

W

UXIN MOXIAO

· 钱安宇 ·

无心磨削

无 心 磨 削

钱 安 宇

青 海 人 民 出 版 社

责任编辑：王绍先
封面设计：张永方

无 心 磨 削

钱 安 宇

青海人民出版社出版

(西宁市西关大街96号)

青海省新华书店发行 青海新华印刷厂印刷

开本：787×1092毫米1/16 印张：12 字数：286,000

1982年2月第1版 1982年2月第1次印刷

印数：1—3,000

统一书号：15097·78 定价：1.25元

前 言

无心磨削作为机械加工中高效率的磨削方法，正在轴承、汽车、拖拉机、机床、工具、油泵油嘴、纺织机械、航空、电机和仪表制造等行业得到日益广泛的应用。它的普及已到了这样的一种程度：不要说大、中企业，就是每一个机械加工的小工厂，都有无心磨床或采用无心磨削工艺方法。因而，无心磨削的本质是什么？怎样才能达到更高的精度要求？怎样才能充分发挥无心磨削的高效率？当前我国无心磨削工艺已达到什么样的水平？等等，已成为每个与无心磨削有关的工人、检验员、工程技术人员、机械制造专业师生，以及从事这方面研究的科研人员十分关心的问题。笔者根据有关理论、国内外的经验、资料及自己研究的点滴成果，尝试性地写了这本书，以图回答这些问题。如能对读者有所裨益，笔者的目的也就达到了。

本书共分五章。第一、第二章着重探讨了无心磨削的有关理论问题，内容包括无心磨床磨削及无心固定支承磨削两者的成圆理论、力学分析、进给误差，无心磨床托板变形计算，磨削圆锥体工件时托板角度的正确设计，导轮的精确修整，工件圆度误差在V型块上的测量等。这两章主要为无心磨削设计、使用单位技术人员及从事这方面研究的科研人员所写，也可作为大专院校机械制造专业有关无心磨削部分的教学参考资料。

第一章的部分内容，取名为“*The Rounding Off Theory of Centerless Grinding*”，已在国际级杂志*Machine Tool Design and Research*（机床设计与研究）1981年（Vol.21）第一期上发表。

第三、四章主要介绍了无心磨床的典型结构和今后的发展趋势，以及无心磨床的调整方法。主要为无心磨床操作工人所写。在写这两章时，叙述力求浅显易懂，使具有初中文化程度和一定生产实践经验的工人就能理解。

最后一章（第五章）是无心磨削工艺。主要介绍了无心磨床上最基本的各类零件的磨削方式，以及国内工厂在实现单机半自动化和自动化方面已经做出的一些工作。

本书对提高无心磨削精度、光洁度、生产率和扩大无心磨削使用范围都有一定帮助。

在本书写作过程中，无锡机床厂磨床研究所、一机部洛阳轴承研究所有关同志大力支持，提供了宝贵资料，最后由洛阳轴承研究所的曹永福同志审稿，提出了许多宝贵意见，笔者在此一并致以谢意。

钱 安 宇

1981年11月

目 录

第一章 无心磨削成圆理论	1
第一节 圆度误差用三角级数表示以及圆度误差的杠杆假设.....	1
第二节 磨削区几何形状与圆度误差的关系.....	7
第三节 根据磨圆系数选用最佳磨削几何区域.....	14
第四节 影响圆度误差的其他因素及圆度误差与光洁度的区分.....	22
第五节 成圆理论在无心固定支承磨削中的应用.....	29
第六节 V型块测量工件圆度误差.....	42
第七节 磨削时几何区域的变化及无心磨削的进给误差.....	49
第二章 力学分析、托板设计及导轮的修整	54
第一节 无心磨床磨削的力学分析.....	54
第二节 无心固定支承磨削的力学分析.....	63
第三节 托板的刚度及托板在磨削时的变形.....	70
第四节 磨削圆锥体工件时托板垂直倾角的设计及托板水平偏角的调整.....	83
第五节 无心磨床导轮的修整及导轮前倾对磨削区几何形状的影响.....	87
第三章 无心磨床的典型结构及其发展方向	106
第一节 M1050 A型 无心磨床.....	106
第二节 无心磨床的先进结构及其发展方向.....	118
第四章 无心磨床的调整	130
第一节 砂轮的选择.....	130
第二节 砂轮的平衡及修整.....	135
第三节 导轮的选择及其修整.....	143
第四节 工件在磨削区域的调整.....	150
第五节 无心磨削缺陷及其消除方法.....	158
第五章 无心磨削工艺	161
第一节 圆柱形工件的贯穿磨削.....	161
第二节 普通无心磨床上的高光洁度磨削及无心研磨机的应用.....	167
第三节 台阶工件的横进给磨削.....	171
第四节 圆锥形工件的磨削.....	178
第五节 球面磨削及十字轴工件的磨削.....	183
参考资料	188

第一章 无心磨削成圆理论

在机床领域,无心磨床虽然是一种新的类型,但是,它的原理早在1853年加工滚针的时候就采用了。最早的磨床是单砂轮式,到1915年才有了导轮和托板。随着机械工业的不断发展,无心磨削原理应用的日益广泛,无心磨床品种的迅速增加,人们才开始对无心磨削圆度误差的理论有了新的认识。早在本世纪三十年代,就有研究这方面问题的理论文章发表,目前国内外仍有很多单位在研究它。

