高等学校教学用书　高等学校教学用书　高等学校教学用书

数学物理方程

浙江大学出版社

董光昌　陈仲慈　汤国祯编

高等学校教学用书

数学物理方程

董光昌　陈仲慈　汤国桢　编

浙江大学出版社

内容简介

本书主要介绍具有物理背景的三类方程——波动方程、热传导方程和位势方程的定解问题的求解方法．同时也介绍偏微分方程的一些基本理论和解题技巧。全书共六章，分别是：方程的导出和分类、波动方程、特殊函数及其应用、热传导方程、位势方程和Cauchy-Ковалевская定理与典型方程的总结。

本书是作者以多年来在浙江大学应用数学系讲授数学物理方程的教学实践为基础编写而成的。经高等工业学校应用数学专业教材委员会1987年10月湖南大庸会议审定为教材，可作为理工科院校应用数学专业和计算数学专业学生的教材，也可供其它院校数学专业学生、应用数学工作者、高等工业院校有关教师及科技工作者参考。

数学物理方程

董光昌　陈仲慈　汤国桢　编

责任编辑　朱谨准

浙江大学出版社出版

上虞汤浦印刷厂排版

萧山东湘印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

开本 850×1168　1/32　印张 8.75　217千字

1989年5月第1版　1989年5月第1次印刷

印数　1—3000

ISBN　7—308—00170—9

O.027　[塑]定价：2.30元

前　言

数学物理方程研究的是从物理、力学和工程技术问题中所归结出来的偏微分方程(组)，它具有紧密地、直接地联系着许多自然现象的特点。

微积分学产生以后，人们就开始把力学、物理中的一些实际模型归结为偏微分方程进行研究。1715 年 Taylor 建立了弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

1747 年 D'Alembert 从行波概念得到了这个方程的通解。而后 Bernoulli 从物理上波的叠加原理出发，把弦振动方程的解用三角级数表示为

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{ka\pi}{l}t+b_k\sin\frac{ka\pi}{l}t\right)\sin\frac{k\pi x}{l},$$

以后又经 Fourier 发展成为 Fourier 方法或驻波法。后来，Euler 和 Lagrange 在研究流体力学，Laplace 在研究势函数，Fourier 在研究热的传导问题时都归结出一些偏微分方程，并得到了解决这些问题的有效的数学方法。到十九世纪中期，随着对这些方程的系统地深入研究，逐渐形成了偏微分方程的基本理论，到十九世纪后期及本世纪，由于生产和科学技术发展，继续提出大量的偏微分方程的新问题。由于自然现象的复杂和多样，因此这些问题通常也是复杂和多样的，需要寻找用新的理论和新的方法解决，这就不断促进许多相关数学分支(函数论、几何学、泛函分析和计算数学等)的发展。另一方面，由于这些数学分支的发展，一些新的

思想和研究方法也渗透到偏微分方程的理论研究中来，促进偏微分方程的发展。因此，无论在历史上还是在今天的现实世界中，数学物理方程的研究对于推动数学理论的发展，加强理论与实际的联系，帮助人们认识世界和改造世界都起着重要的作用。

数学物理方程研究的范围十分广泛，内容十分丰富。在今天，它的一些基本内容已经是每个应用数学工作者所必备的基础知识，又是工程技术人员处理工程实际问题的常用方法。作为应用数学专业的一门基础课，主要讲述具有典型物理意义的三个典型方程——波动方程、热传导方程和位势方程。我们首先通过从实际模型导出方程和定解问题，然后围绕这三个典型方程的定解问题的求解方法，介绍偏微分方程的一些基本理论和解题技巧。通过这些问题的学习研究，不但为今后进一步学习偏微分方程打下一定基础，而且还应熟练地掌握各种定解问题的求解方法。为此，在本书中我们还较详尽地介绍工程技术和其他自然科学中常用方法——分离变量法和积分变换法，便于今后的实际应用。

本书是以我们多年教学实践为基础，按照一九八六年召开的教育部高等工业学校应用数学专业教材会议上修订的应用数学专业《数学物理方程》的主要内容和基本要求进行编写的。经高等工业学校应用数学专业教材委员会 1987 年 10 月湖南大庸会议审定为教材，它可以作为高等工业学校应用数学专业和计算数学专业数学物理方程基础课的教材。

