日 本 土 木 工 程 手 册

材料力学

中 国 铁 道 出 版 社

内 容 简 介

本书系译自日本土木工程手册的第3编。其内容包括：材料的力学性质；一般力学基础以及弹性力学；塑性力学；粘弹性力学；薄壁构件变形等广泛的固体力学问题。书中对上述各部分内容的基本概念、基本理论等都作了精辟的论述，对工程设计具有实际指导意义。本书内容丰富，基本上反映了当代的先进理论水平，可供土建工程技术人员和高等院校有关专业师生及科研工作者参考。

本书第1章～第6章由刘慧茹翻译；第7章～第12章由杨广里翻译。

土木工学ハンドブック

土木学会　编

技报堂　1974

日本土木工程手册

材料力学

杨广里　刘慧茹　译

中国铁道出版社出版

责任编辑　王顺庆

封面设计　王毓平

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：850×1168 1/32 印张：7.125 字数：176千

1984年8月 第1版　1984年8月 第1次印刷

印数0001—12,000册　定价：1.10元

出版者的话

从事各项工作的工程技术人员，都希望能得到一部内容较丰富而又切合实用的手册。

这些年来，我们在积极组织编写和出版有关铁路工程设计和施工技术手册的同时，征求一些国内专家对手册类工具书的意见。1979年中国土木工程学会桥梁及结构工程学会开会期间，经同济大学李国豪校长推荐，认为日本土木学会主编的1974年修订出版的土木工程手册，在内容上有其特色，它反映了现代科学技术的新成就，加强了基础理论方而的内容。为此，根据我国情况及我社的出版能力，决定选译其中的应用数学、材料力学、结构力学、土力学、水力学和水文学、混凝土、钢筋混凝土结构、钢结构、基础及土工结构、桥梁、隧道等十一篇，作为十一个分册出版，供我国广大土木工程人员参考。

在各分册的翻译过程中，承陈英俊教授热心指导及各位参加译校同志的共同努力，提高了译文质量，我们在此深表感谢。

目　录

第 1 章　总　论……………………………………………… 1

1.1 材料力学和结构力学………………………………… 1

1.2 材料力学的历史……………………………………… 1

第 2 章　一般力学的基础…………………………………… 3

2.1 力、力偶、力矩……………………………………… 3

2.2 索多边形……………………………………………… 5

2.3 平衡条件……………………………………………… 6

2.4 功、能………………………………………………… 7

2.5 运动方程式…………………………………………… 9

第 3 章　振动理论…………………………………………13

3.1 单自由度系统的振动…………………………………13

3.2 多自由度系统的振动…………………………………20

3.3 非线性振动……………………………………………26

3.4 随机振动………………………………………………31

第 4 章　屈曲理论…………………………………………36

4.1 结构物的稳定和不稳定………………………………36

4.2 弹性稳定………………………………………………38

4.3 塑性屈曲………………………………………………39

第 5 章　材料的力学性质…………………………………40

5.1 材料组织的敏感性和不敏感性………………………40

5.2 应力-应变关系 ………………………………………40

5.3 弹性行为………………………………………………43

5.4 塑性行为………………………………………………45

5.5 粘性行为………………………………………………48

5.6 在高温、低温、高压情况下的力学性质……………50

5.7 在结晶学上所见到的材料结构和性质……………………51
5.8 材料的破损和破坏的特性……………………………………57
5.9 破坏的概率理论………………………………………………65
第6章 连续体力学的基础……………………………………………68
6.1 连续体的概念…………………………………………………68
6.2 应 力……………………………………………………………68
6.3 主应力和主轴…………………………………………………72
6.4 应 变……………………………………………………………78
6.5 本构方程式……………………………………………………84
6.6 连续体的一般原理……………………………………………89
第7章 弹性体的力学和分析方法…………………………………91
7.1 弹性理论的基本方程式………………………………………91
7.2 能量理论………………………………………………………98
7.3 应力函数法 …………………………………………………103
7.4 复变函数法 …………………………………………………106
7.5 差分法 ………………………………………………………113
7.6 有限单元法 …………………………………………………117
7.7 积分方程法 …………………………………………………125
第8章 塑性体、粘弹性体力学 ……………………………………131
8.1 塑性力学基础 ………………………………………………131
8.2 极值定理 ……………………………………………………137
8.3 关于平面应变的滑移场的理论 ……………………………140
8.4 粘弹性力学的基础 …………………………………………143
8.5 线性粘弹性理论 ……………………………………………145
第9章 拉伸、压缩、剪切 …………………………………………154
9.1 拉伸和压缩 …………………………………………………154
9.2 剪 切 …………………………………………………………163
9.3 缆索的变形 …………………………………………………164
第10章 弯 曲 ………………………………………………………166
10.1 直杆的弯曲 …………………………………………………166

