高等学校教材

线性代数

第三版

武汉大学数学系

熊全淹　叶明训编

高等教育出版社

高等学校教材

线性代数

（第三版）

武汉大学数学系
熊全淹　叶明训　编

高等教育出版社

出版说明

本书是武汉大学数学系数学专业编《线性代数》(第二版)的修订本.

本书与第二版比较，增加了双线性式，对偶变换，正规算子等内容，删去了线性方程组的数值解法与代数方程论简介两个附录. 另外改进了一些证明与讲法，订正了一些错误，还补充和调整了例题与习题.

本书经两次修订后，已具备线性代数较完全的内容. 可供对线性代数要求较高的理工科各专业使用.

高等学校教材

线性代数

(第三版)

武汉大学数学系

熊全淹　叶明训 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

*

开本850×1168　1/32　印张13　字数310 000

1977年7月第1版　1980年3月第2版

1987年4月第3版　1987年4月第1次印刷

印数 00 001—14 040

书号 13010·01341　　定价 2.20 元

三版前言

这次改版主要是修改其中不妥处，删去不必要部分，再适当增加一些必要内容．修修补补涉及到各章各节，又是一次全面大修改。

写得不清楚的改写了，啰嗦的简化了，重复的删去了，错误的改正了，遗漏了的填补了．此外我们还适当增加一些必要例题及习题．改动大的地方有二处，1．在第四章增加一节双线性式，在§7.6中添了对偶变换，在第八章多了一节正规算子．2．将附录一、二删除，这不只是节省篇幅，主要是联系不大，不甚需要。

所有用小字排的内容主要是为学习时数较多、要求较高的读者准备的，对于一般学习时数少的读者，只能作为课外的补充资料，量力而行，这点务请读者注意。

二版的第七章、第八章内容似过简，很难满足较高要求．这次补充了一些比较重要的内容．本书经过这次修改后，已具备线性代数的主要内容，可供理工科要求较高的班之用，但有的地方写得生硬不够理想，距读者对我们的要求，还有一段很长的距离．希望多多提意见，谢谢读者的爱护。

编　者

1985年10月

再版前言

这次修改变动较大．为补以前不足，新添加了一章内积空间，另外还添加了正交矩阵的标准形，哈米尔顿-卡莱定理，最小多项式，同构及对偶空间等四节教材．此外，各章也增加了一些内容，增补了一些例题和习题．所有这些都是线性代数中重要内容．但为了不使初学者负担过重，这些内容大都是用小字排印的．学习时数不够时，所有小字排印的内容可以全部缓读或不读，与后面无甚影响．再为了说得清楚，把原第五章分成了两章，内容和顺序也有所调整．又把原第二章放在最后作为附录一，这部分内容与线性代数的联系不大，并且将来可以在计算方法中学习．

本书出版后，承读者不断提出宝贵意见，对我们这次修改帮助很大，谨在此表示谢忱．本书由熊全淹主编，叶明训参加编写．

编　者

1980年2月

第一版 前 言

本书是根据1972年以来武汉大学数学系的线性代数讲义修改而成. 内容是介绍线性代数的基础理论及基本演算方法，除欧氏空间因避免篇幅过长，我们不作系统介绍以外，其他线性代数的主要内容本书基本上都已具备. 线性方程组的数值解法是线性代数重要应用之一，本书在第二章也作了介绍.

因为本书是作为高等院校的基础数学教材，每章乃至每节都标明讨论的主要问题，说明问题从何而来，又往何处去. 力求叙述简明，推理详尽，便于读者自学. 我们还根据从具体到抽象的原则，把比较具体的线性方程组放在前面，抽象性较强的线性空间理论安排在最后，希望能减少初读者的一些困难.

在安排处理上，我们有下面一些作法与一般写法不同：

1. 有两个定义与一般写法不同，一个是第一章§1中行列式的定义，另一个是第六章§4中初等因子的定义. 我们认为这样做，定义本身已得到简化，而且前者可进一步简化行列式性质的证明，后者可以突出约旦标准形的主要定理，使内容主次分明.

