微分几何讲义

北京大学出版社

北京大学数学丛书

微分几何讲义

陈省身 陈维桓 著

北京大学出版社

内 容 简 介

本书系统地介绍了现代微分几何的基础知识。内容包括：微分流形，张量，外微分，连络，黎曼几何，李群和活动标架法，复流形。另外还附有陈省身教授的两篇论文："欧氏空间中的曲线和曲面"及"微分几何和理论物理"。

此书适用于高等院校数学专业和理论物理专业的高年级学生、研究生阅读，并且可供一般的数学工作者、物理工作者参考。

微分几何讲义

北京大学出版社出版
（北京大学校内）
中国科学技术情报研究所印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行
850×1168毫米 32开本 10.375印张 261千字
1983年12月第一版 1983年12月第一次印刷
印数：1—22,000

统一书号：13209·84 定价：精装2.65元 平装1.55元

微分几何的过去与未来（代序）

微分几何的出发点是微积分：一条曲线的切线和微分是同一个概念。同样，一条封闭曲线所包围的面积的理论就是积分论。“微积分在几何上的应用”演变成曲线论及曲面论。微分几何初期作重要的贡献的，当推 L.Euler(1707—1783)，G.Monge(1746—1818)。

微分几何的始祖是 C.F.Gauss(1777—1855)。他的曲面论建立了曲面的第一基本式所奠定的几何，并把欧氏几何推广到曲面上“弯曲”的几何。B. Riemann (1826—1866)在1854年有名的演讲把这个理论推广到 n 维空间。黎曼几何就在此年出生。

黎曼的演讲直到1868年他死后才发表，当即引起许多新工作来处理和推展他的新几何。主要的作者包括 E. Beltrami, E. B. Christoffel, R. Lipschitz；他们的论文都发表在 1870 年左右。Christoffel 是一位开拓的大师。他一度在瑞士的苏黎士任教授，因此影响及于意大利的数学家，有 L. Bianchi 及 T. Ricci。前者是第一个用“微分几何”作书名的 (Lezioni di Geometria Differenziale, Pisa, 1893)；后者是“张量分析”的始祖。

黎曼几何之大受重视，由于爱因斯坦之广义相对论。爱氏把引力现象释成黎曼空间的曲率性质，因之，物理现象变成几何现象。微分几何的了解遂为理论物理学者所必需。

同在1870年 Felix Klein 发表了他的 Erlanger Program。这个计划把几何学定为一个变换群下的不变性质。视变换群的选择，我们有欧氏或非欧几何学、投影几何学、仿射几何学等等。这些空间内的支流形的研究成为相当的微分几何学。二十世纪初期投影微分几何的研究相当活跃，领导者为美国的 E. J. Wilczynski 及意大利的 G. Fubini，苏步青教授作过重要的贡献并指导

了很多学生。在仿射微分几何作决定性工作的当推 W. Blaschke。

把两种观点融合的是 Elie Cartan(1869—1951)。他的广义空间把连络作为主要的几何观念。他建立的外微分和他在李群的工作，是近代微分几何的两大柱石。

微分几何的主要问题是整体性的，即研究空间或流形的整个的性质，尤其是局部性质与整体性质的关系。Gauss-Bonnet 公式(见第五章§4)就是一个例子。

要研究整个流形，流形论的基础便成为必要。流形内的坐标是局部的，本身沒有意义；流形研究的主要目的是经过坐标卡变换而保持不变的性质(如切矢量、微分式等)。这是与一般数学不同的地方。这些观念经过几十年的演变，渐成定型。将来数学研究的对象，必然是流形；传统的实数或复数空间只是局部的情形(虽然在许多情况下它会是最重要的情形)。所以我相信本书的内容会对一般数学工作者有用。

讲到微分几何的未来，当然预测是很困难的。十九世纪的深刻的结果(如单复变函数论)，多半是单元的。本世纪内高维流形的发展是辉煌的。但整个宝藏发掘未及十一，可以发展的方向，多不胜数。数学的前途无量是可以预卜的。