本书共分六章，第一章介绍方程的导出和分类，重点介绍三个典型方程和它们的定解问题的物理背景；第二章介绍波动方程，重点介绍波动方程初值问题的 D'Alembert 方法和一维波动方程的分离变量法和能量积分；第三章介绍特殊函数及其应用，重点介绍 Sturm--Liouville 理论及其在分离变量法中的应用；第四章介绍热传导方程，重点讲述热传导初值问题 Fourier 变换法和抛物型方程的极值原理；第五章介绍位势方程，重点讲述边值问题的

Green 函数方法和椭圆型方程的极值原理；第六章介绍 Cauchy—Ковапевская 定理与典型方程的总结。为了便于学习，在各章叙述上力求简明准确、推导详尽，并强调理论的实际应用。

本书内容基本上是按照一学期七十学时的课程安排编写的。由于学时比较紧，少数标了“*”的内容，可根据情况选用。

限于作者学识，书中的缺点和错误一定不少，希望读者提出宝贵意见。

最后，作者对高等工业学校应用数学专业教材委员会诸位先生，特别是委员徐礼存先生对本书提出了很多宝贵意见，对此表示由衷的感谢。

1988 年 4 月

目　录

第一章　方程的导出和分类

在这一章中，我们将通过弦和膜的振动、热传导和膜平衡等实际问题，说明如何从实际问题根据物理规律导出数学物理方程。在这一基础上，介绍定解问题和适定性等基本概念。

由于不同的物理现象往往归结为不同数学物理方程，因而它们在定解问题的提法和解的性质等方面存在很多差异，为了区别它，我们在这一章里还介绍二阶线性方程的分类。

§1　方程的导出和定解条件

1. 波动方程和定解问题

（1）弦振动方程和定解问题　一长为 l 的柔软均匀细弦，拉紧后，当它受到与平衡位置垂直的外力作用时，开始作微小横振动。假设这运动发生在同一平面内且方向垂直于平衡位置，求弦上各点位移随时间变化规律。

弦上各点作往返运动的主要原因是弦的张力作用，弦在运动过程中各点的位移、加速度、张力都在不断变化，但它们遵循物理的运动规律，我们应用它建立弦上各点的位移函数所满足的微分方程。

为此，我们取弦的平衡位置为 ox 轴，运动平面取为 xou，如图 1.1 所示。这样一来，在时刻 t，弦线在 x 点的位移为 $u(x,t)$，且在运动的弦上任取一小段 $\widehat{MM'}$（放大后如图 1.2 所示），它平衡时位置是 $[x, x+\Delta x]$。

由于我们假设弦线是均匀的，弦作微小振动，故可认为

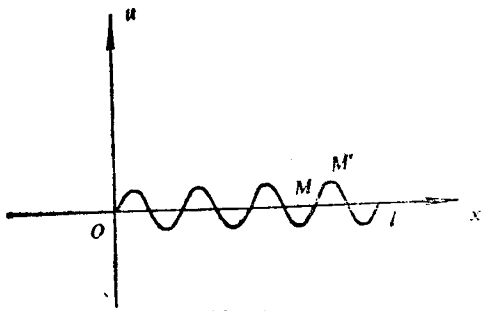

图1.1

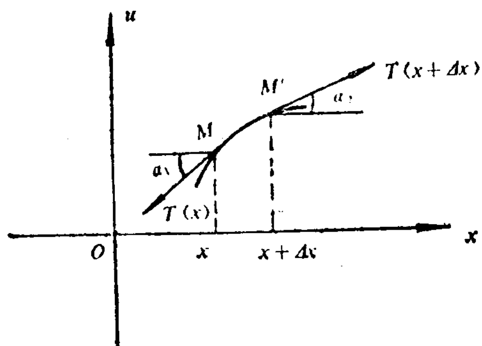

图1.2

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \ll 1. \tag{1.1}$$

略去$\frac{\partial u}{\partial x}$的二次项不计，得

$$\Delta S = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dx \approx \Delta x,$$

此即表明弦段$\widehat{MM'}$在振动过程中长度近似不变。因此根据虎克（Hooke）定律弦上的各点张力T的大小与时间t无关。再由弦是柔软的假设，知弦上各点的张力$\vec{T}$的方向是弦的切线方向。