2. 有些一般方法只用特殊例子来说明. 譬如在第三章§5中矩阵的标准形，第五章§1中二次齐式的标准形等都是如此. 当然这不是严格的证明，但我们认为只要在方法上没有原则的区别，假如对某些特殊的情况说明清楚了，一般的就可以同样推得. 这样既不会损害问题的一般性，又使叙述简明，读者便于掌握.

3. 个别证明复杂的定理，我们先提出定理，并且也引用这定理，但证明适当地推后. 譬如第一章§1中定理的证明放在这节末尾；第六章介绍约旦标准形时，把其中两个定理的复杂证明合为一节放在这章最后. 我们认为这样做可以减少复杂证明的干扰，较

早地看到主要内容.

此外,我们还把某些较困难的证明及例题用小字排,初读者如果学习确有困难,可以略去不看,这并不影响后面的学习;如果困难不大,我们仍希望全看或选看,这样可以得到一些启发,增强推理能力. 代数方程的主要内容列在附录1,习题答案作为附录2,供读者查核.

由于我们的思想认识、业务水平以及教学经验都很肤浅,书中缺点错误在所难免,希望广大读者批评指正.

编　者

1977年6月

目　　录

第一章 行 列 式

在生产实践和科学研究中，一些变量之间的关系可以直接地或近似地用比较简单的一次形式表示出来，这样用一次形式表示的关系就是线性关系，或者说线性函数，因此研究线性函数是非常重要的问题．线性代数是主要研究线性函数的一个数学分支．在线性代数中，线性方程组是一个基础部分，也是一个重要部分．研究线性方程组首先需要行列式这个重要工具．“数学是从人的需要中产生的”．行列式是人们从解线性方程组的需要中建立起来的．它在数学本身或在其他科学分支上，譬如物理学、力学等，都有广泛的应用．在这章主要讨论下面三个问题：

1．行列式概念的形成；

2．它的基本性质及计算方法；

3．利用行列式求解线性方程组．

这章分 4 节，第一节解答第 1 个问题；后二节解答第 2 个问题；最后一节解答第 3 个问题．

§ 1.1 行列式的概念

在中学代数中，我们已学过用二阶行列式解两个未知量的线性方程组，用三阶行列式解三个未知量的线性方程组．一般，n 个未知量的线性方程组是否也能这样求解？ n 阶行列式就是根据这个需要产生的．这节目的就是建立 n 阶行列式的概念，解答上面提出的第 1 个问题．

就人类认识运动的秩序说来，总是由认识个别的和特殊的事物，逐步地扩大到认识一般的事物．我们先从在中学代数中已经学过的用行列式求解线性方程组开始．

我们先来解两个未知量 x_1, x_2 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1}$$

这里 b_1, b_2 是**常数项**，a_{ij} 叫做 x_j 的**系数**，它有两个附标，第 1 个附标 i 表示它在第 i 个方程，第 2 个附标 j 表示它是第 j 个未知量的系数．譬如 a_{12} 就是第一个方程中 x_2 的系数．用消元法，消去 x_2 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2.$$

同样，消去 x_1 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

因此当 $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，我们有

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{2}$$

这就是说满足(1)的 x_1, x_2 就是(2)，或者说假如(1)有解，那末这解就一定只是(2)；把(2)代入(1)直接验证，得知(2)的确是(1)的解．所以这时(2)就是(1)的唯一解．

为了便于记忆，我们引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

叫做**二阶行列式**．它含有两行，两列．横写的叫做**行**，竖写的叫做**列**．行列式中数又叫做行列式的**元**，a_{12} 就是在第 1 行、第 2 列上的元．从上式我们得知，二阶行列式是这样两个项的代数和：一个是在从左上角到右下角的对角线(又叫做行列式的**主对角线**)上两元的乘积，取正号；另一个是在从右上角到左下角的对角线(又叫做行列式的**次对角线**)上两元的乘积，取负号．譬如

