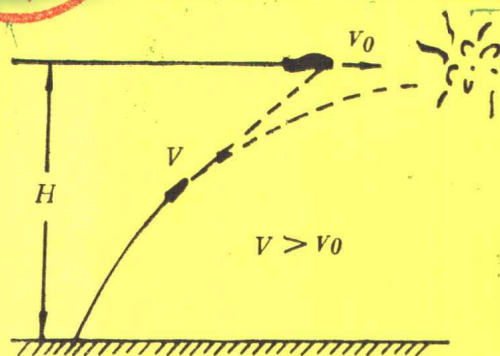


力学小问题

一百例

《力学与实践》编辑部小问题组编



力学小问题一百例

《力学与实践》编辑部编

大连工学院出版社

356305

力 学 小 问 题 一 百 例
LIXUE XIAO WENTI YI BAI LI

《力学与实践》编辑部编

大连工学院出版社出版（大连甘井子区凌水桥）

辽宁新华书店发行 大连北海印刷公司印刷厂印刷

开本：850×1168毫米1/32 印张：8.06字数：181,000

1986年5月第一版 1986年5月第一次印刷

责任编辑：王家瑶 张志新

印 数 1—5000

统一书号13400·2

定价：1.55元

内 容 提 要

本书根据《力学与实践》1980年至1985年“小问题”栏的100道习题和解答汇编而成。题目有一定的难度和趣味。内容有理论力学（66题），材料力学（22题）和杂题（12题）三部分。在理论力学和材料力学的前面有基本理论和公式，以及解题方法指导。这些是五十余位编写者长期教学经验的积累。

本书可作为理工科院校大学生的参考书，也可用作准备报考硕士研究生时的复习参考。对于从事理论力学和材料力学教学的教师，以及电视大学、自学青年也有一定的参考价值。

序

这本小册子主要是为高等学校学生学习理论力学和材料力学作参考用的。它不是哪一个或某几个人所写，而是许多人劳动的成果；它也不是于一年半载中所完成的，而是历七、八年的积累，并经数次编辑加工而形成的。

1979年，《力学与实践》编辑部在商议这个综合性力学刊物的栏目时，编委武际可建议每一期上出几个小问题，在下一期给出答案，以便引起读者，特别是青年读者的兴趣。当时商定，请北京大学力学系殷金生主持日常工作（后来北京大学力学系秦寿珪也参加工作），并建议命题应努力做到“饶有兴味，简明扼要，有一定难度”。略事筹备后，1980年第3期《力学与实践》上“小问题”栏目就开张了。事情开了头，后来的发展就不能全由我们了。这个栏目很快得到广大读者的支持和爱护，他们热情地为它拟题写稿，并鼓励我们把它办好。到1985年初为止，“小问题”共收到来稿（题目及答案）200余道，其中录用了大约三分之一。在命题人中，多数是各类学校的力学教师，少量是工程技术人员。特别令人高兴的是还有些是在校的大学生，他们反复修改稿件，我们颇有些“后生可畏”的感触。这样经历了几年，这个栏目形成了它自身的风格。这种风格多少并不是我们的原来意图。《力学与实践》的内容原应多考虑一下来自实践或用于实践的力学问题，而这个栏目的内容逐渐形成在力学课程教学中的一类思考题。仿照“思维实验”（*Gedanken-experiment*）的说法，不妨称之为一种“思维操练”（*Gedanken-exercise*）吧。

在期刊上刊出的题目数到达一百的时候，我们请殷金生（这

时他已参加《力学与实践》的编委会)等同志把这些问题重新编一下,单独成册,按照内容分成理论力学、材料力学和杂题三类。在期刊上刊登时限于篇幅,有些解答只能给出一个线索,现在则可略为舒展一些,有时还可给出几种答案。为了读者方便,在每部分前补充了有关理论的提要。题号是重新编的,题号后的括号内的数字代表原题号和《力学与实践》的年份、期数,如(9.81.1)即原第9题,刊于1981年第1期《力学与实践》(答案一般刊登在后一期)。收入本书命题题目的作者共49人,其姓名见各题题后。

