高等学校教材

新编高等数学基础

（上 册）

湖北教育出版社

高等学校教材

新编高等数学基础

张岳生　童恩恕　周新国　主编
赵根榕　胡迪鹤　　　　　主审

（上册）

湖北教育出版社

内 容 提 要

《新编高等数学基础》在1989年全国高等工科院校应用数学专业数学分析与高等代数教材审稿会上审定通过，作为高等工科院校各类多学时专业的高等数学及线性代数的教材。全书分上、中、下和“解题导引”四册。上册的内容为一元微积分与常微分方程，中册的内容为线性代数与空间解析几何，下册为多元微积分与无穷级数，“解题导引”是按教材章节编排的习题及解答。本册分“极限与连续”、“导数与微分”、“不定积分与常微分方程初步”、“定积分”四章，书后附有“积分表”。

本书也可作为工程技术人员和数学爱好者的参考书。

新 编 高 等 数 学 基 础
（上　册）
张岳生　童恩恕　周新国
湖北教育出版社出版　新华书店湖北发行所发行
江西印刷公司排版　湖北省新华印刷厂印刷
850×1168毫米32开本　8印张　1插页　198 000字
1990年7月第1版　1990年7月第1次印刷
印数：1—4 100
ISBN 7—5351—0467—3/O·12
定价：2.15元

编者的话

传统的微积分和线性代数课程分别以连续变量的极限运算和离散变量的代数运算为研究对象，它们虽然各有特点，但其内在联系却十分紧密．例如，极限法则一旦建立，便具有代数运算的特征；多元微积分运用向量和矩阵的方法处理，不但简单易懂，而且便于记忆和运用．我们按照微积分和线性代数内容的内在联系，并将常微分方程、场论结合在一起，编写了这套新体系的教材——《新编高等数学基础》．在一元微积分中，运用微分算符的（代数）运算性质建立积分的（形式）运算法则；在线性空间中，通过内积概念讨论了R^3空间中几何体的位置关系；在多元微分学中，用内积和矩阵微积的方法形式地处理了多元纯量函数及向量函数的微分问题，并用二阶偏导数组成的Hessean矩阵讨论了多元极值问题；在曲线积分与曲面积分中，以向量微分元与积分算符的形式运算给出曲线积分与曲面积分的定义，并解决了有关计算；在傅里叶（Fourier）级数中，采用了内积记法，等等．这样以向量、矩阵为主线来处理微积分问题，观点新颖、推证简洁、运算准确，便于记忆和运用．

本书包含了国家教委工科数学教学指导委员会提出的《数学课程教学基本要求》中关于高等数学和线性代数的全部内容．书中标有＊号的内容可根据需要取舍．全部内容（包括习题课）可在230学时内授完．

在编写中，我们力求严谨准确、简明精炼、通俗易懂．为便于读者掌握高等数学的基本知识、基本运算和解决问题的基本能力，我们选配了一定数量的习题，专门编写了一本《新编高等数

学基础解题导引》，书中的全部习题均有解答．习题中还选编了近年来硕士研究生的部分入学试题解，供读者参考．

本书由长沙交通学院、西北大学、武汉工学院和福州大学四院校联合编写．西北大学赵根榕教授、武汉大学胡迪鹤教授对本书的编写工作给予了极大的支持，对原稿提出了许多宝贵意见．西安交通大学游兆永教授、华中理工大学王能超教授对本书给予了很大的关心和鼓励．编者所在的四所院校对教材编写和教学试验始终给予了热情关怀和支持．显而易见，缺以上任何一方，本书的顺利出版是难以想象的．寥寥数语，实在无法表达编者感激之情于万一．

本书虽经四校反复试教并参考国内外有关教材进行了数次修改，由于编者水平所限，一定还存在不少缺点和错误．我们殷切希望使用本教材的师生和广大读者批评指正．

1989年10月

目　录

第一章　极限与连续

第二章　导数与微分

第三章　不定积分与常微分方程

第四章　定 积 分

第一章　极限与连续

1·1　点列的极限

1·1·1　点集

一些对象的全体，如果有一种方法能判断任一对象是否属于这个全体，那么就称它为一个集合．组成一个集合的每个对象叫做该集合的元素或点．集合中的元素可以是一些数或几何上的点，也可以是任何别的事物，如某些函数或现象等等．通常集合用大写拉丁字母表示，元素用小写拉丁字母表示．元素x属于A、不属于A分别记作$x\in A$、$x\overline{\in}A$．