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times 5 - (-2) \times 3 = 11.$$

根据定义，我们容易得知，(2)式中两个分子可以分别写成

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

如果我们记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则方程组(1)的唯一解(2)就可以写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

象这样用行列式来表示解，形状简便，容易记忆。

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x+y=7, \\ x-3y=-2. \end{cases}$$

解 这时

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-7,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=-19,\ D_2=\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-11.$$

因此，所给方程组的唯一解是

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{-19}{-7}=\frac{19}{7},\quad y=\frac{D_2}{D}=\frac{-11}{-7}=\frac{11}{7}.$$

我们再来解三个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{3}$$

同上面一样，先从前两式消去 x_3，后两式消去 x_3，得到只含 x_1, x_2 的两个新线性方程；再从这两个新线性方程消去x_2，就得到

$$\begin{aligned} &(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\qquad -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1 \\ &=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32} \\ &\qquad -b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3. \end{aligned}$$

当 x_1 的系数

$$\begin{aligned} D=&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ &-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0 \end{aligned}$$

时，得出

$$\begin{aligned} x_1=&\frac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32} \\ &-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3). \end{aligned}$$

同样，我们可以求得

$$\begin{aligned} x_2=&\frac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3 \\ &-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}) \\ x_3=&\frac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32} \\ &-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}). \end{aligned} \tag{4}$$

所以，当$D\neq 0$ 时，如果(3)有解，就一定是上述唯一形式.

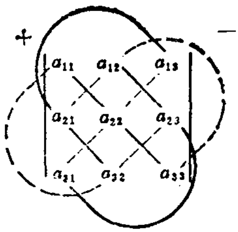
同前面一样，为了便于记忆，我们引进**三阶行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{5}$$

它含有三行、三列，是 6 个项的代数和．这 6 个项我们这样来记忆：在下图中，实线上三个元的乘积组成的三项都取正号，虚线上



三个元的乘积组成的三项都取负号．譬如三阶行列式

$$\begin{aligned}A=&\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ -4 & 3 & 1\\ 2 & 3 & 5\end{vmatrix}\\ &=2\times3\times5+1\times1\times2+2\times(-4)\times3-2\times3\times2\\ &\quad-1\times(-4)\times5-2\times3\times1\\ &=30+2-24-12+20-6=10.\end{aligned}$$

于是在上面 x_1,x_2,x_3 的表达式(4)中，分母都是行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},$$

而分子是把行列式 D 中第 1,2,3 列分别换成常数项列 b_1,b_2,b_3 得到的行列式 D_1,D_2,D_3，即

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},$$

$$D_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}.$$

因此(4)可以写成简单的表达式

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_3}{D}.$$

它的结构与前面两个未知量的类似.

例 2 解线性方程组

$$\begin{cases}2x-\ y+\ z=0,\\3x+2y-5z=1,\\\ x+3y-2z=4.\end{cases}$$

解 这时

$$D=\begin{vmatrix}2&-1&1\\3&2&-5\\1&3&-2\end{vmatrix}=28,\ D_1=\begin{vmatrix}0&-1&1\\1&2&-5\\4&3&-2\end{vmatrix}=13,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&0&1\\3&1&-5\\1&4&-2\end{vmatrix}=47,\ D_3=\begin{vmatrix}2&-1&0\\3&2&1\\1&3&4\end{vmatrix}=21.$$

因此

$$x=\frac{13}{28},\quad y=\frac{47}{28},\quad z=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}.$$

代入验证得知这就是所求的解.