在这次汇编成册过程中的分工如下:殷金生写理论力学部分的基本理论和公式,整理部分理论力学的习题和解答,并负责全书的集稿工作。秦寿珪写材料力学部分的基本理论和公式,整理材料力学的习题和解答。张大源(北京航空学院理论力学教研室)整理大部分理论力学的习题和解答。本书责任编辑是王家瑶、张志新(《力学与实践》编辑部)。

但愿这个七、八年来,五十余人的劳动成果能对有关师生的力学教学有所帮助。

《力学与实践》副主编 朱照宣

1985年8月于北京

目 录

序

第一部分 理论力学	(1)
第一章 静力学、虚位移原理	(1)
§ 1.1 力和它的性质	(1)
§ 1.2 力系的化简	(2)
§ 1.3 力系的平衡	(3)
§ 1.4 摩 擦	(4)
§ 1.5 柔 绳	(6)
§ 1.6 重 心	(7)
§ 1.7 虚位移原理	(8)
§ 1.8 解题步骤和注意事项	(9)
§ 1.9 题目与解答	(11)
第二章 运动学	(28)
§ 2.1 点的速度和加速度公式	(28)
§ 2.2 相对导数和绝对导数	(30)
§ 2.3 刚体上点的速度和加速度公式	(31)
§ 2.4 复合运动中点的速度和加速度公式	(32)
§ 2.5 解题步骤和注意事项	(33)
§ 2.6 题目和解答	(34)
第三章 动力学	(62)
§ 3.1 质点动力学	(63)
§ 3.2 质点系动力学的三个基本定理	(66)
§ 3.3 非惯性系中的动力学	(71)

§ 3.4	刚体动力学	(72)
§ 3.5	分析动力学	(76)
§ 3.6	线性振动	(81)
§ 3.7	题目与解答	(84)
第二部分	材料力学	(165)
第四章	材料力学	(165)
§ 4.1	材料力学与理论力学研究方法的异同	(165)
§ 4.2	材料力学的基本假设	(168)
§ 4.3	截面法 应力与应变	(171)
§ 4.4	微元法与叠加原理	(176)
§ 4.5	拉伸、压缩、扭转、弯曲的解	(181)
§ 4.6	超静定问题的求解方法	(183)
§ 4.7	能量方法	(184)
§ 4.8	解题步骤与注意事项	(190)
§ 4.9	题目与解答	(191)
第三部分	杂题	(238)
作者索引		(251)

第一部分 理论力学

第一章 静力学, 虚位移原理

静力学的内容主要有两方面: 力系化简和力系平衡。前者主要是为动力学作准备的, 后者主要是求解刚体(系)平衡时各力之间的关系, 或者在力系作用下求刚体的平衡状态, 或者兼而有之。

§ 1.1 力和它的性质

力是力学中的一个基本概念, 然而要给力下一个确切的定义却是一件困难的事。一般地说, 所谓力是指物质体之间的相互作用, 是使物质体产生加速度或变形的原因。

设一个力系由 n 个力 $\vec{F}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 构成, 每个力的作用点对某点 O 的向径分别为 $\vec{r}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 则力系的主向量

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (1.1)$$

力系对 O 点的主矩

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad (1.2)$$

等效力系的基本定理: 作用在同一刚体上的两个力系等效的条件是两个力系的主向量相等, 对同一点的主矩相等。

力在刚体上的可传性: 一力作用在一个刚体上, 如果沿着力

的作用线移动力的作用点时，力的作用效果不变。

刚化原理：已知非刚体在某一力系作用下处于平衡状态，如果把这物体看成刚体，则平衡状态不变。

我们通过下面的例子来说明刚化原理与力在刚体上的可传性之间的关系。图 1 所示三

铰拱，受水平力 P 的作用。当力 P 作用在 D 点和作用在 E 点时， A, B, C 三处的反力是不一样的。这说明力 P 不能在三铰拱体系内随便移动，因为三铰拱不是刚体。有人会这样想，三铰拱在力 P 作用下