10.2 曲杆的弯曲 ……………………………………175
10.3 斜弯曲 ……………………………………………179
10.4 短 柱 ……………………………………………180
10.5 与弯曲同时发生的剪力 ……………………182
10.6 结合梁的弯曲 ……………………………………185
10.7 弯曲的有限变形 ………………………………186
第11章 扭 转 ……………………………………………189
11.1 直杆的纯扭转 ……………………………………189
11.2 翘曲约束的扭转 ………………………………193
11.3 弹塑性扭转 ………………………………………194
11.4 扭转的有限变形 ………………………………197
第12章 薄壁构件的变形 ……………………………200
12.1 薄壁构件的概念和分类 ……………………200
12.2 薄壁构件的弯曲 ………………………………200
12.3 薄壁构件的剪切 ………………………………203
12.4 薄壁构件的扭转 ………………………………206
12.5 薄壁构件的弯曲扭转 ………………………209
12.6 薄壁构件的有限变形 ………………………212
文 献 ……………………………………………………215

第1章 总 论

1.1 材料力学和结构力学

在固体力学（弹性力学、塑性力学）、材料力学、结构力学之间本来就没有明确的区别，对于它们之间要下个定义是困难的。可是一般把结构物作为研究对象的力学，大致可分为两个范畴来研究：一个主要是论述以连续体力学（固体力学）和结构材料的力学性质等为基础以求应用于结构物上的范畴；另一个主要是论述结构物的形状和变形等作为结构物力学性质的范畴。因此为了应用上的方便，一般地按前者的范畴来研究的叫做材料力学；另一方面，将材料力学作为基础来研究后者的范畴叫做结构力学，二者的着重点有所不同。

以上述的区分为前提，在本篇中第2章～第4章主要是研究一般力学的基础，第5章～第8章是研究材料的性质和连续体力学，第9章～第12章是研究组成结构物的构件力学。

1.2 材料力学的历史[1)]

关于建筑力学，最初进行科学的研究者，据说是在15世纪文艺复兴发源地意大利Firenze附近生长的Leonardo da Vinci（1452～1519）。在他遗留下来的笔记本里，记述了有关力的合成、力的平衡和力矩原理等的论述。材料力学的最初的出版物是伽利略（1564～1642）于1638年出版的“Discorsi E Dimostrazioni Mathematiche”（日译本，新科学对话（上、下），岩波文库）中，论述了结构材料的机械性质、梁的强度等。在1678年，虎克(英国，1635～1703)发表了有名的论文虎克定律。莱布尼茨（德国，1646～1716）、牛顿（英国，1643～1727）创

始的微分、积分方法，广泛地用于运动学等方面，伯努利（1654～1705）运用微积分方法研究了有关梁的挠曲曲线。欧拉（1707～1783）把这个方法发展到柱的稳定问题上，导出了有名的欧拉公式。进而，从18世纪开始到19世纪止，由拉格朗日（1736～1813）、库尔曼（1821～1881）、摩尔（1835～1918）、麦克斯韦（1831～1879）等在各方面发展起来了。关于19世纪以后的历史，请参照《日本土木工程手册》（中译本）结构力学分册1.2。

第2章 一般力学的基础

2.1 力、力偶、力矩

2.1.1 力的分解和合成

如把一个力用和它等效的两个力或者两个以上的力来替换，这就称为力的分解，分解后的力叫做分力。把两个以上的力同时作用时，求出与其等效的一个力，就称为力的合成，其合成后的一个力称为合力。

（1）共点的两个力的合成

以给出的两个力P_1、P_2为两个边做出力的平行四边形或力三角形，如图2.1，则可得到合力 R 及其方向。在解析上，其计算如下。

$$\left.\begin{aligned} &R=\sqrt{P_1^2+P_2^2+2P_1P_2\cos\alpha} \\ &\tan\theta=P_2\sin\alpha/(P_1+P_2\cos\alpha) \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

