非线性电路分析基础

谢长焱　王炳勋　编著

中南工业大学出版社

内 容 提 要

本书是阐述非线性电路理论的著作。书中保留了这一学科领域内的经典理论与研究方法，但着重讲述近年来国外知名学者在这一领域所取得的研究成果。全书由两部分组成。前半部分介绍了各类新型电子器件的统一分类方法及其基本性质和非线性电阻电路的基本分析方法；后半部分主要介绍非线性动态网络的分析、数值计算方法、稳定性分析以及近年来提出的弱非线性系统的Volterra级数分析法和非线性自治网络中自激振荡的HOPF分叉定理与应用。

本书是为研究生选修非线性电路理论而编写的教材，也可以作为高年级本科生选修课教材或参考书。同时还可供有关工程技术人员进修提高之用。

非线性电路分析基础

谢长焱 王炳勋 编著

责任编辑： 肖梓高

插图责任编辑：刘楷英

*

中南工业大学出版社出版发行

湘潭市东平印刷厂 印 装

湖南省新华书店经销

*

开本：787×1092/16 印张：14 字数：350 千字

1989年10月第1版 1989年10月第1次印刷

印数：0001—1500

ISBN 7-81020-257-X/TM·003

定价：2.35元

前言

近十年来，随着电子科学技术的飞速发展，特别是VLSI（超大规模集成电路）和电子计算机的日益发展与普及，使非线性电路的基本理论及其应用均达到相当高的水平，人们对于非线性电路这一学科分支的重要性的认识也更加深刻。近年来，以L·O·Chua（蔡少棠教授）为代表的非线性电路理论专家对非线性电路与系统的理论和应用的研究所获得的成果尤为突出。面对理论和技术的急剧变革，如何编写出一本好的非线性电路教材乃是一件十分有意义的事情，基于这一愿望，作者在占有大量历史的和现状的有关本学科文献资料的基础上编写而成此书。经过对内容的反复精选，大胆抛弃那些陈旧无用的东西，保留那些仍然富有生命力和具有代表意义的经典内容，并着重讲述近代在理论和方法方面所取得的成果。显而易见，对于经历了近两百年的非线性理论这一古老学科，若全面陈述其传统方法的各个方面是不经济也是不科学的。

本书的前半部分介绍了近二十年来，由于电子技术的迅猛发展而涌现的各类新型电子器件的统一分类方法及其基本性质；讨论了非线性电阻电路的基本分析方法，包括图解法、数值法、传统的分段线性法和L·O·Chua 1977年所提出的规范式分段线性法及1982年发表的寻求分段线性电路的所有解的一种方法。由于后者的发表，使非线性电阻电路的分析基本上得到统一的解决。对于1984年T·Nishi和L·O·Chua发表的关于含有受控源的非线性电阻电路解的唯一性的拓扑判据法也作了较详细的介绍。书的后半部分主要介绍非线性动态网络的分析、数值计算法、稳定性分析（李雅普诺夫方法）以及近年来提出的弱非线性系统的Volterra级数分析法和分析非线性自治网络中自激振荡的最有力的工具之一——HOPF分叉定理及其应用。

本书是为研究生选修非线性电路理论而编写的教材。但由于书中的内容是独立构成体系的，所以也可以作为高年级本科生选修课的教材，对于从事实际工作的工程技术人员也有参考价值。

本书在出版过程中，承蒙陈彩欣副教授大力帮助，在文稿的校阅及图形的复制方面做了不少的工作，谨表示由衷的谢意。

由于编者学识有限，又加之时间仓促，错误和不当之处在所难免，恳切希望读者不吝赐教，以便今后修改。

编者

1988年12月于中南工业大学

目录

第一章　电路元件及其分类

在传统的线性电路理论中，元件的种类很少（如电压源、电流源、R、L、C、M、理想变压器等），这些元件是为了当时物理器件造型的需要而建立的。从50年代起，半导体器件得到了广泛的应用，近年来各种新型的电子器件更是不断涌现，传统的电路理论和有限的几类基本元件已经不能应付，面对五花八门的新型电子器件（它们往往是多端的、非线性的），迫切需要有新的元件和新的理论，以对这些器件进行研究分析，掌握它们的性能，从而指导电路的设计与综合。本章将对电路元件及其分类进行讨论。