这份讲义是我在1980年春季在北京大学的讲课记录，由陈维桓整理而成的。因时间限制，内容甚不齐备，错误亦难免。北大同人尤其是段学复教授的支持和江泽涵教授的关心，是这个课的主要动力。吳光磊教授在讲义整理过程中提供了许多宝贵意见。吳大任教授曾读过书稿，并提了不少改进的意见。田畴同志也读过书稿，并特为讲义翻译了附录一(欧氏空间中的曲线和曲面)。此外，我在北大讲课时，章学诚、尤承业、刘旺金、韩念国、周作领、刘应明、孙振祖、李安民和陈维桓等同志为记录和辅导做了不少工作。今天很高兴有机会向这些同志们说一声“谢谢”。

陈省身

1982年4月7日于美国加州

目　　录

第一章　微分流形

§1　微分流形的定义

流形的概念是欧氏空间的推广．粗略地说，流形在每一点的近傍和欧氏空间的一个开集是同胚的，因此在每一点的近傍可以引进局部坐标系．流形正是一块块"欧氏空间"粘起来的结果．

我们用 $\boldsymbol{R}$ 表示实数域．设

(1) $$\boldsymbol{R}^m=\{x=(x^1,\cdots,x^m)\,|\,x^i\in\boldsymbol{R},\ 1\leqslant i\leqslant m\},$$

即 $\boldsymbol{R}^m$ 是全体有序的 m 个实数所形成的数组的集合，实数 x^i 称为点 $x\in\boldsymbol{R}^m$ 的第 i 个坐标．对于任意的 $x,y\in\boldsymbol{R}^m$，$\alpha\in\boldsymbol{R}$，命

(2) $$\begin{cases}(x+y)^i=x^i+y^i,\\(\alpha x)^i\quad=\alpha x^i,\end{cases}$$

这样就在 $\boldsymbol{R}^m$ 中定义了加法和对实数的乘法，使 $\boldsymbol{R}^m$ 成为实数域 $\boldsymbol{R}$ 上的 m 维矢量空间．

空间 $\boldsymbol{R}^m$ 除上述线性构造外，还有典型的拓扑构造．对 $x,y\in\boldsymbol{R}^m$，命

(3) $$d(x,y)=+\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x^i-y^i)^2}\,.$$

容易验证，函数 $d(x,y)$ 满足下面三个条件：

1）$d(x,y)\geqslant0$，且等号只在 $x=y$ 时成立；

2）$d(x,y)=d(y,x)$；

3）对任意的 $x,y,z\in\boldsymbol{R}^m$，有不等式

$$d(x,y)+d(y,z)\geqslant d(x,z).$$

所以 $d(x,y)$ 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的距离函数，使 $\boldsymbol{R}^m$ 成为度量空间．作为度量空间，$\boldsymbol{R}^m$ 有自然的拓扑结构①：以开球 $B_{x;r}=\{y\in\boldsymbol{R}^m|d(x,y)$

① 关于拓扑学的基本概念，可看：江泽涵著"拓扑学引论"，上海科学技术出版社，1978年版．

$<r\}(x\in \boldsymbol{R}^m, r>0)$ 的幷集为开集。以(3)为距离函数的 m 维矢量空间 $\boldsymbol{R}^m$ 称为 m 维欧氏空间。

设 f 是定义在开集 $U\subset \boldsymbol{R}^m$ 上的实函数，如果 f 的所有直到 r 阶的偏导数都存在幷且连续，则称 f 是 r 次可微的，或称 f 是 C^r 的。这里 r 可以是所有的正整数。如果 f 有任意阶的连续偏导数，则称 f 是 C^∞ 的。如果 f 是解析的，也就是 f 在 U 的每一点的一个邻域内能表成收敛的幂级数，则记 f 是 C^ω 的。

定义1.1 设 M 是 Hausdorff 空间。若对任意一点 $x\in M$，都有 x 在 M 中的一个邻域 U 同胚于 m 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^m$ 的一个开集，则称 M 是一个 m 维流形(或拓扑流形)。