（2）在同一作用点将一个力分解为两个力

为将图2.1的力R分解为用θ和α表示的两个方向，可进行与合成时相反的过程，给出分力P_1、P_2如下

$$P_1=\frac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin\alpha}R \qquad P_2=\frac{\sin\theta}{\sin\alpha}R \tag{2.2}$$

（3）共点的几个力的合成

如图2.2（a）所示，为了合成多个力$P_1\sim P_i$，可以按(1)的方法每两个力合成，也可绘出图2.2（b）所示的力多边形，求出合力R。该图表示 $i=4$ 的情况。假设所给的力P_1、P_2、…的x、y方向的分力为X_1、X_2、…，Y_1、Y_2、…，则合力R和R与x轴正向所夹的θ角，可从下式求得

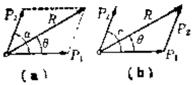

图 2.1

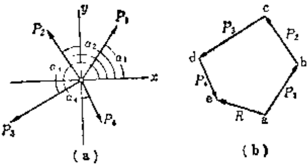

图 2.2

$$\left.\begin{aligned} &R=\sqrt{(\Sigma X)^2+(\Sigma Y)^2}\\ &\tan\theta=\Sigma Y/\Sigma X,\ \ \sin\theta=\Sigma Y/R \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

（4）不作用于一点的力的合成

力的合力可从（2.3）式求得。设各分力的作用点为（x、y），其合力作用点（$\bar{x}$、$\bar{y}$）可从下式求得

$$\bar{y}\Sigma X-\bar{x}\Sigma Y=\Sigma(Xy-Yx) \tag{2.4}$$

式中 （$\bar{x}$、$\bar{y}$），（x、y）表示在各个力的作用线上所取的任意点的坐标。

2.1.2 力矩

一个力P对于某点C的力矩，用力P和从该点到力的垂直距离e的乘积来表示。

即

$$M=P\cdot e \tag{2.5}$$

力矩的方向（正、负），由力P对于C点的方向(转动方向)来决定。作用在同一平面内的多个力对于该平面内某点的力矩的和，等于这些力的合力对于同一点的力矩，

2.1.3 力偶和力偶矩

不通过同一点的平行的二力，其方向相反而大小相等时，这样的两个力称为力偶。力偶的合力是零，如果求它的作用点，现设一个力为$F_1(X_1、0)$，其作用点为（0、y_1）；设另一个力为$F_2(X_2、0)$，作用点为（0、y_2），则按（2.4）式得

$$\bar{y}\Sigma X=X_1y_1+X_2y_2$$

因为$X_1=-X_2$，$\Sigma X=0$，$y_1\neq y_2$，所以$\overline{y}\to\infty$。力偶对于任意点C的力矩，和C的选择方法无关，乃以力的大小和它们间的垂直距离e的乘积表示，并称为力偶矩。

2.2 索 多 边 形

2.2.1 平面力的合成、分解

当求平行的或者接近平行的力的合力作用点有困难时，可用如下的图解法。若用图2.3（a）的力$P_1\sim P_3$绘出图2.3（b）的力多边形，则合力R的大小、方向、指向，可用矢量$\overrightarrow{ad}$表示。随后，在图2.3（b）中任选O点（极点），引射线$\overrightarrow{Oa}$、$\overrightarrow{Ob}$、$\overrightarrow{Oc}$、$\overrightarrow{Od}$，在图2.3(a)上绘出与这些射线平行的索多边形Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ。合力R在图2.3（a）上通过Ⅰ、Ⅳ的交点S。