§1-1　器件、元件与器件造型

在传统的线性电路理论中，由于器件和元件之间的差别不显著，往往混为一谈，例如，电池（器件）和电压源（元件），一个碳膜电阻器（器件）和它的电阻值（元件）常常被相提并论而不至于引起麻烦。但是对于近代许多新型电子器件，由于具有强烈的非线性和高阶物理效应（例如趋肤效应、场的边缘效应、电导调制、非线性的扩散特性与渡越时间效应等），它们与其对应的元件就不能再混为一谈，而应加以严格区别，为此应给予确切的定义以及分析两者的差别与联系。

器件　具有两个或多个可对外进行电气联结的端子的物理实体，如干电池、碳膜电阻器、铁心线圈、二极管、三极管、集成电路块等。

元件　具有两个或多个端子的理想化模型，其端子上的物理量（如电压。电流）服从严格的数学规律。如电压源、电流源、电阻元件、电容元件、电感元件、各种理想受控源、理想变压器、回转器、理想二极管和各种高阶元件等。

器件造型　元件及其组合通常用来在一定条件下近似地模拟器件的电气性能，这就是所谓器件造型。

可见元件是一个满足一定数学规律的、在一定条件下近似地模拟器件电气性能的理想化模型，而绝不能与器件混为一谈。

为了对许多新型电子器件进行分析研究，首先必须定义一系列新的电路元件，使得它们搭配起来能合理地近似模拟各种器件。目前，在诸如功率电子电路、微波电路和超大规模集成电路（VLSI）的机辅设计(CAD)中，器件造型差不多是最薄弱和缺乏成熟理论的一环。电路设计者普遍缺乏对于器件造型的基本概念的了解。在分析一种新型器件时，往往只注意它的直流V-I曲线、习惯于用V-I曲线来唯一地表征器件，这种

危险的倾向，往往会导致错误的结论。另一种倾向是习惯于用R、L、C元件的组合来为新出现的器件造型。而事实上，现代电子器件所具有的非线性和高阶物理效应通常都不能仅由R、L、C之类的电路元件的简单组合而得到。

§1-2 电路元件的基本概念及分类

一、器件的容许信号偶及其赋定关系

用来表征器件电气性能的基本物理量有四个：电压u、电流i、磁链φ和电荷q。它们之间是两两动态相关的，即$u=\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$，$i=\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$。由于$u$、$i$比$\varphi$、$q$易于测量，所以我们通常采用$u$和$i$作为测量信号。图1-1所示为测量二端器件$D$的$u$与$i$的电路图，$u$与$i$的参考方向一致。也可用示波器代替电流表与电压表。在一定的激励下，在某一确定时刻t，合上开关s，并从t_0开始记录$u(t)$和$i(t)$的波形，这样测量和记录下的信号对（$u(t)$和$i(t)$和$t\geqslant t_0$）称为器件的一组允许电压-电流信号偶，简称容许信号偶。对所有可能的激励源和所有时间t_0（$-\infty<t_0<\infty$），重复上述的假想试验，并用$F(D)$表示所有的容许信号偶的集合，则$F(D)$完全表征了该器件的电气性能，我们称$F(D)$为器件的赋定关系。

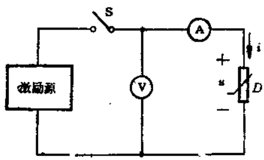


图 1-1

例1 若D表示一个短路，则$F(D)=[u(t),\ i(t):\ u(t)\equiv 0,\ i(t)=$任何单值时间函数]。

在此例中，任何不恒等于零的电压信号$u(t)$都不属于容许信号，任何电流信号$i(t)$都属于容许信号。如果给定了容许电压信号$u(t)=0$，可以找到无限多对应的容许电流信号。如果给定了某一容许电流信号$i(t)$，只能找到唯一的容许电压信号$u(t)\equiv 0$。