设定义1.1中提到的同胚映射是 $\varphi_U: U\to\varphi_U(U)$，这里 $\varphi_U(U)$ 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开集，则称 (U,φ_U) 是 M 的一个坐标卡。因为 φ_U 是同胚，对任意一点 $y\in U$，可以把 $\varphi_U(y)\in \boldsymbol{R}^m$ 的坐标定义为 y 的坐标，即命

$$u^i=(\varphi_U(y))^i,\quad y\in U,\ i=1,\cdots,m, \tag{4}$$

我们称 $u^i\ (1\leqslant i\leqslant m)$ 为点 $y\in U$ 的局部坐标。

设 (U,φ_U) 和 (V,φ_V) 是流形 M 的两个坐标卡，若 $U\cap V\neq\varnothing$，则 $\varphi_U(U\cap V)$ 和 $\varphi_V(U\cap V)$ 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中两个非空的开集，幷且映射

$$\varphi_V\circ\varphi_U^{-1}|_{\varphi_U(U\cap V)}:\varphi_U(U\cap V)\to\varphi_V(U\cap V)$$

建立了这两个开集之间的同胚，其逆映射就是 $\varphi_U\circ\varphi_V^{-1}|_{\varphi_V(U\cap V)}$。因它们是从欧氏空间的一个开集到另一个开集的映射，所以用坐标表示时 $\varphi_V\circ\varphi_U^{-1}$ 和 $\varphi_U\circ\varphi_V^{-1}$ 分别表为欧氏空间的开集上的 m 个实函数(见图1)：

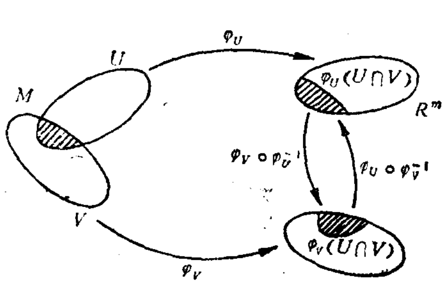

图 1

(5) $$y^i=f^i(x^1,\cdots,x^m)=(\varphi_V\circ\varphi_U^{-1}(x^1,\cdots,x^m))^i,$$
$$(x^1,\cdots,x^m)\in\varphi_U(U\cap V);$$

(6) $$x^i=g^i(y^1,\cdots,y^m)=(\varphi_U\circ\varphi_V^{-1}(y^1,\cdots,y^m))^i,$$
$$(y^1,\cdots,y^m)\in\varphi_V(U\cap V).$$

因为$\varphi_V\circ\varphi_U^{-1}$和$\varphi_U\circ\varphi_V^{-1}$是互逆的同胚映射，所以$f^i$和$g^i$都是连续函数，并且

(7) $$\begin{cases} f^i(g^1(y^1,\cdots,y^m),\cdots,g^m(y^1,\cdots,y^m))=y^i, \\ g^i(f^1(x^1,\cdots,x^m),\cdots,f^m(x^1,\cdots,x^m))=x^i. \end{cases}$$

我们称两个坐标卡(U,φ_U)和(V,φ_V)是C^r-相容的，如果$U\cap V=\varnothing$，或者在$U\cap V\neq\varnothing$时坐标变换函数$f^i(x^1,\cdots,x^m)$和$g^i(y^1,\cdots,y^m)$都是C^r的。

定义1.2 设M是一个m维流形。如果在M上给定了一个坐标卡集$\mathscr{A}=\{(U,\varphi_U),(V,\varphi_V),(W,\varphi_W),\cdots\}$，满足下列条件，则称$\mathscr{A}$是$M$的一个$C^r$微分结构：

1）$\{U,V,W,\cdots\}$是M的一个开复盖；

2）属于$\mathscr{A}$的任意两个坐标卡是C^r-相容的；

3）$\mathscr{A}$是极大的，即：对于M的任意一个坐标卡$(\tilde{U},\varphi_{\tilde{U}})$，如果它与属于$\mathscr{A}$的每一个坐标卡都是$C^r$-相容的，则它自身必属于$\mathscr{A}$。