平面力的分解也可用索多边形分解。图2.4表示出，把力P分解成与其平行且通过C_1、C_2点的两个力的例子。

2.2.2 力矩的图解

在图2.3（a）中，假设从C到合力R的垂直距离为r，通过C点作R的平行线，夹在索多边形Ⅰ、Ⅳ之间的长度为y，在图2.3（b）上从极点O到R的极距为H，则因$r/y=H/R$，所以力$P_1\sim P_3$对任意点C的力矩M_c为

$$M_c=R\cdot r=H\cdot y \tag{2.6}$$

并且H和y一个为力的单位，另一个为长度的单位。

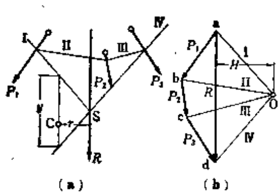

图 2.3

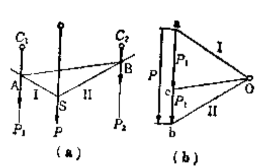

图 2.4

2.2.3 已知条件和索多边形

（1）不同极点的两个索多边形

如图2.5所示，若对于任意两极点OO'，绘制两个索多边形，则两个索多边形相对的两边或其索线，交于平行于直线OO'的直线上。这个直线称为库尔曼直线。

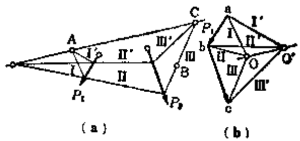

图 2.5

（2）通过已知两点的索多边形

为了绘制通过图2.5所定的两点A、B的索多边形，首先过A点绘制对任意极点O'的索多边形Ⅰ′Ⅱ′Ⅲ′。如果作$O'O /\!\!/ CA$，$cO /\!\!/ BC$求点O，并将O点作为极点绘制索多边形，则过点B。由于C的选择方法不同，过给定两点的索多边形可绘出无数个。

（3）通过已知三点的索多边形

为了在图2.5上求过A、B、C的索多边形，先求过AB的索多边形的极点O_1和过BC的索多边形的极点O_2，再做$O_1O /\!\!/ AB$、$O_2O /\!\!/ BC$求其交点O，则以O点为极点的索多边形，通过A、B、C。过三点的索多边形，是唯一的一个。

2.3 平衡条件

平面共点力系的平衡条件，在图解上是力多边形的闭合，在解析上是作用力的合力为零。由（2.3）式得

$$\Sigma X = 0，\ \Sigma Y = 0 \tag{2.7}$$

平面一般力系的平衡条件，在图解上，是力的多边形、索多边形都闭合，在解析上，是设各个力对于任意点的力矩为M时，则下式成立。即

$$\Sigma X = 0，\ \Sigma Y = 0，\ \Sigma M = 0 \tag{2.8}$$

或者

$$\Sigma X = 0，\ \Sigma Y = 0，\ \Sigma(X_y - Y_x) = 0 \tag{2.9}$$

2.4 功、能

2.4.1 功、能

作用着力**P** 的质点，由于任何原因产生了微小的位移δ**r**时，此时力**P**所做的功δW为

$$\delta W = \mathbf{P}\cdot d\mathbf{r} = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z \tag{2.10}$$

假如质点一面承受力**P**，一面沿着某曲线C从A移动到B，则力**P**所做的功W为

$$W = \int_A^B \mathbf{P}\cdot d\mathbf{r} = \int_A^B (X dx + Y dy + Z dz) \tag{2.11}$$

这时，就称力**P**对质点做了W的功。

在做功时，授受的实体称为能。能是意味着做功 能 力 的 标量。

2.4.2 势　　能

作用在质点上的力 **P**，是根据由空间坐标（x、y、z）所确定的某标量函数$U = U$（x、y、z）作为

$$\mathbf{P} = -\nabla U \tag{2.12}$$

即
$$X = -\frac{\partial U}{\partial x},\ Y = -\frac{\partial U}{\partial y},\ Z = -\frac{\partial U}{\partial z} \tag{2.13}$$

而求得时，U称为**P**的势函数，认为力场**P**是可从势函数U导得。另外，U称为质点在该位置的势能。由于推导特定力场 **P**的势函数，仅其微分系数具有意义，所以势函数的绝对值应根据标准取法加上附加常数C。因而可在空间的任意点选择$U = 0$。

Ⅰ）重力场的势能　　假如设地面为xy面，z轴向上，因为$X = 0$，$Y = 0$，$Z = -mg$，所以导出$U = mgz + C$。假定$U_{z=0} = 0$，则势能为$U = mgz$。

Ⅱ）弹簧的势能　　用弹簧常数为k的弹簧连结在固定点上的物体，因为从平衡位置仅位移x时所承受的恢复力为$P = -kx$，所以这恢复力可从势函数 $U = (1/2)kx^2 + C$ 导得。如果选择$U_{x=0} = 0$，则势能为$U = (1/2)kx^2$。