随着理论工作的进展及高精度无心磨床和新的无心磨削工艺方法的出现,无心磨削的精度、光洁度、生产率相应地都有了很大提高。如国内外某些型号无心磨床,在批量生产时工件磨后光洁度可达 $\nabla 12$,尺寸分散度控制在2微米以内,工件圆度误差达0.1微米以下。在轴承行业,磨削加工各道工序(除平面磨削外)均采用了无心磨削或无心支承磨削。这是轴承行业磨削工艺上的重大改革。

在无心磨床上磨削工件,影响工件圆度误差的因素很多,这里除磨削区几何形状(主要是托板支承斜面倾角和工件在磨削区安置中心高),工件原始圆度误差,磨削用量,磨削时砂轮对工件的相对振动,工件与导轮和托板的接触刚性等外,还有各种偶然因素:比如个别工件毛坯不规则,导轮或托板上粘附有砂轮粉末和磨屑而产生的圆度误差等等。

目前,对上面所讲的影响工件圆度误差的各种因素的研究,尤其是磨削区几何形状的研究比以前有了新的发展。具体表现在除对工件圆度误差进行支承误差复映分析外,还根据工件圆度误差的“杠杆假设”,作进一步的矢量分析,从而得到无心磨削几何区域稳定图。这样的研究,不但抓住了磨削区几何形状影响圆度误差的本质,而且在绘制无心磨削几何区域稳定图时,所需要的计算工作量也是最少的。本章关于无心磨削几何区域稳定图的理论研究结果与西德阿亨工业大学的研究报告^[2]相比,是一致的。但是,对于国内的很多工厂来说,谐波 $i = 2 \sim 14$ 及 $i = 2 \sim 20$ 的两个稳定图则更有实用价值,而这两个稳定图则是西德阿亨工业大学报告中所没有的。

近年来,国内外除对磨削区几何形状进行研究外,还对其他影响工件圆度误差的因素进行了一定的单项试验和理论研究,并取得了有实用价值的数值、图表。对此,本章也将予以介绍。但对偶然因素产生的圆度误差,本章则不讨论。

基于无心固定支承磨削就是无心磨削的一种,本章也将给出无心固定支承磨削几何区域稳定图。另外,还将讨论工厂里常用的工件圆度误差用V型块测量的有关理论问题,本章最后一节则是无心磨削特有的进给误差问题。

第一节 圆度误差用三角级数表示以及圆度误差的杠杆假设

在讨论圆度误差时,将圆度误差写成三角级数形式是很有用的,其优点是,全部误差可运用单一的数学形式——三角函数表示。而三角函数则与工件成圆过程有着同样的特点,即

周期性。因此，这种表达方式，在磨圆效应分析中十分有益。工件的圆度误差相当复杂，常用的有偏心、椭圆、三次棱圆、五次棱圆等等。工件圆度误差要求愈高，往往要求考虑到更高数字的棱圆和椭圆上。下边看几个例子：

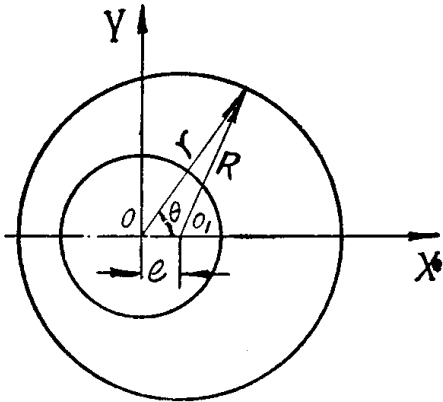


图1-1 偏心

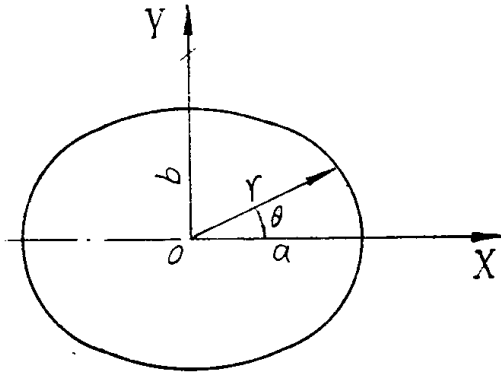


图1-2 椭圆

可以展开成三角级数的。所以，一般情形下，工件外圆的方程为：

$$r(\theta) = r_0 + \sum_{i=2}^{\infty} C_i \cos(i\theta + \alpha_i)$$

无心磨削时，被磨工件是按照“最或然”圆心成圆的，因此，偏心误差（力学术语称为一次谐波）在这里不考虑。

根据国家标准，工件圆度误差值 Δ 符合下列等式：

$$\Delta = r(\theta)_{\max} - r(\theta)_{\min}$$

由三角函数性质知道，当 $i = 2K - 1$ ($K = 1, 2, \dots$) 时，有：

$$C_{2K-1} \cos[(2K-1)\theta + \alpha_i] + C_{2K-1} \cos[(2K-1)(\theta + \pi) + \alpha_i] = 0$$

当 $i = 2K$ 时，有：

$$C_{2K} \cos(2K\theta + \alpha_i) + C_{2K} \cos[2K(\theta + \pi) + \alpha_i] = 2C_{2K} \cos(2K\theta + \alpha_i)$$