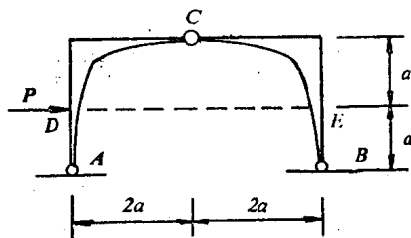


图 1

处于平衡状态，因此可以把三铰拱刚化，即把铰链 C 看成是刚性连结。这当然是可以的。然后把力 P 从 D 点平移到 E 点。这也是可以的。但这样刚化以后，他将得不到任何结果。因为他把本来是静定的结构“刚化”成了超静定结构，而超静定结构是理论力学内无法解决的问题。当把力 P 平移到 E 点以后，就不能将 C 点再还原为铰结点，因为不存在“软化”原理。

解除约束原理：当约束被人为地解除时，必须在受约束处用一个适当的约束力（向量）来代替。

§ 1.2 力系的化简

作用在同一刚体上的一个力系等价于作用在刚体上一点（例如 O 点）的一个力和一个力偶。这个力的大小和方向与力系的主向量相等，力偶矩的大小和方向与力系对 O 点的主矩相等。 O 点叫做化简中心。化简中心可以任意选取，但不同化简中心的主矩

是不同的，力系的主向量与化简中心无关。设 O ， A 为两个不同的化简中心， L_O 和 L_A 分别为力系对 O 和 A 点的主矩，则有

$$\vec{L}_O = \vec{L}_A + \vec{OA} \times \vec{R} \quad (1.3)$$

其中 $\vec{R}$ 为力系的主向量。

力螺旋：如果一个力系只有一个力和一个力偶组成，并且力的方向与力偶矩的方向相同，则此力系叫做力螺旋。显然，力螺旋中的力在作用线方向上移动时，力螺旋不变。作用在刚体上的任一力系均可化简为一力螺旋。力螺旋中力的作用线叫做中心轴。如果一个力系对 O 点的主矩 $\vec{L}_O$ 和主向量 $\vec{R}$ 已知，则中心轴方程（向量形式）为

$$\vec{L}_O - \vec{r} \times \vec{R} = p \vec{R} \quad (1.4)$$

其中 $\vec{r} = \vec{OM}$ ，中心轴方程就是 M 点的轨迹方程， p 是力螺旋参数，有

$$p = \frac{\vec{R} \cdot \vec{L}_O}{R^2} \quad (1.5)$$

§ 1.3 力系的平衡

如果一个力系的主向量 $\vec{R} = 0$ ，对某一点 O 的主矩 $L_O = 0$ ，则此力系叫做零力系或平衡力系。由式 (1.3) 可立即得到零力系对任一点的主矩均为零。

一个刚体处于平衡状态（静止或匀速平动）的充分必要条件是作用在刚体上的力系为零力系。对于变形体而言，零力系只是其平衡的必要条件，而不是充分条件。

在解题中经常用到的，也是最基本的是两力平衡和三力平衡。两力平衡条件是两力大小相等，方向相反，作用线相同。对

于三力平衡有如下重要的结果。

三力平衡则三力共面（或汇交，或平行）。如果三力平衡汇交，则三力构成封闭三角形（力三角形）。熟练地运用力三角形，有时可加速解题过程。

在解题过程中，初学者往往不会从众多的平衡力中识别出两力平衡或三力平衡的情况，从而使自己无从下手或者解题过程太繁（如题5）。

§ 1.4 摩 擦

包含摩擦力的习题往往是理论力学中比较难的习题。在解带有摩擦力的习题时应该注意下面两点。

第一，注意摩擦力的大小和方向。设 N 为接触点处的正压力，正压力的方向沿接触点处公法线方向，指向物体内部。摩擦力的大小为

$$F \leq \mu N$$

其中 μ 为摩擦系数。特别要注意 F 小于 μN 的情形，不要一见到摩擦力就用等式表示。在静力学中，只有在临界状态（平衡即将被破坏但还没有破坏时，或说物体将动未动的状态）时才用等式。在动力学中，接触处有相对滑动时用等式。摩擦力在过接触点的切平面内，其方向与相对运动或相对运动的趋势相反。