例2 零口器（Nullator，又称全零器）的赋定关系$F(D)$。

零口器是一个二端元件，它同时是开路和短路的，其赋定关系：

$$F(D)=[(u(t),\ i(t):u(t)\equiv 0,\ i(t)\equiv 0]$$

的“伏安特性”只是u-i平面上的一个点——原点。其电路符号如图1-2所示。

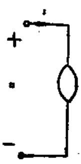


图1-2 零口器

图1-3 非口器

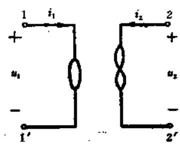


图1-4 零器元件

例3 非口器（Norator，又称无定器）的赋定关系$F(D)$。

非口器是一个二端元件，其两端电压和电流均是任意值（在电路中其值的大小应满足KCL与KVL），其赋定关系：

$$F(D)=[(u(t),\ i(t):u(t),\ i(t)=\text{任何单值时间函数}]$$

它的伏-安特性遍及整个u-i平面，其电路符号如图1-3所示。

例4 零器（Nullor，又称全零-无定器）的$F(D)$。

零器元件是由一个零口器和一个非口器组成的二端口网路元件，其电路符号如图1-4所示，其赋定关系为：

$$F(D)=[(u_1(t),\ i_1(t);\ u_2(t),\ i_2(t):u_1(t)\equiv 0,\ i_1(t)\equiv 0;$$
$$u_2(t),\ i_2(t)=\text{任何单值时间函数}]$$

顺便指出：一个运算放大器（器件）的理想化模型可由一个零器元件表示。

根据上面的定义，若要知道一个物理器件的赋定关系$F(D)$，必须进行无限多次的实验，当然这是不可能的。上述的试验只是假想的。实际上，无法进行和记录无限多次的试验。但是，对一个经过抽象化处理而得到的理想模型（即电路元件），它的赋定关系往往可以用一条曲线，一个或一组方程，或一种规定的算法来表达。事实上，这也是用来区别不同种类元件的依据。所谓"元件"，可定义为具有给定赋定关系的理想器件，一个物理器件往往可以由一个或数个元件来造型。一个复杂的元件也往往可由几个简单的元件组合而成，在这种意义下，可以把它们区分为基本元件和派生元件。

下面从元件的赋定关系出发阐述电路元件的一些基本概念并对其进行分类。

二、集中参数元件和分布参数元件

对一个n端元件ε，当且仅当其赋定关系可以表示为有限个方程、且这些方程仅含对于变量$(u,\ i)$和有限个内部变量（$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$）的即时值的代数、常微分和积分运算时，则称ε为集中参数元件，简称集中元件。更简单地说，如果描述元件特性的变量i、u、q、φ仅仅是时间t的函数，而不是位置x的函数，则该元件就是集中参数元件。对于一个二端元件来说，可以给出最直观的定义如下：如果在任意时刻流入元件的电流等于流出元件的电流，则该元件就是集中参数二端元件，一个网络元件不是集中参数的就是分布参数的。

根据定义，一个二端集中元件的赋定关系可以表达为：

$$f_j(u,\ i;\ u^{(1)},\ \cdots,\ u^{(\alpha)};\ i^{(1)},\ \cdots,\ i^{(\beta)};\ u^{(-1)},\ \cdots,\ u^{(-\gamma)};$$
$$i^{(-1)},\ \cdots,\ i^{(-\delta)};\ x_1^{(K_1)},\ \cdots,\ x_n^{(K_n)};\ t)=0$$
$$(j=1,\ 2,\ 3\text{等有限正整数}) \tag{1-1}$$

式（1-1）中的α，β，γ，δ为任意非负整数，K_1，K_2，…，K_n为任意整数。记法$x^{(\alpha)}$表示对x求导α次（当$\alpha>0$），或是对x求α次积分（当$\alpha<0$）。