图1—1中，圆 O_1 半径为 R ，相对于圆 O 的偏心距为 e ，则偏心圆 O_1 的三角级数就可写为：

$$r(\theta) = R + e \cos \theta$$

图1—2中，椭圆的长半轴、短半轴分别为 a 和 b ，则三角级数可写为：

$$r(\theta) = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos 2\theta$$

图1—3中，三次棱圆是由六个圆弧相切所组成，设 R 和 R' 分别为这个三次棱圆的最小半径和最大半径处尺寸，则三角级数表达形式就为：

$$r(\theta) = \frac{R'+R}{2} + \frac{R'-R}{2} \cos 3\theta$$

上述这些表达形式非常简单，如果按照在本节末将要介绍的三角级数求系数的数学公式进行运算，发现虽然这些表达式是近似的，但它们的精确度，则是足够的。

一般地说，工件的半径 r 是圆心角 θ 的连续、单值，以 2π 为周期的函数。在磨削过程中，工件外圆上有缺口，这时被磨工件半径的函数可能有有限个第一类间断点，在数学上已经证明，这样的函数都是可以

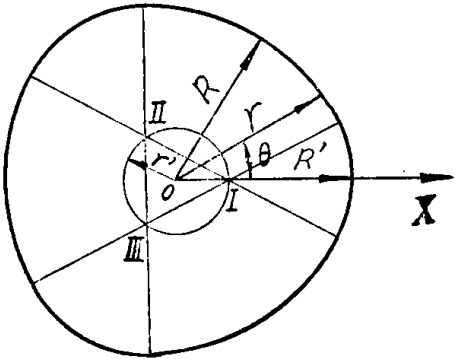


图1-3 三棱形

上面的等式说明，用直径法测量工件圆度误差时，不能测量奇数次谐波，只能测量偶数次谐波，而奇数次谐波则用V型块检查。我们这里把工件的偶数次谐波统称为椭圆度，奇数次谐波统称为棱圆度。

现在，我们举一个饶有趣味同时对今后分析又很有用的例子，即用圆周运动画圆度误差曲线，并在此基础上提出圆度误差的杠杆假设。

图1—4中，连杆长 $OO_1 = r_0$ ，以 $\theta = \omega t$ 的速度绕 O_1 点公转，同时，长度为 $OE = C_i$ 的误差杠杆以 $i\omega t$ 的速度绕 O 点旋转，也就是说误差杠杆上的点 E 既绕点 O_1 作公转，又以更快的速度绕点 O 作自转。这时，点 E 在平面上留下的轨迹就是三角级数 $r_0 + C_i \cos i\theta$ 表示的圆度曲线。显然，整个圆的圆度误差大小仅取决于误差杠杆 OE 的长短，而与 OE 所处位置的方向则无关系。

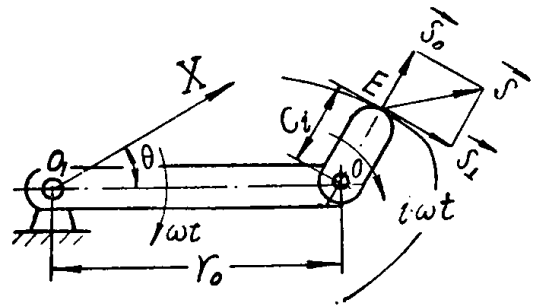


图1—4

如果要改变 E 点所画成的曲线的圆度误差，从整体来说，关键是改变 OE 的大小。因此，如果有矢量 $\vec{S}$ 作用在杠杆 OE 上，则可把矢量 $\vec{S}$ 分解成与杠杆 OE 平行的分量 $\vec{S}_\parallel$ 及与杠杆 OE 垂直的分量 $\vec{S}_\perp$ ，显然 $\vec{S}_\perp$ 也会影响 E 点在这一瞬时、这一位置所画成的曲线的圆度误差。但对整个圆的圆度误差而言，只有 $\vec{S}_\parallel$ 才有影响， $\vec{S}_\perp$ 不考虑。

圆度误差杠杆假设，对无心磨削几何区域稳定图的研究来说，十分重要。因为它是近年来研究无心磨削几何区域对工件圆度误差影响的转折点。

下面，根据三角级数求系数的数学公式，推导出图1—1、图1—2、图1—3的简化三角级数表达式。固然这样的数学推导，并不是每一个读者都需要，但鉴于圆度误差的三角级数表示是无心磨削几何区域稳定图的基础，而一般的数学分析书中又没有这方面的例题，所以，这样的数学推导会使读者对图1—1、图1—2、图1—3的简化表达式有一个更清晰的概念，同时，对于正确的应用它们则有所帮助。

看图1—1的偏心情形，在 $O-XY$ 坐标中可以列出圆 O_1 的方程为：

$$(x - e)^2 + y^2 = R^2$$

因为：

$$y = r \sin \theta$$

$$x = r \cos \theta$$

代入方程，得：

$$r(\theta) = e \cos \theta + R \sqrt{1 - \left(\frac{e}{R}\right)^2 \sin^2 \theta}$$

这方程是圆 O_1 相对于中心 O 和 OX 轴的极坐标方程。把上述方程按如下三角级数形式展开：

$$r_0 + \sum_{i=1}^n C_i \cos i\theta$$

得到求 r_0 和 C_1 的数学公式如下:

$$r_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r(\theta) d\theta$$

$$C_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} r(\theta) \cdot \cos \theta d\theta$$

为了能方便地计算 r_0 、 C_1 ，把 $r(\theta)$ 方程在区间 $[0, 2\pi]$ 内用幂级数展开，因为这个级数是收敛的，所以可把这个级数逐项积分，再由这个积分所得的级数计算积分值。