一个集合若不包含任何元素，则称之为空集合，空集记为$\varnothing$

具有某种性质p的元素x组成的集合A记为

$$A=\{x|x具有性质p\}$$

在讨论问题时，常涉及到全部元素组成的集合，讨论问题不会越出这个范围，这种集合称为全集或空间，常记作S．

设有集合A与B，若A的元素都属于B，即

$$x\in A\Longrightarrow x\in B$$

则称A为B的子集，记作$A\subset B$或$B\supset A$，读成A含于B或B包含A．若$A\subset B$且有x使$x\in B$但$x\overline{\in}A$，则称A为B的真子集．若$A\subset B$且$B\subset A$，则称A与B相等或相同，记作$A=B$．这一规定既是两个集合相同的定义，又是证明集合相等的方法．

我们已学过集合的交与并两种代数运算：

$$A\cup B\xlongequal{\triangle}\{x|x\in A或x\in B\},\quad A\cap B\xlongequal{\triangle}\{x|x\in A且x\in B\}$$

这里记号$\stackrel{\triangle}{=\!=}$表示“定义为”或“规定为”的意思．

集的交与并两种运算满足通常的交换律、结合律和分配律．特别地还满足

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$ （第二分配律）

$A\cup(A\cap B)=A\cap(A\cup B)=A$ （吸收律）

这在初等代数中不成立．可见，集合的代数运算不等同于数的运算．

集A中一切不属于B的元素所构成的集合称为A与B的差集，记作$A\setminus B$

$$A\setminus B=\{x|x\in A但x\bar{\in} B\}$$

注意，用$A\setminus B$时不要求$B\subset A$．此外，集的运算一般不能象数的四则运算那样变更运算的次序．例如

$(A\setminus B)\cup B=A\cup B$，而$(A\cup B)\setminus B=A\setminus B$

设在空间S中，集$A\subset S$，则$S\setminus A$称为A（关于S）的余集或补集，记作$\overline{A}$．补是差的特殊情况．显然有

$$\overline{\overline{A}}=A,\quad \overline{S}=\varnothing,\quad \overline{\varnothing}=S.$$

对集合的交或并再进行求补集运算，将出现一种对偶性质，如

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

现说明第二个等式．因为

$x\in\overline{A\cap B}\Longleftrightarrow x\bar{\in}(A\cap B)\Longleftrightarrow x\bar{\in} A$或 $x\bar{\in} B\Longleftrightarrow x\in\overline{A}$或$x\in\overline{B}\Longleftrightarrow x\in(\overline{A}\cup\overline{B})$

这表明原式右端包含左端，左端又包含右端，故两端相等．

上述对偶性质又称为De Morgan公式，其一般形式为：

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

对一个集A，有时需要了解A含有“多少个”元素，“多少”是一个计量的问题，我们在孩提时代就已经能够对简单的集合进行

这种计量．例如，a、b、c、d 各表示苹果，集合$A=\{a, b, c, d\}$ 包含多少个苹果？儿童是通过数指头的方法

$$\begin{array}{cccc} a, & b, & c, & d \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

进行计算的．这就是在A与自然数的连续排列的子集$N=\{1,2,3,4\}$之间建立了一种“一一对应”的关系，我们便认为集A包含4个元素．

设A、B为二集，若有一个法则使得对每个$x\in A$有唯一确定的一个$y\in B$与之对应，同时对每个$y\in B$也有唯一确定的一个$x\in A$与之对应，则称集A与B可建立1—1对应关系．集A与B一一对应意味着两集的元素“一样多”．

若集A与集$N_n=\{1, 2, \cdots, n\}$一一对应，则称A为有限集，这时A所含元素的个数是n．

不是有限集的集合称为无穷集，它包含无穷多个元素．“无穷多”也是一种数量概念．自然数就有无穷多个，还有许多集合所含元素和自然数“一样多”．例如，

正偶数集$A=\{2, 4, \cdots, 2n, 2n+2, \cdots\}$与自然数集$N$之间可如下建立1—1对应关系：

$$\begin{array}{cccccc} 2, & 4, & \cdots, & 2n, & 2n+2, & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1, & 2, & \cdots, & n, & n+1, & \cdots \end{array}$$

因此，我们认为正偶数的“总数”和自然数“一样多”．

一个无穷集与自然数集一一对应，则它的所有元素能按某种顺序进行排列(能够排成无穷序列的形式)，反之亦然．这种无穷集合我们称之为可列集或可数集．正偶数集就是一个可数集．

例1 有理数集Q是可数集．

证 有理数可写成q/p的形式，其中$p\neq 0$，p、q是整数．全

部有理数可以排成一个向右和向下都无限伸延的表，见下表.（表中第一行固定$p=1$，q取一切整数值，第二行$p=2$，q取一切整数值，…. 相重的只取一次）

0	1	-1	2	-2	…
1/2	$-1/2$	3/2	$-3/2$	5/2	…
1/3	$-1/3$	2/3	$-2/3$	4/3	…
1/4	$-1/4$	3/4	$-3/4$	5/4	…
⋮					

我们可按表中虚线所示顺序将它们排列如下：

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{2},\ -1,\ 2,\ \frac{3}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$$

故Q是可数集.