若在M上给定了一个C^r-微分结构，则称M是一个C^r-微分流形。属于给定的微分结构的坐标卡称为微分流形M的容许的坐标卡。今后谈到微分流形M上点p附近的局部坐标系都是指包含p点的容许坐标卡给出的坐标系。

注记1 在定义1.2中条件1)和2)是基本的。不难证明，若坐标卡集$\mathscr{A}'$满足条件1)和2)，则对任意的正整数s，$0<s\leqslant r$，存在唯一的一个C^s-微分结构$\mathscr{A}$，使得$\mathscr{A}'\subset\mathscr{A}$。实际上，如果用$\mathscr{A}$表示与$\mathscr{A}'$中的坐标卡都是$C^s$-相容的坐标卡的集合，则$\mathscr{A}$是一个$C^s$-微分结构，它是由$\mathscr{A}'$唯一确定的。所以在构造微分流形时，只要指出它的一个相容的坐标复盖就可以了。

注记 2 在本书中，我们还假定流形M是满足第二可数公理的拓扑空间。即：M有可数的拓扑基(见第 1 页脚注)。

注记 3 若在M上确定了一个 C^∞-微分结构，则简称M为光滑流形；若在M上给定了一个 C^ω-微分结构，则称 M 为解析流形。本书主要讨论光滑流形；在不致引起混淆时，常把光滑流形简称为流形。

例 1 $M=\boldsymbol{R}^m$。取 $U=M$，φ_U 是恒同映射，则 $\{(U,\varphi_U)\}$ 是 $\boldsymbol{R}^m$ 的一个坐标复盖，由此确定了 $\boldsymbol{R}^m$ 的光滑流形结构，称为 $\boldsymbol{R}^m$ 的标准微分结构。

例 2 m维单位球面

$$S^m=\{x\in \boldsymbol{R}^{m+1}\mid (x^1)^2+\cdots+(x^{m+1})^2=1\}.$$

以 $m=1$为例，取如下的四个坐标卡：

$$\text{(8)}\qquad \begin{cases} U_1\{x\in S^1\mid x^2>0\}, & \varphi_{U_1}(x)=x^1, \\ U_2\{x\in S^1\mid x^2<0\}, & \varphi_{U_2}(x)=x^1, \\ V_1\{x\in S^1\mid x^1>0\}, & \varphi_{V_1}(x)=x^2, \\ V_2\{x\in S^1\mid x^1<0\}, & \varphi_{V_2}(x)=x^2. \end{cases}$$

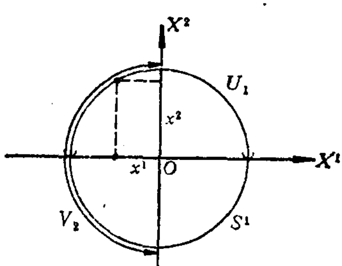

图 2

很清楚，$\{U_1,U_2,V_1,V_2\}$ 构成 S^1 的一个开复盖。在交集 $U_1\cap V_2$ 上有(见图2)

$$\text{(9)}\qquad \begin{cases} x^2=\sqrt{1-(x^1)^2}, \\ x^1=-\sqrt{1-(x^2)^2}, \end{cases}$$

$$x^1<0,\quad x^2>0,$$

它们都是 C^∞-函数，所以(U_1,φ_{U_1}) 和 (V_2,φ_{V_2}) 是 C^∞-相容的。同理可证，其余的任意两个坐标卡也都是 C^∞-相容的。因此，上面给出的坐标卡使 S^1 成为一维的光滑流形。