下面运算:

$$\begin{aligned} r(\theta) &= e \cos \theta + R \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{e}{R} \right)^2 \sin^2 \theta - \frac{1}{2 \times 4} \left(\frac{e}{R} \right)^4 \sin^4 \theta - \dots \right] \\ &= e \cos \theta + R - \frac{e^2}{2R} \sin^2 \theta - \frac{e^4}{8R^3} \sin^4 \theta - \dots \end{aligned}$$

有:

$$r_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(e \cos \theta + R - \frac{e^2}{2R} \sin^2 \theta - \frac{e^4}{8R^3} \sin^4 \theta - \dots \right) d\theta$$

对于任意的正整数 K ，有:

$$\int_0^{2\pi} \cos K \theta d\theta = 0$$

另外,

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\sin^4 \theta = \frac{3 - 4\cos 2\theta + \cos 4\theta}{8}$$

.....

因此得:

$$r_0 = R - \frac{e^2}{4R} - \frac{3e^4}{64R^3} - \dots$$

分别求 C_1 :

求 C_1 :

$$C_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} r(\theta) \cdot \cos \theta d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(e \cos \theta + R - \frac{e^2}{2R} \sin^2 \theta - \frac{e^4}{8R^3} \sin^4 \theta - \dots \right) \cos \theta d\theta$$

因为:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 K \theta d\theta = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos K_1 \theta \cdot \cos K_2 \theta d\theta = 0 \quad (K_1 \neq K_2, \text{ 均为正整数})$$

所以有:

$$C_1 = \frac{1}{\pi} (e\pi + 0 - 0 - 0 - \dots) = e$$

求 C_2 :

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(e \cos \theta + R - \frac{e^2}{2R} \times \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^4}{8R^3} \times \frac{3 - 4\cos 2\theta + \cos 4\theta}{8} - \dots \right) \cos 2\theta d\theta \\ &= \frac{e^2}{4R} + \frac{e^4}{16R} + \dots \end{aligned}$$

因为 $\sin^{2K} \theta$ 展开式符合下列关系:

$$\begin{aligned} 2^{2K-1} \times (-1)^K \sin^{2K} \theta &= \cos 2K\theta - 2K \cos 2(K-1)\theta \\ &\quad + \frac{2K(2K-1)}{1 \times 2} \cos 2(K-2)\theta \\ &\quad + \dots + (-1)^{2K-m} \times \frac{2K(2K-1)\dots(2K-m+1)}{m!} \\ &\quad \times \cos 2\left(K - \frac{m}{2}\right)\theta + \dots + (-1)^K \times \frac{2K(2K-1)\dots(K+1)}{2 \times K!} \end{aligned}$$

所以 $\sin^{2K} \theta$ 的展开式中不包含有 $\cos 3\theta, \cos 5\theta, \dots, \cos(2i-1)\theta, \dots$, 这样的单项。因此, 容易得到:

$$C_3 = C_5 = \dots = C_{2i-1} = \dots = 0$$

另外,

$$C_4 = -\frac{e^4}{64R^3} - \dots$$

由此可得到偏心圆 O_1 的三角级数如下:

$$\begin{aligned} r_0 + \sum_{i=1}^n C_i \cos i\theta &= \left(R - \frac{e^2}{4R} - \frac{3e^4}{64R} - \dots \right) \\ &\quad + e \cos \theta + \left(\frac{e^2}{4R} + \frac{e^4}{16R^3} + \dots \right) \cos 2\theta \\ &\quad - \left(\frac{e^4}{64R^3} + \dots \right) \cos 4\theta + \dots \end{aligned}$$

式中, 考虑到 $e \ll R$, e^2/R 相对于 e 是一个很微小的量, 因此, 忽略高阶小量就可得到偏心圆 O_1 的三角级数为:

$$R + e \cos \theta$$

现举例作进一步说明。如 $R = 10$ 毫米, $e = 0.1$ 毫米 (即同心度的径向跳动量为 0.2 毫米), 就可以用表达式 $10 + 0.1 \cos \theta$ 代替原来的偏心圆方程。这时虽然表达式简化所产生的最大误差为 $\frac{e^2}{2R} = 5 \times 10^{-4}$ 毫米, 但它仅是偏心 e 数值的 0.5% 。实际应用上, 则是完全允许的。

对于图1—2中的椭圆, 其方程为:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

假设: $a = (1 + \beta) b$, 则 $\beta b = a - b$ 就是工件的圆度误差值。显然, β 是一个微量。

定义: $d^2 = a^2 - b^2$

把 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ 代入椭圆方程, 可得到极坐标方程:

$$r(\theta) = \frac{a b}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}} = \frac{b}{\sqrt{1 - \frac{d^2}{a^2} \cos^2 \theta}}$$

用幂级数展开:

$$r(\theta) = b \left(1 + \frac{d^2}{2a^2} \cos^2 \theta + \frac{3}{2 \times 4} \times \frac{d^4}{a^4} \cos^4 \theta + \dots \right)$$

因为:

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$\cos^4 \theta = \frac{3 + 4 \cos 2\theta + \cos 4\theta}{8}$$

.....