即
$$x^{(0)}(t)=x(t)$$
$$x^{(1)}(t)=\frac{dx}{dt}$$

$$x^{(2)}(t)=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\vdots$$

$$x^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t_0}x(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{t_0}^{t}x(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=x^{(-1)}(t_0)+\int_{t_0}^{t}x(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$x^{(-2)}(t)=\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\tau_2}x(\tau_1)\ \mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2$$

$$=x^{(-2)}(t_0)+x^{(-1)}(t_0)\cdot(t-t_0)+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau_2}x(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1\cdot\mathrm{d}\tau_2$$

$$x^{(-3)}(t)=\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\tau_3}\int_{-\infty}^{\tau_2}x(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1\cdot\mathrm{d}\tau_2\cdot\mathrm{d}\tau_3$$

$$=x^{(-3)}(t_0)+x^{(-2)}(t_0)\cdot(t-t_0)+x^{(-1)}(t_0)\cdot\frac{(t-t_0)^2}{2}$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau_3}\int_{t_0}^{\tau_2}x(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1\cdot\mathrm{d}\tau_2\cdot\mathrm{d}\tau_3$$

$$\vdots$$

通常取各初始条件为零。

由上面的阐述可见，元件的“赋定关系”的含义要比“伏安特性”的含义广泛得多。伏安特性一般是指 u-i 平面上的一条曲线，而赋定关系 $F(D)$是指表示所有容许信号偶的集合。只有当这个集合可用u-i平面上的一条曲线描述时，赋定关系才是伏安特性。

例5 线性电阻、电感、电容。

表示它们赋定关系的方程分别为：

$u=iR$，　　$u=L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$，　　$i=C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$，据定义，显然它们是集中元件(线性)。

例6 表示元件赋定关系的方程为：

$$f\left(u,\ i,\ \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2},\ \frac{\mathrm{d}^3i}{\mathrm{d}t^3},\ \int_{-\infty}^{t}i(\tau)\mathrm{d}\tau,\ \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\tau_2}u(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2\right)=0$$

则定义该元件是集中参数元件。

例7 表示传输线赋定关系的方程为：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=-Ri-L\frac{\partial i}{\partial t}\\ \frac{\partial i}{\partial x}&=-Gu-C\frac{\partial u}{\partial t}\end{aligned}\right\}$$

因为它的赋定关系中包含偏微分运算，故由定义，它不属于集中参数元件，而属于分布参数元件。

例8 延时元件：　$u(t)=Ri(t-1)$

为分布参数元件。因为 $i(t-1)$ 包含了延时因子，不符合定义中关于 u与i 的即时值关系。

目前，人们对于分布参数元件的研究和了解远比集中元件为少，在给器件造型时通常也是尽可能采用集中元件。因此本书只讨论集中元件。

三、时变元件与时恒元件

当且仅当元件ε的赋定关系（1-1）式$f_i(\cdot)$中不含时间变量t，则ε称为时恒元件，或称为时不变元件。否则称为时变元件。

例9 当赋定关系为：$u=2ti$，则表示时变元件。若无特殊声明，本书中讨论的元件均属时恒元件。

四、线性元件和非线性元件

当且仅当元件ε的赋定关系（1-1）式中的$f_i(\cdot)$都是对于各变量的线性函数，则ε称为线性元件。否则ε称为非线性元件。

在例5中，u与i都是线性关系，故它们均是线性元件。

例10 滞回电感[1]，[2]

$$u=g[i-f(\int_{-\infty}^{t}u(\tau)\mathrm{d}\tau)]，\text{是非线性集中元件。}$$

§1-3 基本二端代数元件

从以上描述元件赋定关系的方程$f_i(\cdot)$中的变量的相互关系将元件分成了集中参数元件与分布参数元件、时变与时恒元件、线性与非线性元件。另外从近代电路理论的观点来看，可以把集中参数电路元件分为两种类型：代数元件和动态元件。

首先局限于二端元件：

前已述及，电路的基本变量有四个：电压u、电流i、电荷q和磁链φ。由于u和φ，i和q是动态相关的。即：

$$u=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \quad 和 \quad i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

因此在（u、i、q、φ）四个基本变量中，任取一对动态无关的变量，对应地就定义了一族基本元件。即凡赋定关系为代数方程

$$f_R(u,\ i)=0$$

的元件，称为二端电阻器。

类似地，　$f_C(u,\ q)=0$　定义了二端电容器；

　　　　　$f_L(\varphi,\ i)=0$　定义了二端电感器；

　　　　　$f_M(\varphi,\ q)=0$　定义的元件称为忆阻器（下面将详述）。

因此，对于基本二端代数元件给出如下定义：

赋定关系为　$f(\xi,\ \eta,\ t)=0$　（1-2）

的元件，称为基本二端代数元件。这里，$f(\cdot)$为代数函数，ξ为u或φ，η为i或q。当式(1-2）中不出现t时则为时恒或时不变元件。图（1-5）中表示了基本代数元件的定义示意图。

