结构力学的有限元法

C.T.F.鲁斯 著

吴德心 谢仁物
严京敏 安里千 译

人民交通出版社

Jiegoulixue de Youxianyuanfa

结构力学的有限元法

C.T.F. 鲁 斯 著

吴德心 谢仁物
严京敏 安里千 译

人 民 交 通 出 版 社

Finite element methods in structural mechanics
C.T.F.ROSS
Ellis Horwood Limited 1985

结构力学的有限元法
C.T.F.鲁 斯 著
吴德心 谢仁物 严京敏 安里千译
插图设计：高静芳 正文设计：周 元 责任校对：张建设
人民交通出版社出版发行
（北京和平里东街10号）
各 地 新 华 书 店 经 销
人民交通出版社印刷厂印刷
开本：850×1168 1/32 印张：10.75 字数：279千
1991年1月 第1版
1991年1月 第1版 第1次印刷
印数：0001—3000册 定价：7.20元
ISBN7-114-00960-7

TU·00013

作者序言

有限元教学，到目前为止基本上是针对研究生的，但随着计算机技术的发展，有限元现在也成为许多工科院校大学生的课程。

因此，该书是针对高年级大学生、研究生和工程师编写的。其目的是弥补许多传统的《材料力学》教科书与目前已经为研究生编好的《有限元法》课本之间的差距。该书是按著者在过去12年中给学生讲授的科目顺序编排的。

虽然许多年青的读者可能已经学过一些矩阵代数，但试图将其应用于结构力学之前，必须彻底地掌握它，因此将矩阵代数编为第一章。本章的重要性在于，它是由专门研究该课题的工程师，而不是由普通的数学家编写的，后者也许只把它作为数学的另一分支来处理。因此，本章缺乏数学的严密性，为此鼓励读者作为一种工程工具去使用矩阵代数。

第二章包括能量和刚度的基本概念，并介绍矩阵位移法。

第三章推导杆的单元刚度矩阵，并将其应用于铰接平面桁架和铰接空间桁架。

第四章推导梁的角位移方程，阐述如何用这些方程求梁和柱的刚度矩阵。并将其应用于具有复杂荷载体系的梁、平面刚架和空间刚架。

第五章介绍有限元法，推导一维和二维单元的单元刚度矩阵。二维单元包括平面板单元、非平面板单元和壳单元。还研究热应力问题。

第六章是引用第五章的有限元法去研究平面等参数四边形元。利用这些单元，通过微型计算机分析平面应力和平面应变问题。

第七章进一步推广第五章的有限元法去求解振动问题，导出一维和二维单元及“壳”单元的单元质量矩阵，给出梁、平面刚架、板和壳自由振动的算例。这一章还介绍了面积坐标。

第八章研究交叉梁系单元的刚度矩阵和质量矩阵，并借助于计算机将其应用于若干交叉梁系。

第九章推广第五章和第七章的理论，去研究一维和二维单元的几何刚度矩阵，并将其应用于几何和材料的非线性及非线性结构力学等问题中。

本书大部分章节有手算和电算的算例，而在大部分章节的最末“实例”栏内，给读者留有习题，以便训练新近获得的技巧。

计算机程序

本书中介绍的若干计算机程序的磁带(磁盘)适用于许多微型计算机。

这些计算机程序可以从下列单位买到：

Ellis Horwood Limited, Publishers
Department M
Market Cross House
Cooper Street
Chichester
West Sussex PO19 1EB
ENGLAND

内 容 提 要

本书对结构力学的有限元法的基本理论和应用作了系统论述。介绍了矩阵代数，结构基本概念及能量原理等基础知识；详细地阐述了有限元法的基本内容、方法及计算机程序；介绍了有限元在平面应力和平面应变、壳体、自由振动、交叉梁及非线性结构力学等问题中的应用。书中附有一定数量的例题和习题。

本书1、2、7章由严京敏翻译，3、4、8、9章由谢仁物翻译，5、6章及后记由安里千翻译，其余部分的翻译和全书的审校由吴德心担任。

目　录

前　　言

由于需要更轻型的飞机结构，在40年代末和50年代初，结构分析的矩阵方法首先引起了人们的关注〔1～3〕。

但是，当时主要的问题是运算能力不足（或完全缺乏），因为1947年以前，本身有存储器的高速数字计算机尚未发明。事实上，直到1951年商业上通用的第一台计算机才问世，这种计算机叫做ENIAC，根据威廉斯(Willis)〔4〕提供的资料，它的重约30t、需要110m^3的机房、消耗功率约140kW；此外，为防止机器过热，每天需要几吨冰去冷却它，按如今的价格，它的购置费用为几百万美元！