当 $m>1$时，S^m 上的光滑结构可以类似地定义。

例 3 m维射影空间 P^m。

在 $\boldsymbol{R}^{m+1}-\{0\}$中定义如下的关系～：设 $x, y\in \boldsymbol{R}^{m+1}-\{0\}$，$x\sim y$ 当且仅当存在非零实数 a，使 $x=ay$。显然，～是等价关系。对于 $x\in \boldsymbol{R}^{m+1}-\{0\}$，$x$ 的～等价类记作

$$[x]=[x^1, \cdots, x^{m+1}].$$

所谓m维射影空间 P^m 就是指商空间

$$P^m=(\boldsymbol{R}^{m+1}-\{0\})/\sim=\{[x]\mid x\in \boldsymbol{R}^{m+1}-\{0\}\}. \tag{10}$$

数组$(x^1, \cdots, x^{m+1})$，称为点$[x]$的齐次坐标，它被$[x]$确定到差一个非零实因子。P^m 也就是 $\boldsymbol{R}^{m+1}$ 中所有过原点的直线构成的空间。

命

$$\begin{cases} U_i=\{[x^1, \cdots, x^{m+1}]\mid x^i\neq 0\}, \\ \varphi_i([x])=({}_i\xi_1, \cdots, {}_i\xi_{i-1}, {}_i\xi_{i+1}, \cdots, {}_i\xi_{m+1}), \end{cases} \tag{11}$$

其中$1\leqslant i\leqslant m+1$，${}_i\xi_h=x^h/x^i\ (h\neq i)$。显然，$\{U_i,\ 1\leqslant i\leqslant m+1\}$构成 P^m 的开复盖。在 $U_i\cap U_j\ (i\neq j)$上有坐标变换

$$\begin{cases} {}_j\xi_h=\dfrac{{}_i\xi_h}{{}_i\xi_j} \quad (h\neq i, j), \\ {}_j\xi_i=\dfrac{1}{{}_i\xi_j}. \end{cases} \tag{12}$$

所以$\{(U_i, \varphi_i)\}_{1\leqslant i\leqslant m+1}$给出了 P^m 的光滑结构。

注记 上面三个例子给出的坐标复盖都是C^ω–相容的；所以，实际上它们分别确定了 $\boldsymbol{R}^m, S^m$ 和 P^m 作为解析流形的结构。

例 4 Milnor 怪球。

在同一个拓扑流形上可能有不同的微分结构。J.Milnor 在1956年给出一个著名的例子(见 *Annals of Math.*, 64(1956), 399—405)，指出：在同胚的拓扑流形上确实存在彼此不同构的光滑流形结构(见定义 1.3 下面的注记)，因此微分结构有独立于拓扑结构的意义。关于 Milnor 怪球的完全的叙述和证明已超出本书的范围，这里只作简要的说明。

在 S^4 上取两个对径点 A, B。命

(13) $$U_1=S^4-\{A\},\ U_2=S^4-\{B\},$$

则 U_1 和 U_2 构成了 S^4 的开复盖。现在要把平凡的球从 $U_1\times S^3$ 与 $U_2\times S^3$ 粘起来得到以 S^4 为底空间的三维球丛 Σ^7。

在球极投影下，U_1 和 U_2 分别和 $\boldsymbol{R}^4$ 是同胚的，而 $U_1\cap U_2$ 与 $\boldsymbol{R}^4-\{0\}$ 同胚。把 $\boldsymbol{R}^4-\{0\}$ 中的元素记成四元数。取一奇数 k，使 $k^2-1\not\equiv 0 \bmod 7$。考虑映射 $\tau:(\boldsymbol{R}^4-\{0\})\times S^3\to(\boldsymbol{R}^4-\{0\})\times S^3$，使得对 $(u,v)\in(\boldsymbol{R}^4-\{0\})\times S^3$，有

(14) $$\tau(u,v)=\left(\frac{u}{\|u\|^2},\frac{u^h v u^j}{\|u\|}\right),$$

其中

(15) $$h=\frac{k+1}{2},\quad j=\frac{1-k}{2},$$

且(14)式中的乘法是四元数乘法，$\|\ \|$ 是四元数的模。显然，映射 τ 是光滑的。我们把 $U_1\times S^3$ 和 $U_2\times S^3$ 通过 τ 粘起来。可以证明，这样得到的 Σ^7 与 7 维单位球面 S^7 同胚，但是其微分构造与 S^7 的典型微分结构(例2)不相同。