例2中的零口器的赋定关系为：$u=0$，$i=0$，据定义，它属于二端电阻器。

例 3 中的非零器 的赋定关系为

$u=\rho_1;\quad i=\rho_2;$

$\rho_1,\ \rho_2\in(-\infty,\infty)$。

应属于二端电阻器。

例11 Josephson unction)约瑟夫逊结，1973年获诺贝尔奖金）其赋定关系为：

$i=I_0\sin K_0\varphi$ 属于二端电感器(图1-6)。

例12 变容二极管（Varactor Diode）。

其赋定关系如图1-7 所示。显然属于二端电 容元件。

下面来讨论其赋定关系为$f_M)\varphi,q)=0$的忆阻器（Memristor）。最初是由蔡少棠教授在1971年提 出的[3]，有关忆阻器的物理解释如下。

在图 1-8 中的元件：

$$u(t)=\frac{d\varphi}{dt}=\frac{df(q)}{dt}$$

$$=\frac{df(q)}{dq}\cdot\frac{dq}{dt}$$

$$=m(q)\cdot i(t)$$

故写成 $u(t)=M(q)\cdot i(t)$

式中 $M(q)$称为忆阻（Memristance），其单位为“欧姆”，与电阻同。故可把忆阻器解释成一种电荷控制型的受控电阻。显然，$u(t)$依赖于$i(t)$过去的历史，正 因为如此，称它为忆阻器。

在线性元件中，因为$\frac{d\varphi}{dq}=\frac{udt}{idt}=M=R=$常数， 所以线性忆

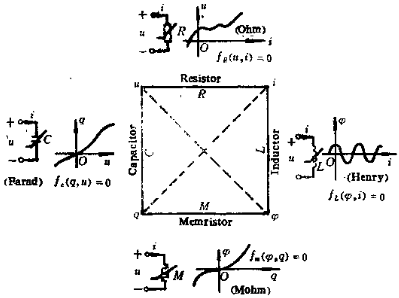
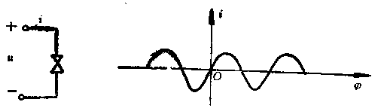


图1-5 **基本代数元件的定义示意图**

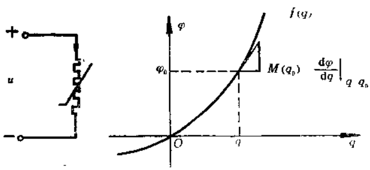


(a) 电路符号　　(b) 赋定关系曲线

图1-6 Josephson Junction（**约瑟夫逊结**）

(a)，电路符号　　(b) 赋定关系曲线

图1-7 Varactor Diode（**变容二极管**）



(a) 电路符号　　(b) 忆阻器的物理解释

图1-8 **忆 阻 器** （Memristor）

阻器与线性电阻器是相同的元件。可能也正是由于在线性情况下忆阻器与电阻器并无区别，所以在过去以线性电路为主要研究对象的长久年代中，忆阻器一直被忽视了，现在忆阻器已在电路理论工作者中得到了广泛的承认和重视。

作为忆阻器的实例之一就是库伦电池[4]，它实际上是一个电荷控制的电阻，也就是说，是一个忆阻器。

§1-4* 高阶二端代数元件

赋定关系为代数方程：

$$f(u^{(\alpha)},\ i^{(\beta)})=0$$

的元件称为$u^{(\alpha)}-i^{(\beta)}$二端代数元件。其电路符号如图1-9所示。其中α和β称为端口指数。

例13 赋定关系为$f(u^{(3)}, i^{(-4)})=0$的元件属于$u^{(3)}-i^{(-4)}$高阶代数元件。

例14 赋定关系为$f(u^{(2)}, u^{(4)}, i^{(-3)})=0$的元件，据定义不属于高阶代数元件，因为它的赋定关系中既包含$u^{(2)}$，又含$u^{(4)}$。这一元件将被划为动态元件（详见§1-7）。