显然，那个时期结构力学矩阵方法的进展是相当缓慢的，主要因为运算能力不足。实际上，当时台式电动计算机的许多机组的操作人员，经常得花上几天时间进行小容量矩阵的求逆。

在1956年，特纳(Turner)等〔5〕创造了有限元，结构力学的数值方法有了重大突破。特纳等指出，复杂的平面板问题可用三角形有限元表示，每个三角形元以三个角节点描述。

60年代期间，在计算机技术和更复杂的有限元研究两方面有了较大的进展〔6～11〕。

1965年，梅隆什(Molosh)〔12〕实现了用变分法将有限元法引伸到场问题中。这篇论文是一项重要的贡献，使有限元法得以更加广泛的应用，而辛格维奇(Zienkiewicz)〔13〕将它应用于大量的定态和瞬态场问题中。

大约同一时期，其他的研究者认识了科伦特(Courant)〔14〕于1943年提出的一种相似的概念。科伦特采用了有限差分法。

在20世纪60年代初期，发明了集成电路，1970年因特尔(Intel)发明了第一台微信息处理机。之后，计算机运算能力可

达到的程度以惊人的速度提高，这就加速了有限元法的应用和发展。

如今，计算机的运算能力大得多，更加可靠得多，费用也相当低，而且由于大部分技术行业均可使用计算机，应用数值方法的现象更为普遍。微型计算机也可用于有限元分析，由于微型计算机具有强大的生命力，很有可能它将在技术科学使用尖端方法中引起一场技术革命。

著者深信，80年代微型计算机的影响将引起技术科学教学的革命〔17〕。如果问题是平凡的、且封闭的明显解存在，那么工程师最好采用较简单的解，尽管如此，凡是有必要时，数值解将取代封闭解。

有限元法需要计算机，因为没有计算机，有限元法好似试图开动一辆无发动机的汽车。

总之，有限元法对于求解在复杂图形域上具有边界条件的微分方程，是特别有用的。因此该方法是以许多较简单形状的有限元来表示整个区域，如图0.1所示。这些有限单元用节点描述，每个单元的节点数愈多，单元愈复杂。

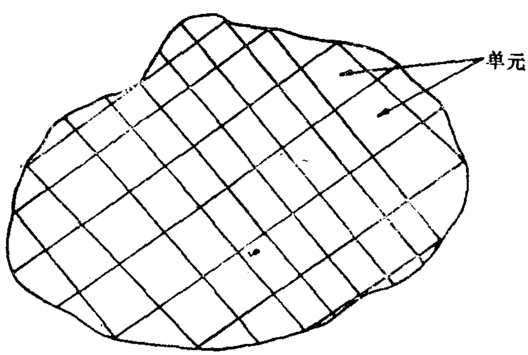

图0.1　有限单元表示的区域

通过假定有限单元预期函数的近似变分，并考虑单元边界条件，对于某一特殊单元来说，可以求得该函数以其节点值表示

的近似值。然后，考虑所有单元间边界条件的平衡（或协调），加上已知的边界条件，将得到一组联立方程。

联立方程有的是齐次的，有的是非齐次的，但通常方程的解将给出未知函数的节点值以及其他数据。

有时函数的节点值系全部为所求的，如温度或者测压计压力水头，但有的时候，如在结构分析中，函数可能是广义位移的形式，因此，通常必需建立广义位移与广义力、广义应力等关系式。