在光滑流形上，光滑函数的概念是有意义的。设 f 是定义在 m 维光滑流形 M 上的实函数。若 $p\in M$，(U,φ_U) 是包含 p 点的容许坐标卡，那么 $f\circ\varphi_U^{-1}$ 是定义在欧氏空间 $\boldsymbol{R}^m$ 的开集 $\varphi_U(U)$ 上的实函数。如果函数 $f\circ\varphi_U^{-1}$ 在点 $\varphi_U(p)\in\boldsymbol{R}^m$ 是 C^∞ 的，则称函数 f 在点 $p\in M$ 是 C^∞ 的。

函数 f 在点 p 的可微性与包含 p 的容许坐标卡的选取是无关的。实际上，若有另一个包含 p 的容许坐标卡 (V,φ_V)，则 $U\cap V\neq\varnothing$，且

$$f\circ\varphi_V^{-1}=(f\circ\varphi_U^{-1})\circ(\varphi_U\circ\varphi_V^{-1});$$

因为 $\varphi_U\circ\varphi_V^{-1}$ 是光滑的，所以 $f\circ\varphi_V^{-1}$ 和 $f\circ\varphi_U^{-1}$ 在相应点都是可微的。

如果实函数 f 在 M 上处处是 C^∞ 的，则称 f 是 M 上的 C^∞-函数，或称 f 是 M 上的光滑函数。M 上全体光滑函数的集合记作

$C^\infty(M)$。

光滑函数是光滑流形之间的光滑映射的重要特例。

定义1.3 设 $f: M \to N$ 是从光滑流形 M 到 N 的一个连续映射，$\dim M = m$，$\dim N = n$。若在一点 $p \in M$，存在点 p 的容许坐标卡 (U, φ_U) 和点 $f(p)$ 的容许坐标卡 (V, ψ_V)，使得映射

$$\psi_V \circ f \circ \varphi_U^{-1}: \varphi_U(U) \to \psi_V(V)$$

在点 $\varphi_U(p)$ 是 C^∞ 的，则称映射 f 在点 p 是 C^∞ 的。若映射 f 在 M 的每一点 p 都是 C^∞ 的，则称 f 是从 M 到 N 的光滑映射。

注记 因为 $\psi_V \circ f \circ \varphi_U^{-1}$ 是从开集 $\varphi_U(U) \subset \boldsymbol{R}^m$ 到开集 $\psi_V(V) \subset \boldsymbol{R}^m$ 的连续映射，所以它在点 $\varphi_U(p)$ 的可微性是已有定义的。f 在点 p 的可微性显然与容许坐标卡 (U, φ_U) 和 (V, ψ_V) 的选取无关。

如果 $\dim M = \dim N$，并且 $f: M \to N$ 是同胚。当 f 和 f^{-1} 都是光滑映射时，则我们称 $f: M \to N$ 是可微同胚（如果光滑流形 M 和 N 是可微同胚的，则称 M 和 N 的光滑流形结构是同构的）。上面所举的 Milnor 怪球 Σ^7 与 S^7 是拓扑同胚的，但是它们不是可微同胚的，即它们的光滑流形结构不同构。

光滑映射的另一个重要特例是流形上的参数曲线。取 $\boldsymbol{R}^1$ 中的一个开区间 $M = (a, b)$，则从 M 到流形 N 的光滑映射 $f: (a, b) \to N$ 称为流形 N 上的一条参数曲线。

假定 M, N 分别是 m 维和 n 维光滑流形，其微分结构分别是 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$，$\{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in B}$。用下述方法可以构造一个新的 $m+n$ 维光滑流形 $M \times N$：首先，$\{U_\alpha \times V_\beta\}_{\alpha \in A, \beta \in B}$ 构成拓扑积空间 $M \times N$ 的开复盖；其次，定义映射 $\varphi_\alpha \times \psi_\beta: U_\alpha \times V_\beta \to \boldsymbol{R}^{m+n}$，使

$$\varphi_\alpha \times \psi_\beta(p, q) = (\varphi_\alpha(p), \psi_\beta(q)), \quad (p, q) \in U_\alpha \times V_\beta. \tag{16}$$