所以:

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{b}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{d^2}{2a^2} \cos^2 \theta + \frac{3d^4}{8a^4} \cos^4 \theta + \dots \right) d\theta \\ &= b + \frac{b}{4a^2} d^2 + \frac{9b}{64a^4} d^4 + \dots \end{aligned}$$

同样, 在 $\cos^{2K} \theta$ ($K = 1, 2, \dots$) 的展开式中不会有 $\cos \theta, \cos 3\theta, \dots, \cos (2i-1)\theta, \dots$, 这样的单项, 所以,

$$C_1 = C_3 = \dots = C_{2i-1} = \dots = 0$$

另外,

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{b}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{d^2}{2a^2} \cos^2 \theta + \frac{3d^4}{8a^4} \cos^4 \theta + \dots \right) \cos 2\theta d\theta \\ &= \frac{b}{4a^2} d^2 + \frac{3b}{16a^4} d^4 + \dots \end{aligned}$$

$$C_4 = \frac{b}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{d^2}{2a^2} \cos^2 \theta + \frac{3d^4}{8a^4} \cos^4 \theta + \dots \right) \cos 4\theta d\theta$$

$$= \frac{3b}{64a^4} d^4 + \dots$$

这样，整个椭圆的三角级为：

$$\left(b + \frac{b}{4a^2} d^2 + \frac{9b}{64a^4} d^4 + \dots \right) + \left(\frac{b}{4a^2} d^2 + \frac{3b}{16a^4} d^4 + \dots \right)$$

$$\cdot \cos 2\theta + \left(\frac{3b}{64a^4} d^4 + \dots \right) \cos 4\theta + \dots$$

因为，

$$\frac{d^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{1}{(1+\beta)^2} \approx 2\beta - \frac{3}{4}\beta^2$$

β^2 项是高阶微量，忽略不计。所以：

$$\frac{b}{4a^2} d^2 \approx \frac{\beta}{2} b = \frac{a-b}{2}$$

另外，

$$\frac{9b}{64} \times \frac{d^4}{a^4} \approx \frac{9}{64} (2\beta)^2 \cdot b = \frac{9b}{16} \beta^2$$

即 $\frac{9b}{16} \beta^2$ 是高阶微量，忽略不计。因此，椭圆的三角级数就取：

$$\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos 2\theta$$

如 $b=10$ 毫米， $a=10.1$ 毫米，可以用三角级数 $10.05 + 0.05 \cos 2\theta$ 代替椭圆方程，这时产生的最大误差（在 $\theta = 45^\circ$ 处）为 $\frac{3}{8} b (\beta a)^2 = 3.75 \times 10^{-4}$ 毫米，它是工件椭圆度误差的 0.38%。

图1—3中的三次棱圆是由六段圆弧相切而成，三圆心 I、II、III 均匀分布在以 O 为圆心、 r' 为半径的圆周上，每一圆心上作两段圆弧，大圆弧半径为 $R+r'$ ，小圆弧半径为 $R'-r'$ （ R 、 R' 分别为三次棱圆的最小、最大半径），这样的三次棱圆的三角级数展开式实际上就类似于图1—1偏心圆的情形，它的简化表达式为：

$$\frac{R'+R}{2} + \frac{R'-R}{2} \cos 3\theta$$

第二节 磨削区几何形状与圆度误差的关系

无心磨削是由工件本身侧母线支承加工的，它的成圆过程有下列特点：一方面，被磨工件在磨削之前有原始圆度误差，磨削时，原始误差会在砂轮与工件接触过程中复映出来；另一方面，工件在整个圆周上的磨削余量不能一下子被磨去，而是工件在旋转过程中逐点逐点地磨去。这样，磨削过程中，工件表面被磨处和原始毛坯连接处有一定的不平度，这不平的连接处与托板、导轮逐步接触后又对工件产生新的圆度误差（图1—5）。

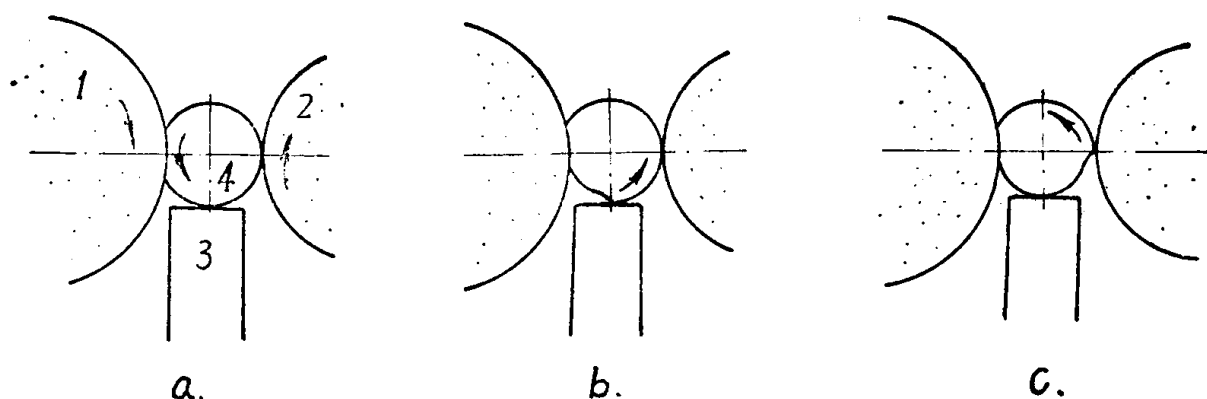


图1—5 无心磨削时圆度误差的产生

a. 开始磨削 b. 不平处旋转至托板 c. 不平处旋转至导轮
1. 砂轮 2. 导轮 3. 托板 4. 工件

因而，无心磨削是一个不断产生圆度误差又不断消除圆度误差的过程。只有当磨削区域选择恰当，使消除圆度误差的“能力”胜过产生圆度误差“能力”的时候，才有可能获得高精度的磨削效果。