广义位移有各种形式，包括平移和扭转，而这些位移与广义力相对应，例如，平移和扭转分别对应于线性力和力矩。

合适的有限元法的实践

选择某一单元时，一般必须保证其理论的预测值收敛于网格的加密。

一种方法是选择一个有已知结果的简单问题，而后通过画出有限元预估值对节点数的关系曲线来检验该有限元，如图0.2所示。

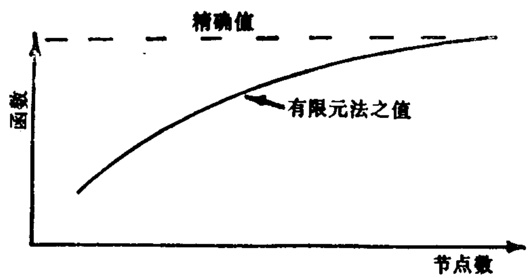

图0.2 收敛元

图0.2示出某一收敛元的结果，但是，假如可能的话，结果为图0.3所示的非收敛元，应予避免。

另一种单元，增加其节点数，结果仅局部收敛，如图0.4所示，使用这种单元应小心谨慎。

单元收敛特性的另一种适用的检查法，是艾恩斯(Irons)提

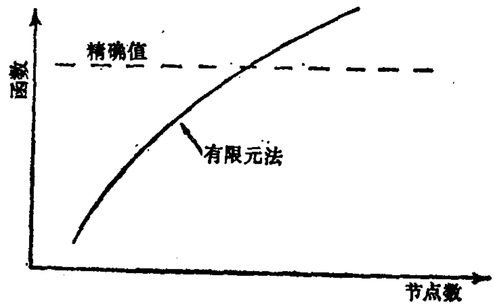

图0.3　非收敛元

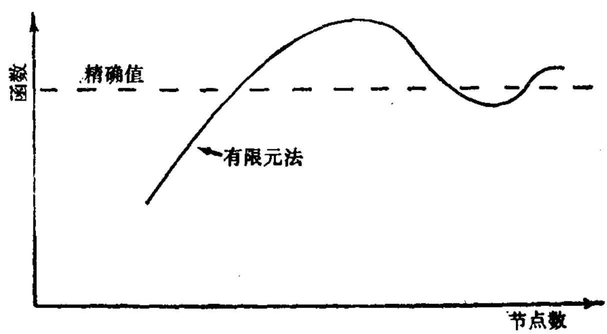

图0.4　局部收敛元

出的‘分片’检验(‘patch’test)〔18, 19〕。

即使单元是收敛的，也务必避免将非常刚性的单元与非常脆弱的单元相接，如图0.5所示。当图0.5中所示的结构杆件出现时，最好选择如图0.6所示的网格，以减小两个相邻单元间刚度的变差，这种选择往往能改善数值的稳定性。

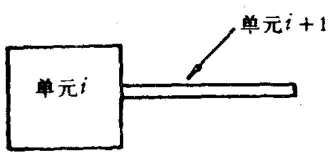

图0.5　不宜选择的单元

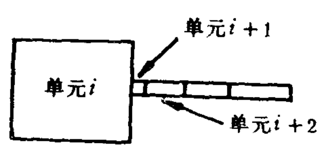

图0.6　较宜选用的单元

数值不稳定性，是工程师必须继续注意的问题。除了由于非常刚性的单元与非常柔性的单元相连接而出现数值不稳定性外，若选用某一不良形状的单元（如图0.7所示）也会出现数值不稳定性。理想的三角形单元应该是等边三角形，同时，在任何情况下，两个相邻边的最小夹角不应小于30°。

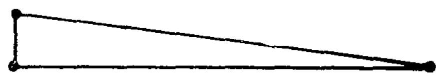

图0.7　不良形状的三角形单元

另外一些不良形状的单元，是指那些可能出现的形状复杂的单元，如图0.8所示。这些单元中，箭头所指的点，单元形状呈突变。

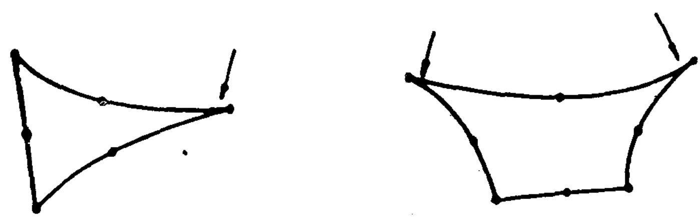

图0.8　不良形状的单元

不良形状的单元，常使刚度矩阵的主对角线出现负值，实际上这些数值往往应为正值。

伴随有限元出现的其他数值问题，是所采用的解题方法和求解方程的数目。这两个问题的任何一个，都有可能引起超越计算机的数值精度，许多情况下，必须用双倍精确度运算。

为了防止选用不良的有限单元，工程师必须从试算法中取得适当的经验，同时也应查看些相应的参考文献〔13，19〕。或许所有最好的检验方法是把有限元的解同大量细心获得的实际观察结果相比较。