这样，$(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)$ 是 $M \times N$ 的一个坐标卡。容易证明，如此得到的坐标卡都是 C^∞-相容的，因此它们决定了 $M \times N$ 上的光滑流形结构。

定义1.4 拓扑积空间 $M\times N$ 上由 C^∞-相容的坐标复盖

$$\{(U_\alpha\times V_\beta,\varphi_\alpha\times\psi_\beta)\}_{\alpha\in A,\beta\in B}$$

决定的光滑流形结构使 $M\times N$ 成为 $m+n$ 维光滑流形，该流形称为M和N的积流形。

积流形 $M\times N$ 到各因子的自然投影记作

$$\pi_1:M\times N\to M,\quad \pi_2:M\times N\to N,$$

即对于 $(x,y)\in M\times N$ 有

$$\pi_1(x,y)=x,\quad \pi_2(x,y)=y.$$

显然，它们都是光滑映射。

§2 切 空 间

正则的曲线和曲面在每一点分别有切线和切平面的概念。同样，在拓扑流形上给定一个微分结构之后，在每一点的附近可以用线性空间来"近似"，确切地说，可以引进切空间和余切空间等概念。我们从余切空间的概念着手。

设M是m维光滑流形，固定一点 $p\in M$。设 f 是定义在点 p 的一个邻域上的 C^∞-函数①。所有这样的函数的集合记作C_p^∞。自然，属于 C_p^∞ 的两个函数的定义域可以是不同的，但是函数空间 C_p^∞中加法和乘法仍然是有意义的：设$f,g\in C_p^\infty$，它们的定义域分别是U和V，那么$U\cap V$仍是包含点 p 的开邻域；这样，$f+g$与 $f\cdot g$ 可看作定义在$U\cap V$上的C^∞-函数，即$f+g,f\cdot g\in C_p^\infty$。

在C_p^∞ 中定义如下的关系～：设$f,g\in C_p^\infty$，则$f\sim g$当且仅当存在点 p 的一个开邻域H，使得 $f|_H=g|_H$。显然，～是C_p^∞ 中的等价关系。我们用$[f]$记 f 在 C_p^∞中的～等价类，称为流形M在点 p 的C^∞-函数芽(germ)。命

---

① 设f是定义在开集$V\subset M$上的函数．如果对任意的容许坐标卡(U,φ_U)，$U\cap V\neq\varnothing$，函数$f\circ\varphi_U^{-1}$是开集$\varphi_U(U\cap V)\subset R^m$上的$C^\infty$-函数，则称$f$是定义在$V$上的$C^\infty$-函数。实际上，$V$有从$M$诱导的微分构造（§3），所以$f$是微分流形$V$上的$C^\infty$-函数．

(1) $$\mathscr{F}_p = C_p^\infty/\sim = \{[f] \mid f \in C_p^\infty\},$$

则在$\mathscr{F}_p$中可以定义加法和对实数的乘法，使它成为实数域上的线性空间。实际上，若$[f], [g] \in \mathscr{F}_p$，$a \in \boldsymbol{R}$，只要命

(2) $$\begin{aligned} &[f] + [g] = [f+g], \\ &a[f] = [af]. \end{aligned}$$

根据定义，上面两式的右端与代表f, g的选取是无关的。请读者自证，$\mathscr{F}_p$是无穷维的实线性空间。

设γ是M上过点p的一段参数曲线，即有正数δ，使$\gamma: (-\delta, \delta) \to M$是$C^\infty$-映射，并且$\gamma(0) = p$。所有这些参数曲线的集合，记作$\Gamma_p$。