下面，为了简化问题的讨论，我们把工件与砂轮、导轮、托板三者之间的接触均看作是点接触。当然，实际的情况并不是这样，而是工件在被磨削处不但有磨削圆弧存在，而且由于导轮的弹性，工件与导轮亦不会是点接触。但是大量的实践已经证明了，根据这样的简化所得到的结果是可行的。

一、被磨工件与砂轮、导轮、托板之间的几何关系

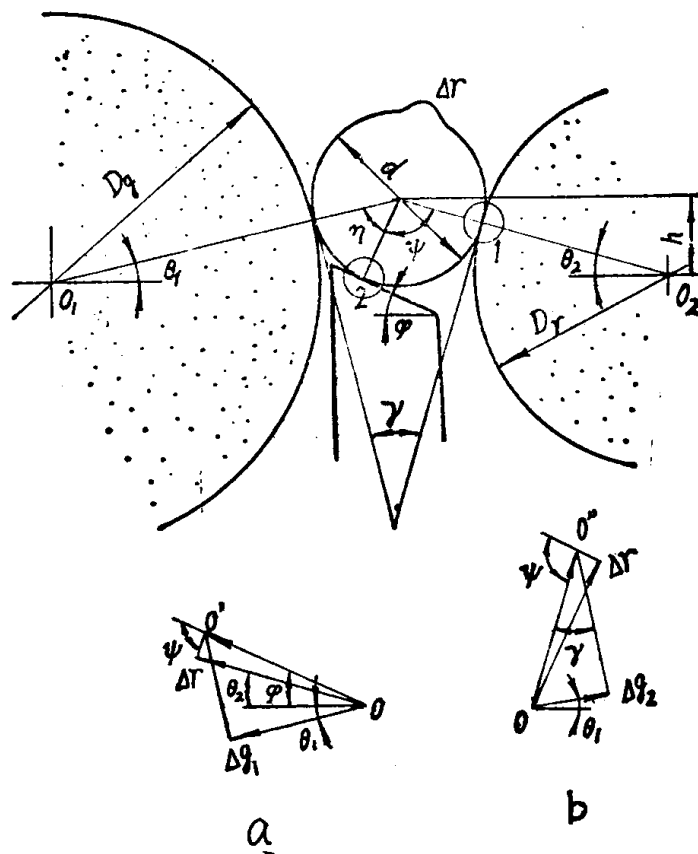


图1—6

a. $\angle r$ 在1处 b. $\angle r$ 在2处

图1—6表示了工件与砂轮、导轮、托板之间的几何关系。虽然，工件直径在磨削时会减少，即使会使几何关系改变，但变化量很小，可以忽略不计。因此，有：

$$\sin \theta_1 = \frac{2h}{D_s + d}$$

$$\sin \theta_2 = \frac{2h}{D_r + d}$$

$$\gamma = \theta_1 + \theta_2 = \pi - (\eta + \psi)$$

$$\eta = \frac{\pi}{2} - \varphi - \theta_1$$

$$\psi = \frac{\pi}{2} + \varphi - \theta_2$$

式中，

D_s 、 D_r 、 d ——分别为砂轮、导轮和工件的直径；

φ ——托板支承斜面与水平面之间夹角；

γ ——切削角；

θ_1 、 θ_2 ——分别为工件中心与砂轮中心或导轮中心连线和砂轮、导轮中心连线之间夹角；

η 、 ψ ——分别为工件中心与砂轮中心或导轮中心连线和托板斜面法向之间夹角。

一般情况下，因为 γ 值不大， $d \ll D_s$ 、 D_r 。所以，可以认为：

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} \approx \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} \approx \frac{D_r + d}{D_s + d} \approx \frac{D_r}{D_s} = \text{常数}$$

因此，磨削区几何形状就由下列三个数值确定：（1）、切削角 γ ；（2）、托板支承斜面倾角 φ ；（3）导轮和砂轮直径比 D_r/D_s 。

调整机床时，确定工件在磨削区的位置，一般不测量切削角 γ ，而只测量工件中心高 h 。从上式易见， h 和 γ 之间符合下列关系式：

$$\gamma = \theta_1 + \theta_2 = 2h \left(\frac{1}{D_s + d} + \frac{1}{D_r + d} \right) \quad (\gamma \text{ 单位：弧度})$$

或：

$$h = \frac{\pi \times \gamma}{360} \times \frac{(D_s + d)(D_r + d)}{D_s + D_r + 2d} \quad (\gamma \text{ 单位：度})$$

二、导轮、托板对磨削深度的影响（即支承误差复映）

假设工件上有一凸点 Δr （图1—6），当凸点与导轮接触时（图1—6中1处），凸点 Δr 欲使工件中心 O 沿与导轮接触的法线方向移动，但由于托板的存在，实际上工件中心 O 是沿托板斜面移动至 O' ，则：

$$OO' = \frac{\Delta r}{\sin \psi}$$

由于 $\vec{OO'}$ 在工件与砂轮接触点法线方向上投影为 Δg_1 ，因此：

$$\Delta g_1 = |\vec{OO'}| \cos(\varphi + \theta_1) = |\vec{OO'}| \sin \eta = \Delta r \frac{\sin \eta}{\sin \psi}$$