第二，熟练地运用摩擦角有时会使解题大为简化（题2，3，6等）。有些初学者往往不会运用摩擦角解题。试看下面的例题。

在粗糙的水平面上放置一重量为 W 的圆柱体，摩擦系数 $\mu = \operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$ ，今在圆柱表面 B 点处作用一力 P ， $\angle AOB = 120^\circ$ （图2a）。求使圆柱体保持平衡时 P 力的最大值和方向。

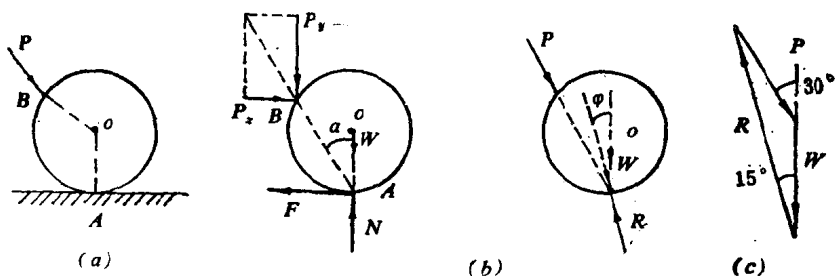


图 2

解1 将力 P 在水平方向和竖直方向分解为 P_x 和 P_y , A 点处的摩擦力 F , 正压力 N (图 2b)。在水平方向和竖直方向取力的平衡方程和对 O 点的力矩平衡方程, 有

$$P_x = F$$

$$P_y + W = N$$

$$FR + P_x \cdot \frac{R}{2} = P_y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} R$$

三个平衡方程, 四个未知量, 还需要补充一个方程。 P 达最大值时就是圆柱处于临界状态, 即有

$$F = \mu N$$

联立求解上述四个方程, 并将 $\mu = 2 - \sqrt{3}$ 代入, 得

$$P_x = \frac{1}{2} W, P_y = \frac{\sqrt{3}}{2} W, P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = W$$

设力 P 与向下竖直线的夹角为 α , 则有

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P_x}{P_y} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

即 $\alpha = 30^\circ$ ，力 P 通过 A 点。

答 力 P 的最大值为 W ，方向通过 A 点。

解2 因为重力 W ，摩擦力和正压力都通过 A 点，对 A 点取力矩平衡方程，可知力 P 通过 A 点，所以 $\alpha = 30^\circ$ ，再取水平方向和竖直方向的力平衡方程和临界状态时 $F = \mu N$ ，有

$$P \cdot \frac{1}{2} = F$$

$$P \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + W = N$$

$$F = \mu N$$

解上述联立方程，代入 μ 值后得 $P = W$ 。

解3 地面反力 R 与圆柱重力 W 交于 A 点，由三力平衡条件得力 P 通过 A 点。临界状态时角 φ 为摩擦角， $\varphi = 15^\circ$ 。所以力 P ， R ， W 构成的力三角形为等腰三角形（图2c），所以 $P = W$ 。

§ 1.5 柔 绳

理论力学的研究对象是质点，刚体和质点系，一般地不包含连续体。柔绳和弹簧是简单的连续体，在许多理论力学教科书中都讲到这部分内容。柔绳的特点是只能承受拉力（或称张力），不能承受压力和弯矩。

设作用在柔绳单位长度上的力为 $\vec{f}$ ，绳中张力的方向是这样规定的：切面的法线方向与弧长正向一致时，取张力为正向，反之为负向。在绳中取一微元 Δs （图3），由微元平衡