符　　号

除非另作说明，本书均采用下述符号：

A	横截面面积
I	面积的二阶矩（二阶面矩）
I_p	面积极矩
J	抗扭常数
l	长度
t	厚度或时间
T	扭矩（转矩）
M	弯矩
n	频率(Hz)
r	半径
R_1, R_2	结点1，2的半径
E	弹性模量
G	刚性模量
x, y, z	局部坐标系
$x^\circ, y^\circ, z^\circ$	整体（球面）坐标系
X, Y, Z	在 x，y，z 轴方向上的力
$X^\circ, Y^\circ, Z^\circ$	在$x^\circ, y^\circ, z^\circ$轴方向上的力
u, v, w	x，y，z 轴方向上的位移
$u^\circ, v^\circ, w^\circ$	$x^\circ, y^\circ, z^\circ$轴方向的位移
α	角度
λ	特征值
ω	角频率
ρ	密度
σ	应力
ε	应变
τ_{xy}	x-y平面内的剪应力

γ_{xy}	$x-y$平面内的剪应变
ν	泊松比
γ	$(1-\nu)/2$或$(1-2\nu)/[2(1-\nu)]$
μ	$\nu/(1-\nu)$
ξ	$x/1$　x/l
$[k]$	局部坐标系内的单元刚度矩阵
$[k^{o}]$	整体（球面）坐标系内的单元刚度矩阵
$[k_G]$	局部坐标系内的几何刚度矩阵
$[K_G^0]$	整体（球面）坐标系内的单元刚度矩阵
$[m]$	局部坐标系内单位质量矩阵
$[m^{o}]$	整体（球面）坐标系内单位质量矩阵
$[K^{o}]$	整体（球面）坐标系内体系刚度矩阵
$[K_G^0]$	整体（球面）坐标系内体系几何刚度矩阵
$[M^{o}]$	整体（球面）坐标系内体系质量矩阵
$\{P_i\}$	内节点力的向量
$\{q^{o}\}$	整体（球面）坐标系内外节点力向量
$\{u_i\}$	局部坐标系内节点位移向量
$\{u_i^0\}$	整体（球面）坐标系内节点位移向量
$[K_{11}]$	对应于'自由'位移的部分体系刚度矩阵
$[K_{G11}]$	对应于'自由'位移的部分体系几何刚度矩阵
$[M_{11}]$	对应于'自由'位移的部分体系质量矩阵
$[C_v]$	含有粘滞阻尼项矩阵
$[C_{11}]$	对应于'自由'位移的部分$[C_v]$
$[C_H]$	含有滞后阻尼项矩阵
$[\Xi]$	方向余弦矩阵
$[I]$	密度矩阵
$[\ ]$	方阵
$\{\ \}$	列向量
$\lfloor\ \rfloor$	行向量
$[0]$	零矩阵

第一章 矩阵代数

本章不是从严密的数学理论而是从技术应用的角度来进行论述的。首先给出各种矩阵的定义，然后论述矩阵代数的一些定理，并附详尽的例题来说明这些定理，最后将专门讨论逆阵以及齐次和非齐次联立方程组。

如果读者需要更深入地研究矩阵代数，请参阅文献〔20～22〕。

1.1 定义

标量通常可用一个数来表示。这个数可以是正数、负数或零，如1、2、π、e、-1.57、2×10^{11}等。典型的标量有温度、时间、质量和长度等等。标量只有大小。

矢量既有大小又有方向。典型的矢量有速度、位移、力和重力等等。

矩阵通常是一个由“m”行“n”列组成的、排列整齐的标量阵（或标量表），如式(1.1)所示。矩阵中的元素不必一定是标量，它可以是矢量，甚至可以是矩阵。这一表示量的规定，使得矩阵特别适宜在数字计算机上模拟物理问题。

$$[A]=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13}\cdots A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\cdots A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\cdots A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} & A_{mn} \end{vmatrix} \tag{1.1}$$

矩阵的横向各排叫做行，纵向各排叫做列。

A_{11}、A_{12}、A_{13}等称为矩阵〔A〕的元素。