同样, 当凸点 Δr 在与托板接触时(图1—6中2处), 实际的工件中心位移为 OO'' , 则,

$$OO'' = \frac{\Delta r}{\sin \psi}$$

由于 $\vec{OO''}$ 在工件与砂轮接触点法线方向上投影为 Δg_2 , 因此,

$$\Delta g_2 = |\vec{OO''}| \sin \gamma = |\vec{OO''}| \sin(\eta + \psi) = \Delta r \frac{\sin(\eta + \psi)}{\sin \psi}$$

应该注意, Δg_2 与 Δg_1 方向是相反的, $\Delta r > 0$ 时, Δg_2 使磨削深度减少, 而 Δg_1 使磨削深度增加。

前面已经讲过, 对于任意单值、连续或虽不连续, 但只有有限个第一类间断点的函数, 都能展开成三角级数, 也就是说在磨削过程的任意瞬时, 都可以把工件外圆形状看成由下列三角级数所组成:

$$r(\theta) = r_0 + \sum C_i \cos(i\theta + \alpha_i)$$

如果被磨工件圆心 O 在磨削过程中不动、工件磨削深度大于工件原始的圆度误差时, 则工件磨后的圆度误差就为零。工件的磨削深度就能写为:

$$\Delta r(\theta) = \Delta r_0 + \sum C_i \cos(i\theta + \alpha_i)$$

这是我们指望的理想情形, 但实际上, 工件的磨削深度还要受导轮与托板的影响。

因为工件与导轮的接触点及工件与砂轮的接触点相差一个 $(\eta + \psi)$ 角, 因此在磨削的任意瞬时, 1处的工件外圆形状就是:

$$r_0 + \sum C_i \cos[i(\theta - \eta - \psi) + \alpha_i]$$

传递磨削深度为:

$$\Delta g_1 = \frac{\sin \eta}{\sin \psi} \{ \Delta r_0 + \sum C_i \cos[i(\theta - \eta - \psi) + \alpha_i] \}$$

同样, 工件与托板的接触点及工件与砂轮的接触点差一个 η 角, 因此, 在2处的外圆形状就是:

$$r_0 + \sum C_i \cos[i(\theta - \eta) + \alpha_i]$$

传递磨削深度为:

$$\Delta g_2 = \frac{\sin(\eta + \psi)}{\sin \psi} \left\{ \Delta r_0 + \sum C_i \cos[i(\theta - \eta) + \alpha_i] \right\}$$

由于 Δg_2 与 Δg_1 方向相反, 考虑总的磨削深度时, Δg_2 应取“—”号。

综上所述, 得知工件实际磨削深度为三者之和:

$$\begin{aligned} \Delta r(\theta) = & \Delta r_0 \left[1 + \frac{\sin \eta}{\sin \psi} - \frac{\sin(\eta + \psi)}{\sin \psi} \right] + \sum C_i \cos(i\theta + \alpha_i) \\ & + \sum \frac{\sin \eta}{\sin \psi} C_i \cos[i(\theta - \eta - \psi) + \alpha_i] \\ & - \sum \frac{\sin(\eta + \psi)}{\sin \psi} C_i \cos[i(\theta - \eta) + \alpha_i] \end{aligned}$$

上面分析, 工程上一般称为工件支承误差复映, 在所得的磨削深度计算公式中, 与 Δr_0 有关的第一项对工件的圆度误差影响不大, 而与 Δr_0 无关的后面三项, 尤其是最后二项, 则对工件磨后的圆度误差影响极大。而以前的研究把后面二项进行三角运算, 结果是: 仅在谐

波 $i=2\sim 7$ 范围内“同时有效地消除各奇数和偶数棱圆度的条件不多”〔1〕，对高次谐波没有作研究，无法给出 $i=2\sim 40$ 次谐波的无心磨削几何区域稳定图，所以与实际生产情况有很大距离。这里我们根据前面圆度误差的杠杆假设，进一步对同周期的三项三角函数进行矢量分析，指出三项三角函数中，只有一部分与整个圆的圆度误差有关，而其余部分则与整个圆的圆度误差无关，从而把以前的研究工作向前推进了一大步。

三、磨圆系数 A_i 和无心磨削几何区域稳定图

如单独取磨削深度公式中同一次谐波来考虑，即假设第 i 次谐波的磨削深度为 S'_i ，则

$$S'_i = C_i \cos(i\theta + \alpha_i) + \frac{\sin \eta}{\sin \psi} C_i \cos [i(\theta - \eta - \psi) + \alpha_i] - \frac{\sin(\eta + \psi)}{\sin \psi} C_i \cos [i(\theta - \eta) + \alpha_i]$$

通过三角函数运算，上式不难写成：

$$S'_i = S_i \cos(i\theta + \delta_i)$$

不同相位角的三角函数相加，可以利用矢量来表示（见图1—7）。

$$\vec{S}_i = \vec{C}_i + \vec{C}_i \Delta_{\epsilon 1} + \vec{C}_i \Delta_{\epsilon 2}$$