有了二阶、三阶行列式,我们就可以把 $D\neq0$ 时方程组 (1)及方程组(3)的解很简单地表示出来. 我们在解 n 个未知量的线性方程组时,自然会想到它的解是否也能用 n 阶行列式来表达? 首先碰到的问题就是如何定义 n 阶行列式. 在前面,我们从两个未知量中消去一个非常容易,但从三个未知量中消去两个就很麻烦,至于一般象上面那样,从 n 个未知量中消去 $n-1$ 个简直是不可能的了. 因此,我们就不能用上面类似的方法来定义 n 阶行列式. 我们这样来解决这问题. 先详细研究二阶、三阶行列式的结构,找出它们的共同规律,根据这些规律来定义 n 阶行列式;然后用它来解 n 个未知量的线性方程组,看是否能达到我们预想的目的.

现在我们从三阶行列式开始，先研究(5)的结构：

1．首先我们看到，(5)中每项都是三个元的乘积，这三个元在行列式的不同的行，不同的列，即行列式中每行有一个，每列有一个，于是(5)的任意项可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$，这里 p_1, p_2, p_3 是1，2，3的一个排列.

2．(5)中每项都带有符号，不是正号便是负号，它们是根据什么规律确定的？我们知道在主对角线上三个元乘积的项 $a_{11}a_{22}a_{33}$ 是带正号，其他五项中三个元都不完全在主对角线上或都不在主对角线上．带负号的三项 $a_{11}a_{23}a_{32}$，$a_{12}a_{21}a_{33}$，$a_{13}a_{22}a_{31}$ 都只要互换行列式的两行或两列就可以把项中三个元都移到新行列式的主对角线上，譬如 $a_{11}a_{23}a_{32}$，只要把行列式的第 2 行与第 3 行互换，a_{11}，a_{23}，a_{32} 三个元就都移到新行列式的主对角线上．但对带正号的其他两项 $a_{12}a_{23}a_{31}$ 及 $a_{13}a_{21}a_{32}$ 却都需要两个互换，譬如 $a_{12}a_{23}a_{31}$ 先互换第 1、第 2 两行，再互换第 1、第 3 两列才行．这样我们就得到(5)中各项带符号的规律：用互换两行或互换两列的方法把乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 中三元都移到新行列式的主对角线上，当互换的个数是偶数时，$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 带正号，互换的个数是奇数时带负号.

3．因为1，2，3共有 $3!=6$ 个不同排列，所以(5)是 6 个项的代数和.

于是三阶行列式(5)可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}.$$

上面这些规律对二阶行列式显然也成立．假如把这些规律作为定义，那末二阶、三阶行列式的定义就统一了.

共性包含于个性之中．现在我们就根据这些规律定义 n 阶行列式如下：

假定有 n^2 个数 a_{ij}, $i, j=1,\cdots,n$，把它们排列成 n 行，n 列，记成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

叫做 **n 阶行列式**. a_{ij} 叫做第 i 行，第 j 列上的**数或元**. n 阶行列式是所有这些项的代数和：

1. 每项是 n 个元的乘积，这 n 个元在行列式中每行有一个，每列有一个，因此每项可以写成下面的一般形状

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中第 1 个附标是 $1,2,\cdots,n$，第 2 个附标 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列.

2. 每项带的符号这样来确定：逐次互换两行或两列，把一项中 n 个元都移到新行列式的主对角线上时，所需要互换的个数如果是偶数，这项带正号；如果是奇数，这项带负号.

根据后面习题 6 及定理，用这种方法可以决定项的符号，而且是唯一决定的*.

因为 n 个数字的所有排列共有 $n!$ 个，所以这样的项共有 $n!$ 个，这些项的代数和就是这行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

这里 $\sum$ 是对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 取和，而 $\pm$ 号就是按上面方法确定的.

* 项的符号很多书上都是用"逆序数"的奇偶性来决定的，这当然是非常清晰的．其实我们的说法与此是一致的．只不过说得简单些．我们认为引用行列式主要是用它的基本性质，用定义的时候很少，因此定义应该简化，减少读者不必要的麻烦.