例1表明，自然数集扩充到有理数以后，其“总量”并未增加，仍然只有“可数个”. 但有理数集具有一个很突出的性质，即对任何两个有理数$r<s$，必有$r<\frac{r+s}{2}<s$. 由此推出，任何两个有理数之间存在无穷多个(实为可数个)有理数. 这称为有理数集的稠密性，它使得有理数具有广泛的应用并在历史上曾一度引起误解，似乎两个有理数之间是全部被有理数所充满而不存在任何空缺. 这也许是古希腊一些学派认为有理数集完美无缺而无需任何发展的原因吧.

我们知道，每个有理数q/p可以通过直尺和圆规的作图方法在数轴上找到“有理点”与它对应. 但反过来并非数轴上所有的点都是有理点，例如把腰长为1的等腰直角三角形的斜边放到数轴上，一端在原点，则另一端对应的点是$\sqrt{2}$，它就不是有理点. 这说明有理数集“不完备”. 还有$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$等等以及圆周率π都

不是有理数，而是无限不循环小数，叫做无理数．数轴上的点从而分为两类——有理点和无理点，它们的全体就是实数集合，记为 $R=(-\infty,\ +\infty)$．今后我们用 R 同时表示数轴与实数集合．

例2 实数集 R 与它的子集（0，1）一一对应．

证 考察定义于区间（0，1）上的函数

$$y=\operatorname{tg}\left(x-\frac{1}{2}\right)\pi$$

它的值域是 $(-\infty,\ +\infty)$．这个函数将（0，1）上的点与 R 的点之间建立了 1—1 对应关系．

例 2 说明，整个数轴上的点与区间（0，1）中的点是“一样多”，总数相同．这样，我们就可将全体实数的总数问题缩小到区间（0，1）范围内来讨论．

可以证明，区间（0，1）内的全体实数不可数．此结论的直接推论是：实数集 R 为不可数集．无理点集也是不可数的，因为，如果无理点集可数，那么实数集作为两个可数集的和集将是可数集．（见习题1·1第5(1)题）

无理数集不可数，这就更深刻地揭示了有理数集的不完备性：如果将全部有理数描在数轴上，则数轴上不是有理点的“空洞”简直多得不可排列．人类直到上一世纪才明白这一点，从而懂得我们不可能通过逐个地发现无理数来完成对实数的认识，必须运用科学的方法一次性地建立全部无理数．（这件事终于在19世纪60年代获得解决）

实数集是完备的，它把空洞都填满了，数轴上处处布满实数而不再有空隙．正是实数集的这种完备性，为我们以后在实数范围内用极限方法研究函数奠定了坚实的逻辑基础．

1·1·2 点列的极限

极限是高等数学中最重要的基本概念之一，也是研究函数的基本手段．在中学已学过数列极限有关知识，例如大家已知道

定义1·1 设有数列$\{x_n\}$及（实）常数a，若对任给的$\varepsilon>0$，可找到这样的自然数N，当$n>N$时，恒有$|x_n-a|<\varepsilon$，则称a为数列$\{x_n\}$的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\text{或}x_n\to a\ (\text{当}n\to\infty)$$

或称数列$\{x_n\}$收敛于a．若数列$\{x_n\}$不收敛于任何有限数，则称$\{x_n\}$发散．

今后我们用符号$\forall$表示for all，为“任取”、“对一切”之意，用符号$\exists$表示exist，为“存在”、“可找到”之意．

例3 用定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$．

证 $\forall\varepsilon>0$，要使$\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|=\dfrac{1}{n+1}<\varepsilon$，只须$n>\dfrac{1}{\varepsilon}-1$（不妨设$\varepsilon<1$，因为$|x_n-a|<\varepsilon$若在$\varepsilon<1$时成立，则在$\varepsilon\geqslant1$时亦成立）于是取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当$n>N$时便恒有$\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