设 ρ 为弦的线密度(单位长度的质量)，f_0 为作用在弦线上且垂直于平衡位置的强迫外力密度(单位长度的力)，根据牛顿第二定律，从图 1.2 可得

$$T(x+\Delta x)\cos\alpha_2 - T(x)\cos\alpha_1 = 0, \tag{1.2}$$

$$\rho\Delta x\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T(x+\Delta x)\sin\alpha_2 - T(x)\sin\alpha_1 + f_0\Delta x. \tag{1.3}$$

由一阶导数的几何意义，知

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x,t)}, \qquad \operatorname{tg}\alpha_2 = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x+\Delta x,t)}.$$

再利用条件(1.1)，可得

$$\cos\alpha_1,\ \cos\alpha_2 \approx 1, \quad \sin\alpha_1 \approx \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x,t)},$$

$$\sin\alpha_2 \approx \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x+\Delta x,t)}.$$

由(1.2)式得

$$T(x+\Delta x) \approx T(x),$$

这表明张力的大小与 x 也无关，因此

$$|T| = T_0 \quad (\text{常数}).$$

于(1.3)式中，利用微分中值定理可得

$$\rho\Delta x\,\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2} \approx T\Delta x\,\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial x^2} + f_0(\bar{x},t)\Delta x,$$

其中 $\bar{x} \in (x, x+\Delta x)$。

消去 Δx 后，令 $\Delta x \to 0$，得 u 所满足的微分方程

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_0, \qquad (0<x<l,\ t>0).$$

由于弦是均匀的，故 ρ 为常数，记

$$a^2 = \frac{T_0}{\rho}, \qquad \frac{f_0}{\rho} = f(x,t),$$

方程可改写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t),\ (0<x<l,\ t>0), \tag{1.4}$$

方程(1.4)刻划了均匀弦的微小横振动的一般规律，人们通常称它为**弦振动方程**。

为了确定具体弦的振动规律，除了列出它所满足的方程外，由于弦开始时的形状和弦上各点的速度，对弦振动将有直接影响，因此必须列出如下条件

$$u(x,0)=\varphi(x),\ (0<x<l), \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x),\ (0<x<l), \tag{1.6}$$

这里 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 为已知函数。

边界条件一般说来有三种：

1° 已知端点的位移，即

$$u(0,t)=g_1(t),\ u(l,t)=g_2(t),\ (t\geqslant 0), \tag{1.7}$$

特别当 $g_1(t)=g_2(t)=0$ 时，这时弦的两端是固定的。

2° 已知在端点受到垂直于弦的外力的作用，即

$$\begin{aligned} -T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}&=g_1(t),\\ T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}&=g_2(t),\ (t\geqslant 0), \end{aligned} \tag{1.8}$$

特别当 $g_1(t)=g_2(t)=0$ 时，这时弦的两端是自由端。

3° 已知端点的位移与所受外力作用的一个线性组合

$$\left(T\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha_2 u\right)\bigg|_{x=l}=g_2(t),\ (t\geqslant 0). \tag{1.9}$$

这种类型的边界条件在实际中也是常见的，例如弦的端点 $x=l$ 固定在运动的弹性支承上，它的运动规律为 $\theta=\theta(t)$，$x=l$ 点弦的位移为 $u(l,t)$，由于支承的弹性力起阻碍运动作用，故于 $x=l$ 点实际位移为 $u(l,t)-\theta(t)$，而弦对支承拉力的垂直分量为

$T\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}$，于是根据虎克定律得

$$T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=k(u(l,t)-\theta(t)),$$

或

$$\left.\left(T\frac{\partial u}{\partial x}-ku(x,t)\right)\right|_{x=l}=k\theta(t),$$

其中 k 是支承的弹性系数。

通常我们把初始条件和边界条件统称为**定解条件**。一个偏微分方程连同它的相应的定解条件组成一个**定解问题**。因此为了求具体的弦振动规律，我们需要去求一个相应的定解问题。例如在上述的弦两端固定，我们在距 $x=0$ 端 $\frac{1}{4}l$ 处用手将弦横向提到 h 高度，然后将弦线轻轻放下，让它作横向微小振动，如图 1.3 所示。这时 $f=0$，于是它的位移 $u(x,t)$ 满足弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,$$

且

$$u(x,0)=\varphi_0(x)=\begin{cases}\dfrac{4h}{l}x, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{l}{4},\\[2mm] \dfrac{4h}{3l}(l-x), & \dfrac{l}{4}<x\leqslant l,\end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0.$$