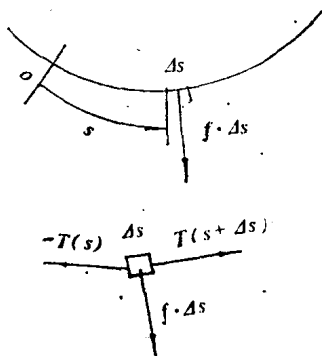


图3

条件

$$\vec{T}(s + \Delta s) - \vec{T}(s) + \vec{f} \cdot \Delta s = 0$$

可得柔绳的基本方程:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{f} = 0 \quad (1.6)$$

这是一个向量方程, 在直角坐标系中的分量表示为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) + f_x &= 0 \\ \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) + f_y &= 0 \\ \frac{d}{ds} \left(T \frac{dz}{ds} \right) + f_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

柔绳基本方程的本性表示式为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dT}{ds} + f_t &= 0 \\ \frac{T}{\rho} + f_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

其中 $\vec{\tau}$ 为绳子的切线方向, $\vec{n}$ 为主法线方向, ρ 为曲率半径。柔绳的基本方程是一组微分方程, 在具体求解时, 当然需要适当的边界条件。

取小微元列写平衡方程 (或动力学方程), 是力学中最基本的方法之一。在弹性力学和流体力学中经常会用到这种方法。

§ 1.6 重 心

设物体的密度为 $\rho = \rho(x, y, z)$, 取定点 O , 重心相对 O 点的

向径为 $\vec{r}_c$ ，则有

$$\vec{r}_c = \frac{\int_V \rho \vec{r} dv}{\int_V \rho dv} \quad (1.9)$$

其中 V 是物体的体积， $\int_V$ 表示体积分， $\vec{r}$ 是小微元 dv 相对于 O 点的向径。如果物体的密度是均匀分布的，则有

$$\vec{r}_c = \frac{\int_V \vec{r} dv}{V} \quad (1.10)$$

在直角坐标系中的分量表达式为

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\int_V x dv}{V} \\ y_c &= \frac{\int_V y dv}{V} \\ z_c &= \frac{\int_V z dv}{V} \end{aligned} \quad (1.11)$$

在具体解题计算时，经常利用对称性和负质量法。

§ 1.7 虚位移原理

虚位移原理：具有理想、定常约束的质点系处于平衡状态的必要充分条件是，在任何一组虚位移上所有主动力的虚功之和等于零，即

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (1.12)$$

其中 $\vec{F}_i$ 表示作用在质点 i 上的主动力， $\delta \vec{r}_i$ 表示质点 i 的虚位移。

在应用虚位移原理具体解题时，必须首先明确系统的自由度数 l ，当 $n > l$ 时，要注意到有 $n - l$ 个虚位移是不独立的，必须

找出它们与 l 个独立虚位移之间的关系，代入式 (1.12) 后可得到 l 个平衡方程。求解这 l 个方程，可得所需要的结果。

虚位移原理还有其它几种形式：用广义力表示的虚位移原理，当主动力为有势力时，质点系的势能在平衡位形处取驻值。

§ 1.8 解题步骤和注意事项

为了达到熟练地解题的目的，需要多做习题，熟能生巧。通过解题加深对基本概念的理解和逐步积累起自己的经验。这里所叙述的几个步骤只能作为参考。

1. 明确受力分析的对象

受力对象可以是一个质点，一个刚体或几个刚体。当把几个刚体作为受力对象时，可以应用刚化原理，把这个受力对象看作是一个刚体。但要注意，如果下一步再取其中一部分作为受力对象时，要按未刚化时的受力状态来分析，切不可按刚化以后化简了的力系来分析。

2. 画受力图，或称画隔离体图

把分析对象隔离出来，画上已知力和未知力（包括约束力）。画图时应注意以下几点：

(1) 凡是解除约束的地方，都要画上相应的约束力。

(2) 根据约束的性质，画出约束力的方向。例如光滑接触时，约束力沿接触面的法线方向。不能确定方向时，可用未知角度或几个分量表示。

(3) 注意正负号。根据画出的未知力的指向进行计算。如果算出的力值是正的，表示真实力的方向与所画的一致，否则相反。

(4) 有摩擦力时要注意摩擦力的方向和大小 ($F \leq \mu N$)，