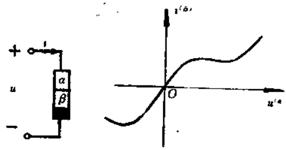


图1-9 **二端代数元件**

高阶元件不仅是理论上的元件，而且在实际中已得到应用。例如有源电路中的频变负阻（FDNR）元件，已在电话工业中得到应用。表1-1列出了两类元件[5]。

表1-1 **有 源 EDNR 二 端 元 件**

元件名称	符 号	元件分类	赋定关系	阻 抗
FDNR D元件	i + u −	$u^{(2)}-i^{(0)}$ 元件	$i(t)=D\dfrac{d^2u(t)}{dt^2}$	$Z(j\omega)=-\dfrac{1}{\omega^2 D}$
FDNR E元件	i + u −	$u^{(0)}-i^{(2)}$ 元件	$u(t)=E\dfrac{d^2i(t)}{dt^2}$	$Z(j\omega)=-\omega^2 E$

运用元件的这种分类方法，可把常见元件用$\alpha-\beta$平面上的一个点来表示，如图1-10所示。

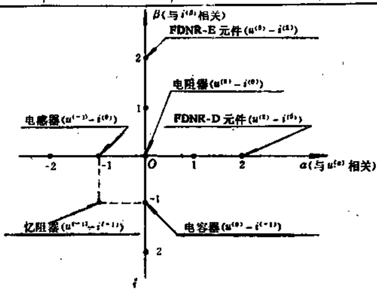


图1-10 **常见元件的分布图**

§1-5　高阶二端代数元件的小信号阻抗与应用

一、高阶元件的小讯号阻抗

考虑一个$u^{(\alpha)}—i^{(i\beta)}$高阶代数元件在工作点$Q$（图1-11）附近小信号作用下，有

$$\delta u^{(\alpha)}=m_Q\delta i^{(\beta)}$$

其中m_Q为$u^{(\alpha)}=f(^{(\beta)})$曲线在$Q$点切线的斜率。

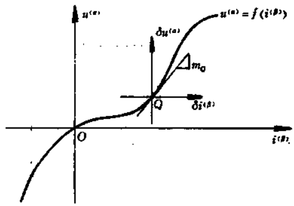


图1-11

对上式作拉氏变换：

$$L[\delta u^{(\alpha)}]=L[m_Q\delta i^{(\beta)}]$$

$$L[\delta u(t)]=m_Q\cdot S^{(\beta-\alpha)}\cdot L[\delta i(t)]$$

$$=Z(s)\cdot L[\delta i(t)]$$

对于正弦信号，Q 点的小信号阻抗

$$Z(j\omega)=(j\omega)^{\beta-\alpha}\cdot m_Q$$

下面分三种情况讨论频变阻抗$Z(i\omega)$与ω的关系：

(1) 频变电阻$R(\omega)$。

当　$\beta-\alpha=\pm 2n$，$n=0,1,2,\cdots$　时，

则　$Z(j\omega)=(-1)^n\cdot\omega^{\beta-\alpha}\cdot m_Q=R(\omega)$

(2) 频变电感 $L(\omega)$。

当　$\beta-\alpha=(-1)^n(2n+1)$，$n=0,1,2,\cdots$

则　$Z(j\omega)=j\omega^{\beta-\alpha}\cdot m_Q=j\omega L(\omega)$

其中　$L(\omega)=m_Q\omega^{\beta-\alpha-1}$（当$m_Q>O$）

(3) 频变电容　$C(\omega)=m_Q^{-1}\omega^{-\beta+\alpha-1}$

当　$\beta-\alpha=(-1)^{n+1}\cdot(2n+1)$，$n=0,1,2,\cdots$