因此为了寻求这个弦振动规律需求下列定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (0<x<l,\ t>0),\\ u(0,t)=u(l,t)=0, & (t\geqslant 0),\\ u(x,0)=\varphi_0(x), & \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0, & (0\leqslant x\leqslant l).\end{cases}$$

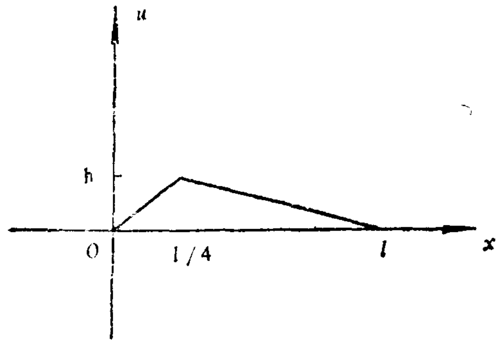

图1.3

在区域 $\Omega=[0,l]\times[0,+\infty)$ 上由方程(1.4)、初始条件(1.5)和(1.6)以及边界条件(1.7)—(1.9)中的任意一个组成的定解问题称为弦振动方程的**混合问题**。

如果对于弦上的某一段，在所考虑的时间内，弦的端点影响可以忽略不计，这时候我们可以认为弦长是无穷长的，就不必考虑边界条件。我们把区域 $\Omega=(-\infty,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上，由方程(1.4)和初始条件(1.5)、(1.6)组成的定解问题称为弦振动方程的**初值问题**(或 Cauchy 问题)。

方程(1.4)不仅用来表达弦的横振动，而且还能刻划其它的工程和物理实际问题，例如均匀细杆在外力作用下沿着杆的方向作微小纵向振动。我们取杆的方向为 x 轴，用 $u(x,t)$ 表示 x 处截面在 t 时刻沿着杆方向的位移，我们可根据虎克(Hooke)定律(正应力与线应变 ε 成正比，即 $\sigma=E\varepsilon$，E 是弹性模量)，用类似方法可推出 $u(x,t)$ 满足方程(1.4)。弦的横振动和纵振动都产生了波的传播，因此，方程(1.4)亦称为**一维波动方程**，这里维数是对空间变量而言的。

(2) 膜的横振动和高维波动方程　今考虑一个均匀的膜，它张紧在平面某一闭曲线 c 上。当它受到与膜所在平面垂直的外力

作用时，开始作微小横振动。假设运动方向与平面垂直，我们要求膜上各点的位移随时间变化规律。

我们取膜静止时所在平面为 xoy 平面，用函数 $u=u(x,y,t)$ 表示膜在点 (x,y) 处在时刻 t 的运动位移。当受外力作用时，由于膜的张力作用，膜产生往返上下运动，在运动过程中膜上各点的位移、加速度、张力等都在不断变化，但它们遵循物理的规律，我们应用它来建立函数 $u=u(x,y,t)$ 所满足的偏微分方程。

这里所指的膜是不能抵抗弯曲和切变的平面薄片。我们假设膜的振动是微小的，故可认为

$$|u_x|,\quad |u_y|\ll 1, \tag{1.10}$$

因此在下列计算过程遇到 u_x, u_y 的二次项均略去不计。

我们首先证明张力密度 $\vec{T}$（单位长度的力）的数值 $|\vec{T}|$ 与时间 t 无关，为此，于时刻 t 在运动的膜上任取一块小曲面，它在平面 xoy 上的投影为 δ，由此可得膜振动后面积的改变量为

$$\iint_\delta \sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\,dxdy-\iint_\delta dxdy$$

$$=\iint_\delta\left(\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}-1\right)dxdy=\iint_\delta\left(\frac{1}{2}u_x^2+\frac{1}{2}u_y^2+\cdots\right)dxdy,$$

故可略去不计，根据虎克定律，使膜面积改变所需的张力大小变化也可略去不计，因此膜上各点处张力大小与时间无关。这说明在运动过程中，由于我们假设膜的振动是微小的，因此张力的大小是原来膜张紧时所产生的，不随运动过程而变化，但现在我们还只能说 $|\vec{T}|$ 与点 (x,y) 有关，即

$$|\vec{T}|=|\vec{T}(x,y)|,$$

而 $\vec{T}$ 的方向在运动过程中始终是变化的。

为了研究膜的运动方程，我们需要进一步分析张力 $\vec{T}$ 的作