例4 设$|q|<1$，求证$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$．

证 $\forall\varepsilon>0$，不妨设$\varepsilon<1$，欲使$|q^n-0|=|q|^n<\varepsilon$，即$n\lg|q|<\lg\varepsilon$只须$n>\lg\varepsilon/\lg|q|$便可，于是取

$$N=[\lg\varepsilon/\lg|q|]$$

则当$n>N$，恒有$|q^n|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$

对于描述极限的$\langle\varepsilon-N\rangle$语言，我们应掌握两点：

i）$\varepsilon>0$必须是任意的．直观上讲，$x_n\to a$就是x_n与a的距离可任意地小，即$|x_n-a|<$任何正数ε，我们不能用一个具体数取代ε．如$|x_n-a|<10^{-8}$不能表示$|x_n-a|$可以任意小．

ii）$\forall\varepsilon>0$，使$|x_n-a|<\varepsilon$成立的N是由ε决定的，ε较大则N较小．N多大无关紧要，关键是对任给的ε所要找的N必

须存在．如例 3 中取$N=[1/\varepsilon]$，也可取$N=[1/\varepsilon]+2$等等．

数列$\{x_n\}$是实数轴上的点列，含有可数项．数轴上一切与点a的距离小于ε的点所成之点集称为点a的ε邻域，记作$U(a,\ \varepsilon)$，它是a为中心ε为半径的开区间：

$$U(a,\ \varepsilon)=\{x\,|\,|x-a|<\varepsilon\}=(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$$

于是，$\{x_n\}$收敛于a的几何意义是：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时，一切$x_n\in U(a,\ \varepsilon)$．也就是说，从$n>N$起，全部点$x_n$进入$a$的$\varepsilon$邻域，而在此邻域之外，至多只有$\{x_n\}$的有限项$x_1$，$x_2\cdots x_N$．而且，不管这个邻域多么小，在此邻域外永远只能有有限项．据此，我们得出下述论断：

若存在某$\varepsilon_1>0$，在$U(a,\varepsilon_1)$以外有$\{x_n\}$的无穷多项，则$x_n\not\to a$．

例5 考察点列

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{7}{8},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \frac{2^n-1}{2^n},\ \cdots$$

它的通项$x_{2n}=\dfrac{1}{2^n}$，$x_{2n+1}=1-\dfrac{1}{2^n}$ $(n=0,1,2,\ \cdots)$．由于在点0的1/2邻域$U(0,\ 1/2)$以外和点 1 的1/2 邻域$U(1,1/2)$以外都存在着点列的无穷多个点，故$x_n\not\to 0$，且$x_n\not\to 1$，实际上，它是发散点列．

现在进一步讨论收敛点列的性质．

定理1·1 （唯一性）收敛点列的极限是唯一的．

证 设点列$\{x_n\}$同时收敛于A和B，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时，同时有$|x_n-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，$|x_n-B|<\dfrac{\varepsilon}{2}$．

其次，由$A-B=A-x_n+x_n-B$可得

$$|A-B|\leqq|x_n-A|+|x_n-B|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

常数A、B相差可任意小，必有$A=B$．

对于数列$\{x_n\}$，若有常数$M>0$使$|x_n|<M$对一切n成立，则称$\{x_n\}$有界，否则称$\{x_n\}$无界．显然$\{x_n\}$有界$\Longleftrightarrow\exists$常数$a$，$b$

使$a\leqslant x_n\leqslant b$，其中 a 、 b 分别称为$\{x_n\}$的下界、上界.

定理1·2 （有界性）收敛数列必有界.

证 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则对 $\varepsilon>0$ 必$\exists N$，当 $n>N_1$时有$|x_n-a|<\varepsilon_1$，从而有$|x_n|=|x_n-a+a|\leqq|X_n-a|+|a|<\varepsilon_1+|a|$，今取$M=\max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{N_1}|, \varepsilon_1+|a|\}$，则一切$x_n$满足$|x_n|\leqslant M$，故$\{x_n\}$有界.

有界性是数列收敛的必要条件，但非充分条件．例如，数列$\{(-1)^n\}$有界却不收敛.

例6 若$\{x_n\}$有界，$\{y_n\}$收敛于0，则数列$\{x_ny_n\}$也收敛于0．

证 $\forall\varepsilon>0$，$\{x_n\}$有界，则有 M 使 $|x_n|<M$ 恒成立．又因$\{y_n\}$收敛于0，故对$\dfrac{\varepsilon}{M}>0$，$\exists N$使$|y_n|<\dfrac{\varepsilon}{M}$对$n>N$恒成立．于是，当$n>N$亦有

$$|x_ny_n-0|\leqslant M\cdot|y_n|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$$

成立，此即$x_ny_n\to0$ $(n\to\infty)$.