则　$Z(j\omega)=-j\omega^{\beta-\alpha}\cdot m_Q=\dfrac{1}{j\omega C(\omega)}$

其中　$C(\omega)=m_Q^{-1}\cdot\omega^{-\beta+\alpha-1}$（当$m_Q>0$）

图1-12给出了高阶元件的分布示意图，在同一条45°线上各高阶元件的小信号模型具有相同的性质（指电阻性、电感性和电容性）。

二、高阶元件的应用

高阶元件在理论上的应用尚有待开发，今以线性高阶元件为例举出其两方面的应用：频变元件的综合和元件造型的需要——克服死点。

所谓线性高阶元件，其赋定关系为：

$$u^{(\alpha)}=mi^{(\beta)}$$

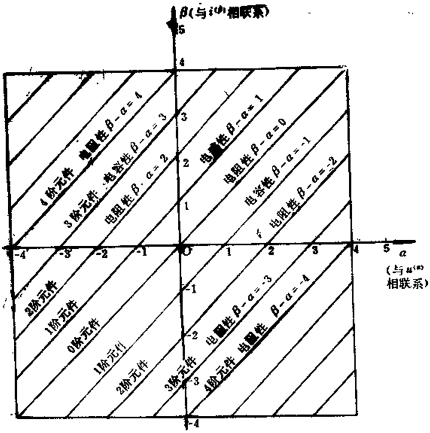


图1-12 **高阶元件的分布示意图**

它与元件
$$u=m\frac{d^{(\beta-\alpha)}i}{dt^{(\beta-\alpha)}}\qquad(\beta-\alpha>0)$$

或元件
$$i=\frac{1}{m}\frac{d^{(\alpha-\beta)}u}{dt^{(\alpha-\beta)}}\qquad(\alpha-\beta>0)$$

是等效的。对于线性电路，引入对应于二条轴上各点的各类高阶元件已足够。

1．频变元件的综合　给定复阻抗$Z(j\omega)=R(\omega)+jX(\omega)$，能否以及如何用线性元件来进行 综合？这是线性电路理论中的一个基本问题。当可用的基本积木块限于R、L、C时，并非所 有复变函数 $Z(\cdot)$ 都可以得到实现。只有$Z(\cdot)$为有理正实函数时才能实现二端阻抗。对于$R(\cdot)$和$X(\cdot)$来说，它们除了分别应为偶函数和奇函数之外，互相之间还有一定的约束。但在引入线性高阶元件之后，可以解除这种约束。下面来证明这点。

假设任意给定阻抗函数$Z(j\omega)=R(\omega)+jX(\omega)$，其中$R$为偶函数，$X$为奇函数，都是连续函数，试用图1-13的电路来实现它。该电路阻抗为：

$$\begin{aligned}Z(j\omega)&=r-m_2\omega^2+m_4\omega^4+\cdots+(-1)^l m_{2l}\omega^{2l}\\&\quad+j\omega(L-m_3\omega^2+m_5\omega^4+\cdots+(-1)^n m_{2n+1}\omega^{2n})\\&=P(\omega)+jQ(\omega)\end{aligned}$$

显然，$P(\omega)$是偶函数，$Q(\omega)$为奇函数。当给定的$R(\cdot)$和$X(\cdot)$为连续函数时，据Weierstrass的多项式逼近定理，只要选取足够高的阶数l和n，总可以使$P(\cdot)$和$Q(\cdot)$任意精确地逼近$R(\cdot)$和$X(\cdot)$。

事实上，已经证明了下述的“二端阻抗定理”，并给出了一种标准的实现方法。

二端阻抗实现定理 任意的复值函数 $Z(j\omega)=R(\omega)+jX(\omega)$，当$R(\omega)$为连续偶函数，$X(\omega)$为连续奇函数时，总可以用线性高阶元件实现为一个二端元件的阻抗。