2.4.3 保守力、约束力

我们把从势能U用式（2.12）的形式求出的力称为保守力，把保守力作用的空间称为保守力场。当质点从A运动到B时，保守力 **P**所做的功与质点运动的路径无关，且等于A、B两点间势能的差。

在保守力场的某质点，如果受某一曲面或曲线的约束，质点除受保守力以外还受到约束力**R** 的作用。**R** 与约束面成直角时称滑动约束，这时不扰乱保守系统的性质。**R**与曲面不成直角时（有摩擦力的情况），假设对于内侧的切线分量为R_t，则相当于做功

$$W_R=\int_A^B R_t ds$$

的能量，作为热和其他形式损失了。

2.4.4 动　　能

当质点的质量为m，速度为v时，质点如受力**P** 的作用，则 $m\dot{\mathbf{v}}=\mathbf{P}$ （牛顿定律）成立。设质点运动的路径为C，并假定在瞬时t_1、t_2的位置为A、B，在这期间**P**所做的功为

$$W=\int_A^B \mathbf{P}\cdot d\mathbf{r}=\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{P}\cdot\dot{\mathbf{r}}dt=\int_{t_1}^{t_2} m\dot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v}dt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2\right\}dt=\frac{1}{2}m\mathbf{v}_2^2-\frac{1}{2}m\mathbf{v}_1^2 \quad (2.14)$$

式中

$$T=\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 \quad (2.15)$$

称为动能。假设在t_1、t_2时的T值分别为T_1，T_2，则可写为

$$T_2-T_1=W \quad (2.16)$$

质点在保守力场运动时，其动能 T 与势能 U 之和保持不变，即 $T+U=$常量。

2.4.5 虚位移和虚功

假如在质点上作用几个力 $\mathbf{P}_1$、 $\mathbf{P}_2$、…并处于平衡状态，则 $\Sigma\mathbf{P}=0$ 。此时，给质点任意的虚位移 $\delta\mathbf{s}$，并求这些力所做功的和，则有

$$\delta W=\Sigma\mathbf{P}\cdot\delta\mathbf{s}=\Sigma X\delta x+\Sigma Y\delta y+\Sigma Z\delta z=0$$

与这样的δs所对应的功 δW称为虚功。质点处于平衡的必要与充分的条件，是作用于该质点的力的虚功为零。这称为虚功原理。虚功原理，是由平衡状态的标量来表示的。因为标量与向量不同，不需要考虑方向，所以多数情况是方便的。

2.5 运动方程式

2.5.1 哈密顿（Hamilton）原理

根据达兰贝尔原理，运动中的质点系，认为在作用于各质点上的力$\mathbf{F}_i$和惯性力$-m_i\ddot{\mathbf{r}}_i$的作用下处于平衡状态，给这个平衡系统以虚位移$\delta\mathbf{r}_i$时的虚功当然是零。即，若采用

$$\delta W=\Sigma\mathbf{F}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i$$

$$\delta T=-\Sigma(m_i\ddot{\mathbf{r}}_i)\cdot\delta\mathbf{r}_i+\frac{d}{dt}\Sigma m_i\mathbf{v}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i$$

改写上式的虚功，则因为

$$\Sigma(F_i-m_i\ddot{\mathbf{r}}_i)\cdot\delta\mathbf{r}_i=\delta W+\delta T-\frac{d}{dt}\Sigma m_i\mathbf{v}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i=0$$

因此

$$\delta W+\delta T=\frac{d}{dt}\Sigma m_i\mathbf{v}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i$$

若把上式对时间 t，在$t_0\sim t$ 的时间间隔上积分，则为

$$\int_{t_0}^{t}(\delta W+\delta T)dt=[\Sigma m_i\mathbf{v}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i]_{t_0}^{t}$$