由于假设工件与砂轮是点接触，因此我们始终把 $\vec{C}_i$ 看作与 OO_1 同方向，而把转角起始位

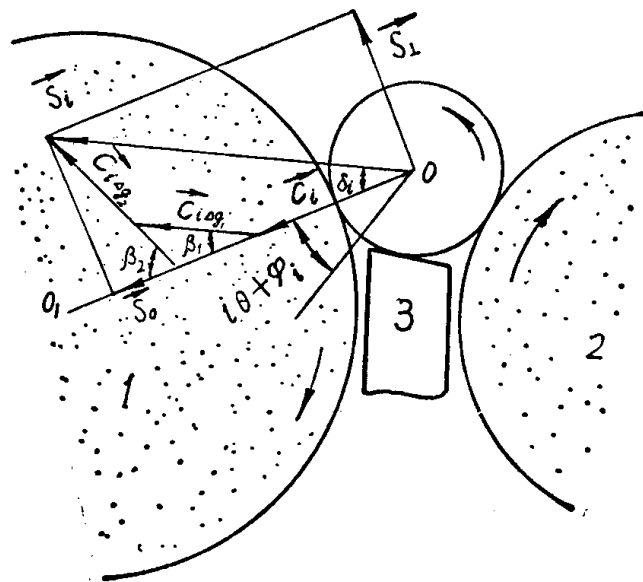


图1—7

1. 砂轮 2. 导轮 3. 托板

置看作与工件一起旋转，另外，把矢量 $\vec{S}_i$ 分解成沿原始误差 $\vec{C}_i$ 方向的 $\vec{S}_\parallel$ 和垂直于原始误差 $\vec{C}_i$ 方向的 $\vec{S}_\perp$ 两分量，因此有：

$$\vec{S}_i = \vec{S}_\parallel + \vec{S}_\perp$$

$$\tan \delta_i = \frac{S_\perp}{S_\parallel}$$

考虑到以前 η 、 $(\eta + \Psi)$ 角是取的负值, 因此,

$$\beta_1 = 2n\pi - i(\eta + \Psi)$$

$$\beta_2 = 2n\pi - i\eta \quad (n: \text{工件转数})$$

$$\begin{aligned} S_i &= C_i \left[1 + \frac{\sin \eta}{\sin \Psi} \cos \beta_1 - \frac{\sin(\eta + \Psi)}{\sin \Psi} \cos \beta_2 \right] \\ &= C_i \left[1 + \frac{\sin \eta}{\sin \Psi} \cos i(\eta + \Psi) - \frac{\sin(\eta + \Psi)}{\sin \Psi} \cos i\eta \right] \end{aligned}$$

及:

$$\begin{aligned} S_{\perp} &= C_i \left[\frac{\sin \eta}{\sin \Psi} \sin \beta_1 - \frac{\sin(\eta + \Psi)}{\sin \Psi} \sin \beta_2 \right] \\ &= C_i \left[\frac{\sin(\eta + \Psi)}{\sin \Psi} \sin i\eta - \frac{\sin \eta}{\sin \Psi} \sin i(\eta + \Psi) \right] \end{aligned}$$

从上式可见, 单一谐波的相位角 δ_i 仅取决于磨削区的几何形状。另外, 根据圆度误差杠杆假设可知, 磨深 $\bar{S}$ 直接影响工件的圆度误差 (注: 图1—7中 $\bar{S}$ 与图1—4不同, 它已包括误差杠杆本身长度在内, 但对应用圆度误差杠杆假设无影响), 而 $\bar{S}_{\perp}$ 则不影响整个圆的圆度误差。

下面, 讨论与圆度误差有关的磨削深度 S_i 。

$$\frac{S_i}{C_i} = 1 + \frac{\sin \eta}{\sin \Psi} \cos i(\eta + \Psi) - \frac{\sin(\eta + \Psi)}{\sin \Psi} \cos i\eta = 1 + A_i$$

其中,

$$A_i = \frac{\sin \eta}{\sin \Psi} \cos i(\eta + \Psi) - \frac{\sin(\eta + \Psi)}{\sin \Psi} \cos i\eta \quad \dots\dots\dots (1-1)$$

式中, A_i 被称为工件第 i 次谐波的磨圆系数, 其值取决于 η 、 Ψ 角的选择。

分几种情形讨论:

1. $A_i = -1$, 即 $S_i = C_i(1 + A_i) = 0$ 。这时工件与砂轮接触点法线方向的原始圆度误差 $C_i \cos(i\theta + \alpha_i)$ 全部保留, 因此工件磨削以后的圆度误差没有得到改善。

2. $A_i < -1$, 这时 $\delta_i > 90^\circ$, 也就是说, 当工件原始圆度误差最高点和砂轮接触时, 工件中心要向离开砂轮的方向移动; 反之, 当工件原始圆度误差最低点和砂轮接触时, 工件中心要向接近砂轮的方向移动, 这时, 我们把被磨工件所处的状态称为磨削不稳定状态。

3. $A_i > -1$, 即 $1 + A_i > 0$, $\bar{S}_i$ 与 $\bar{C}_i$ 同方向, 工件的圆度误差将得到改善。这时我们把被磨工件所处的状态称为磨削稳定状态。如果 A_i 接近于零, $\bar{S}_i$ 接近 $\bar{C}_i$, 工件原始圆度误差将很快被磨去, 这时磨圆效应最好。

为了方便的选择无心磨床最佳磨削区, 我们可以令 $A_i = -1$, 并在生产常用的磨削几何区域作出相应的封闭曲线图。在 $A_i \leq -1$ 部分打上阴影线。而阴影线区域内所标注的 i 数字, 说明该 i 次谐波在这区域处于磨削不稳定状态, 而那些没有阴影线的部分, 则对于各次谐波 i , 都处于磨削稳定状态。如讨论的谐波范围限在 $i = 2 \sim 40$, 则所得到的图我们称之为 $i = 2 \sim 40$ 范围内无心磨削几何区域稳定图 (图1—8)。应用此图时, 如工件直径不大或工件的圆度