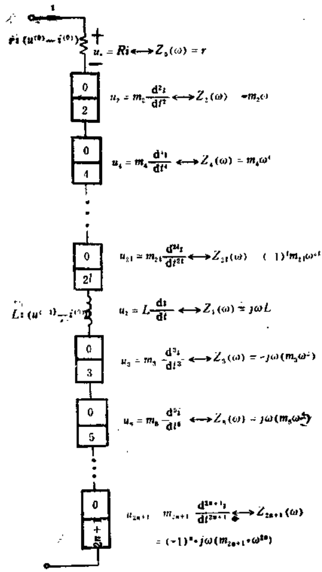


图1-13 **任意频变阻抗的实现**

对于二端导纳，可以证明类似的定理，并找到对应的实现方法（留作练习）。

2. 元件造型的需要——克服死点 首先通过一个例子来说明为什么会出现死点以及如何克服死点。

例15 把一个$L=1$H的线性电感与一个压控非线性电阻元件联接成图1-14所示电路。

$$i_R=f(u_R)=-u_R+\frac{1}{3}u_R{}^3$$

据KVL，列出电压方程：

$$u_R=-L\frac{di_R}{dt}\Rightarrow\frac{di_R}{dt}\quad\begin{cases}<0, & 当u_R>0\\ >0, & 当u_R<0\end{cases}$$

因此，无论给定的初始条件如何，方程的解都将在有限时间内达到Q_1点或Q_2点。而在此以后，方程的解不再存在，则称Q_1和Q_2为死点。

当有死点存时，状态方程便列写不出。在此例中，只能写出：

$$\frac{di_R}{dt}=-\frac{u_R}{L},$$

但 $u_R=f^{-1}(i_R)=f^{-1}(-i_L)$ 是i_L的多值函数，因此这不是状态方程。

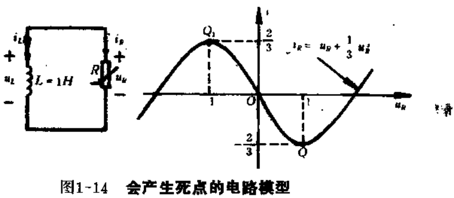


图1-14 **会产生死点的电路模型**

为什么会出现死点？如何克服死点引起的困难呢？

死点的存在通常是由于模型造型不当引起的。任何真实的物理系统在所有时间都有解存在。如果构造的模型只对一段时间有解而对其它时间无解，显然，所用的模型就不能正确地模拟所要研究的物理系统。

对上例来说，克服死点的简单方法是加入一个电容量很小（例如微微法级）的寄生电容

（图1-15）。

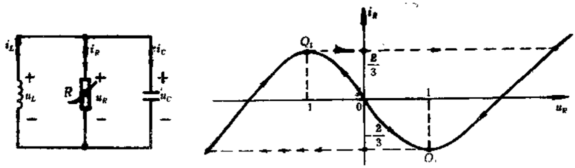


图1-15　**修正后的电路消除了死点**

此时，可列出状态方程：

$$\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=\frac{u_C}{L}$$

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{c}[i_L+f(u_C)]$$

这组方程对任意t都有解，因而不存在死点，这组方程的动力学路线如图 1-15 所示。此电路构成一个驰张振荡器。

经过分析，可得如下结论：一个$u^{(0)}-i^{(n)}$的线性元件与一个$u^{(0)}-i^{(n-1)}$的压控非线性元件相联接（图1-16），当非线性特性为非单调，因而反函数不存在时，就会出现死点。消除死点的最简单方法是接入一个线性$u^{(0)}-i^{(n-2)}$寄生元件，如图1-17所示。

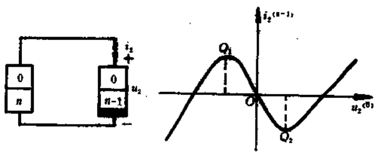


图1-16　**会引起死点的电路**

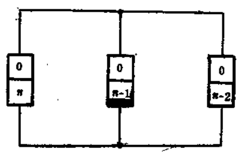


图1-17　**消除死点的方法**

对偶地，当一个$u^{(n)}-i^{(0)}$线性元件与一个$u^{(n-1)}-i^{(0)}$流控非线性元件相联接成图1-18所示电路时，若非线性特性为非单调，因而反函数不再存在时，又会产生死点。消除死点

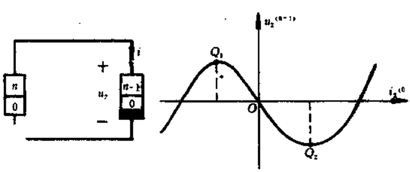


图1-18　**另一种引起死点的电路**

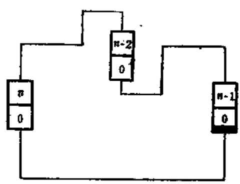


图1-19　**消除死点的方法**