对于$\gamma \in \Gamma_p$，$[f] \in \mathscr{F}_p$，命（图 3）

(3) $$\langle\!\langle \gamma, [f] \rangle\!\rangle = \left.\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}\right|_{t=0}, \quad -\delta < t < \delta.$$

显然，对于固定的γ，上式右端的数值由$[f]$完全确定，而不依赖于代表f的选取。而且，配合$\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle$关于第二个因子是线性的，即对

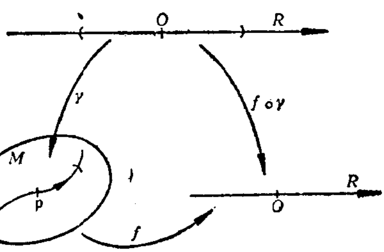

图 3

于任意的$\gamma \in \Gamma_p$，$[f], [g] \in \mathscr{F}_p$，$a \in \boldsymbol{R}$，有

(4) $$\begin{aligned} &\langle\!\langle \gamma, [f] + [g] \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \gamma, [f] \rangle\!\rangle + \langle\!\langle \gamma, [g] \rangle\!\rangle, \\ &\langle\!\langle \gamma, a[f] \rangle\!\rangle = a\langle\!\langle \gamma, [f] \rangle\!\rangle. \end{aligned}$$

设

(5) $$\mathscr{H}_p = \{[f] \in \mathscr{F}_p \mid \langle\!\langle \gamma, [f] \rangle\!\rangle = 0,\ \forall \gamma \in \Gamma_p\},$$

则$\mathscr{H}_p$是$\mathscr{F}_p$的线性子空间。

定理2.1 设$[f]\in\mathscr{F}_p$，对于包含p的容许坐标卡(U,φ_U)，命

$$F(x^1,\cdots,x^m)=f\circ\varphi_U^{-1}(x^1,\cdots,x^m), \tag{6}$$

则$[f]\in\mathscr{H}_p$，当且仅当

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x^i}\right|_{\varphi_U(p)}=0,\quad 1\leqslant i\leqslant m.$$

证明 设$\gamma\in\Gamma_p$，其坐标表示是

$$(\varphi_U\circ\gamma(t))^i=x^i(t),\quad -\delta<t<\delta. \tag{7}$$

则

$$\begin{aligned}\langle\!\langle\gamma,[f]\rangle\!\rangle&=\frac{d}{dt}(f\circ\delta)\Big|_{t=0}\\&=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}F(x^1(t),\cdots,x^m(t))\\&=\sum_{i=1}^m\left.\frac{\partial F}{\partial x^i}\right|_{\varphi_U(p)}\cdot\left.\frac{dx^i(t)}{dt}\right|_{t=0}.\end{aligned} \tag{8}$$

但是我们可选取γ，使$\left.\frac{dx^i(t)}{dt}\right|_{t=0}$取任意实数值，因此要对任意的$\gamma\in\Gamma_p$都有$\langle\!\langle\gamma,[f]\rangle\!\rangle=0$，必须且只须

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x^i}\right|_{\varphi_U(p)}=0,\quad 1\leqslant i\leqslant m.$$

定理 2.1 说明：子空间$\mathscr{H}_p$恰好是在点p关于局部坐标的偏导数都是零的光滑函数的芽所构成的线性空间。

定义2.1 商空间$\mathscr{F}_p/\mathscr{H}_p$称为流形$M$在点$p$的余切空间，记作$T_p^*$。函数芽$[f]\in\mathscr{F}_p$的$\mathscr{H}_p$-等价类记作$\widetilde{[f]}$，也记作$(df)_p$，称为流形$M$在$p$点的余切矢量。

T_p^*是线性空间，它有从线性空间$\mathscr{F}_p$诱导的线性结构，即对于$[f],[g]\in\mathscr{F}_p$，$\alpha\in R$有

$$\begin{cases}\widetilde{[f]}+\widetilde{[g]}=\widetilde{[f]+[g]},\\ \alpha\cdot\widetilde{[f]}=\widetilde{\alpha[f]}.\end{cases} \tag{9}$$