定理1·3 （保号性）设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0$（或$a<0$），则$\exists N$，当$n>N$时，$x_n>0$（或$x_n<0$）.

证 因$\lim x_n=a$，故对一个特定的$\varepsilon_1=\dfrac{|a|}{2}>0$．必$\exists N$，对一切$n>N$有$|x_n-a|<\dfrac{|a|}{2}$．此即

$$a-\frac{|a|}{2}<x_n<a+\frac{|a|}{2}$$

若$a>0$，有 $x_n>a-\dfrac{a}{2}>0$；若$a<0$，便有 $x_n<a+\dfrac{-a}{2}=\dfrac{a}{2}<0$.

推论：若从某项起恒有$x_n>0$（或$x_n<0$），又$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$a\geqslant0$（或$a\leqq0$）.

推论的证明可采用反证法，由读者自己完成．

极限保号性的几何意义是明显的：若点列$\{x_n\}$的极限点a在原点的右方，则从某个N以后，一切点x_n也都跟着在原点的右方，保持与a的符号相同，这又叫强保号性．而若点列$\{x_n\}$本身在原点的右方，则它的极限点不能落到原点的左方去．充其量原点是极限点．$x_n=\frac{1}{n}$，$x_n\to 0$就是这种极端情况．定理1·3的推论又称为弱保号性．以后将看到，保号性在某些理论推导和不等式证明等方面有许多应用．

定理1·4（夹逼性）　设n大于某个N时，有$x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$，且有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则亦有$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$

证　$\forall\varepsilon>0$，因$x_n\to a$，$z_n\to a$，故$\exists N_1$及N_2，当$n>N_1$时，$|x_n-a|<\varepsilon$；当$n>N_2$时，$|z_n-a|<\varepsilon$，于是
当$n>N=\max\{N_1,N_2\}$时，便有

$$|x_n-a|<\varepsilon\text{及}|z_n-a|<\varepsilon$$

同时成立．即

$$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon,\quad a-\varepsilon<z_n<a+\varepsilon$$

同时成立，从而有

$$a-\varepsilon<x_n\leqslant y_n\leqslant z_n<a+\varepsilon$$

即　　$|y_n-a|<\varepsilon$成立．这就是说，$y_n\to a$，（$n\to\infty$时）．

例7　求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$．

解　记$y_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$，因为

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<y_n<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

及　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$，故$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=1$．

例8 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ $(a>0)$

证 先设$a>1$，并记$\alpha_n=\sqrt[n]{a}-1$. 因

$$a=(1+\alpha_n)^n=1+n\alpha_n+\frac{n(n-1)}{2!}\alpha_n^2+\cdots>1+n\alpha_n$$

故 $$0<\alpha_n<\frac{a-1}{n}$$

因为$\frac{a-1}{n}\to 0$，据夹逼性得$\alpha_n\to 0$，即$a\geqq 1$时有$\sqrt[n]{a}\to 1$.

其次，当$0<a<1$时，命$a_1=\frac{1}{a}>1$，有$\sqrt[n]{a_1}\to 1$,因而有

$$\sqrt[n]{a}=\frac{1}{\sqrt[n]{a_1}}\to 1.$$

定理1·5（四则运算法则） 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，则

i) $\lim(x_n\pm y_n)=\lim x_n\pm\lim y_n=a\pm b$

ii) $\lim x_n y_n=\lim x_n\cdot\lim y_n=a\cdot b$

iii) $\lim\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim x_n}{\lim y_n}=\frac{a}{b}$ $(b\neq 0)$

以上定理均由定义直接推出，不难证明．但它们尚未能回答下面两个有关极限的基本问题．

第一，给定一个数列$\{x_n\}$，何时它是收敛的？换言之，收敛的数列具有什么数学特征？

第二，如果已知$\{x_n\}$是收敛的，那末，它的极限a是否属于我们考虑的数集范围？

读者可能认为第二个问题是多余的．我们要强调指出，极限也是一种运算，它与代数运算一道，构成高等数学的两类基本运算．既然是运算，就有一个运算结果的封闭性问题．封闭是指运算结果不超出我们所考虑的范围．在有理数集范围内开方运算就不是封闭的，例如2是有理数，$\sqrt{2}$不再是有理数．这使得我们有必要将有理数扩充到实数范围．在上段中已指出实数轴上没有