$ 的虚数部分等效于媒质的导电率的增加。对于良好介质,高频时的 σ 是很小的;因此,大部分能量损耗是由极化阻尼力所产生的,并反映在式(1.4-16)中包含 ε'' 的项内。为了简化方程式,当论及导电率为 σ 的介质时,往往用有效电容率

$$\varepsilon_e = \varepsilon' (1 - j\operatorname{tg} \delta) \quad (1.4-17)$$

代表阻尼损耗和传导损耗这两项因素的影响。式中, $\operatorname{tg} \delta$ 是媒质的损耗角正切。

相类似,媒质的复导磁率 $\mu(\omega)$ 可以写成

$$\mu(\omega) = \mu' - j\mu'' \quad (1.4-18)$$

式中,实部 μ' 代表媒质的导磁率,虚部 μ'' 代表磁化过程中媒质内的磁损耗因数。

§ 1.5 波动方程

在§ 1.1中曾指出,麦克斯韦的重要贡献是在安培定律中引入了称做位移电流的附加项,揭示了变化的电磁场具有波动的性质。这种以波动形式传播的电磁场,通称为电磁波。下面我们就从麦克斯韦方程组去找出电磁场随时间和空间而变化的关系——波动方程。

设正弦电磁场在线性、均匀、各向同性媒质中传播,麦克斯韦方程组则可写成

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\varepsilon\mathbf{E} \quad (1.5-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (1.5-2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (1.5-3)$$

$$\varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (1.5-4)$$

取式(1.5-1)的旋度,得

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J} + j\omega\varepsilon \nabla \times \mathbf{E}$$

将式(1.5-2)和(1.5-3)代入上式,得

$$\nabla^2 \mathbf{H} + \omega^2 \mu \varepsilon \mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{J} \quad (1.5-5a)$$

或写成