因为$\delta\mathbf{r}_i$在$t_0\sim t$ 时间间隔内是连续变化的，所以在瞬时t_0，t时，令 $\delta\mathbf{r}_i=0$，因而

$$\delta\int_{t_0}^{t}(W+T)dt=0 \qquad (2.17)$$

或者，力$\mathbf{F}_i$具有势函数U时，表示为$\delta W=-\delta U$，
则有

$$\delta\int_{t_0}^{t}(T-U)dt\equiv\delta\int_{t_0}^{t}Ldt=0 \qquad (2.18)$$

式中 $L\equiv T-U$称为拉格朗日函数。式（2.17）、（2.18）说

明了对于真实运动（实际进行的运动）以及对于与在相同端点（$t_0 \sim t$）间所取的该曲线无限接近的运动(不表示真实运动)，$\int L dt$ 取驻值。这个原理由于不随坐标变换而改变，所以是极一般的情况，可以代替牛顿的运动定律，因此能够从它导出在任意坐标系的解析上都适用的运动方程。

2.5.2 拉格朗日（Lagrange）运动方程式

质点系（包括刚体或刚体的集合）在任意瞬时 t 的位置，一般可由若干个独立参数完全表示出来。这些独立参数称为广义坐标。

现在，已给的质点系其位置可用 n 个广义坐标 q_1，q_2，…，q_n完全表示出来。此时对于质点系中某一质点（质量m_i）的直角坐标x_i，y_i，z_i可写成以下形式

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n,\ t) \\ y_i &= y_i(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n,\ t) \\ z_i &= z_i(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n,\ t),\ (i=1,2,\cdots) \end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

如果已知构成质点系的形式和广义坐标的选择方法，则可完全确定式（2.19）右边的函数形式。

因质点系的动能 T 是各质点动能的和，即

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2}(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \tag{2.20}$$

如果用式(2.19)，则 T 可作为q_1，q_2，…，q_n，$\dot{q}_1$，$\dot{q}_2$，…，$\dot{q}_n$，t 的函数来求。显而易见，这个函数是关于所谓广义速度 $\dot{q}_1$，$\dot{q}_2$，…，$\dot{q}_n$的二次函数。特别是当质点系不受约束时，由于选择了适当的广义坐标，式（2.19）不显含时间 t。这种情况为

$$T = \frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{n} a_{rs}(q)\dot{q}_r\dot{q}_s \tag{2.21}$$

T 是关于广义速度的齐二次函数，系数$a_{rs}(=a_{sr})$ 是广义坐标的函数。

将广义坐标的任意微小变化用$\delta q_1, \delta q_2$，…，δq_n表示时，质点系按照其已给予的约束形式，从位置（q_1，q_2，…，q_n）移动到位置($q_1+\delta q_1$，$q_2+\delta q_2$，…，$q_n+\delta q_n$)存在可能的和不可能的两种情况。在前者是质点系的运动自由度和广义坐标的个数n相等，这种情况称为完整系，在后者是质点系的运动自由度比n小，这种情况称为非完整系。对非完整系如果用适当的办法，也可以和完整系同样地加以论述，因此下面只讨论完整系。此时质点系可能从位置（q_1，q_2，…，q_n)向位置($q_1+\delta q_1$，$q_2+\delta q_2$，…，$q_n+\delta q_n$）发生的微小位移，在这个位移期间，作用在质点系上的全部力所做的元功δW，通常可写成如下的形式

$$\delta W = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \cdots + Q_n\delta q_n \tag{2.22}$$

Q_1，Q_2，…，Q_n 是由质点系的构成形式和作用的诸力求得的量，称为广义力。若对于n个广义坐标建立微分方程组

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r, \quad (r=1,2,\cdots,n) \tag{2.23}$$

则可求出满足给定的$2n$个初始条件的式（2.23）的解$q_r=q_{(t)}$，从而完全确定质点系的运动。式（2.23）称为拉格朗日运动方程式。

另外要注意，按照质点系的特性，拉格朗日的运动方程可以改写成象下面那样的形式。

Ⅰ）保守系　　作用在质点系的诸力中，质点系的位移期间做功的力全是保守力时，称为保守系。此时若将质点系的位能用V·（q_1，q_2，…，q_n，t）表示，根据导出的拉格朗日函数

$$L = T - V \tag{2.24}$$

式（2.23）改写成如下形式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0, (r=1,2,\cdots,n) \tag{2.25}$$

Ⅱ)耗散系　　作用在质点系的诸力中，包含着与力作用点的速度成正比的阻力情况称为耗散系。在这种情况下，用雷莱（Ray-