实变与泛函

叶怀安 编著

中国科学技术大学出版社

实变与泛函

叶怀安　编著

中国科学技术大学出版社

1991・合肥

实 变 与 泛 函

叶怀安　编著

*

中国科学技术大学出版社出版

（安徽省合肥市金寨路96号，邮政编码：230026）

中国科学技术大学印刷厂印刷

安徽省新华书店发行

*

开本：787×1092/32　印张：7.375　字数：163千

1991年　月第1版　1991年　月第1次印刷

印数：1—3000册

ISBN7-312-00296-X/O·97　定价：2.35元

前　　言

自1980年始，编者及同事们每年都为中国科大非数学理科各系研究生、高年级本科生开设了《实变与泛函》选修课，每年一至二届，每届周学时4，总学时72。本书就是根据历年的讲稿及以往的相近著作整理加工而成，主要是增加了“实变”部分的分量，特别增写了适合多种专业需要的“抽象测度与抽象积分”的内容。

本书适合作理工科大学非数学系及师范院校数学系的教材或教学参考书。

诚挚欢迎读者对本书的批评与指正。

编著者

1991年3月于合肥

内　容　简　介

本书是在作者历年的讲稿及原著《泛函分析》基础之上，吸取国内外多种同类教材之精华撰写而成的。内容包括集合理论、Lebesgue测变与积分理论、距离空间、线性赋范空间与有界性算子、Hilbert空间、广义函数等。

本书适合作理工科大学非数学专业及师范院校数学专业的教材或教学参考书，也可供有关教学、研究人员参考。

目 次

1 预备知识

1.1 实数及其完备性

实数的完备性理论，是现代分析数学极为重要的基础，为了弥补读者在这方面知识的欠缺，这里需进行认真的论述。下面先从有理数谈起。

1. 有理数

一切形如$\frac{n}{m}$的数（此处m是正整数，n是整数，且二者不可约）称为有理数。不难证明（请读者自证）每个有理数$\frac{n}{m}$，必是一个无限循环的小数（注意：有限小数可视为以0为循环节的无限循环小数）。所以，不循环的无限小数，决不是有理数（即不是上述$\frac{n}{m}$形式的数）。

今后我们用Q记全体有理数组成的集合，并请读者注意以下三点：

1° 不是有理数的数是大量存在的。

易见，4.050050005…，0.616616661…，等等都不是有理数（不是无限循环小数，即不是形如$\frac{n}{m}$的数）。此外，我们可以证明，$\sqrt{2}$，e，π，…，都不是有理数。由此可见，除有理数外，还存在有大量的非有理数的数，今后称它们为无

理数。

2° 有理数具有稠密性。

容易知道，任何两个不等的有理数之间，至少还有另一个有理数存在。这是因为，当$\frac{n_1}{m_1}<\frac{n_2}{m_2}$时，总有有理数$\frac{n_1m_2+m_1n_2}{2m_1m_2}$满足$\frac{n_1}{m_1}<\frac{n_1m_2+m_1n_2}{2m_1m_2}<\frac{n_2}{m_2}$。由此我们可进一步推出，任何两个不等的有理数之间，必有无限多个有理数存在。考虑到整数都是有理数，所以又不难推知，实数轴上的任何一个开区间（α，β）内，都有无限多个有理数存在，这就是有理数具有的稠密性。

3° 有理数不具有完备性。

何谓完备性？先看以下事实。

设X是由全体有理数构成的“有理数轴”，我们在X上任取一“闭区间套”：

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots,$$

这里a_n，b_n（$n=1$，2，…）都是有理数，且$a_n\leqslant b_n$，$[a_n, b_n]$表示满足$a_n\leqslant r\leqslant b_n$的有理数$r$的全体，并设$b_n-a_n\to 0$（$n\to\infty$）。试问，上述“闭区间套”是否一定能套住某个有理数呢？即是否一定能存在一个有理数r，使得$r\in[a_n, b_n]$（$n=1$，2，…）呢？我们姑且称这个问题为“区间套猜想”。

下面将证明，在有理数轴上，区间套猜想并不成立。例如，取区间套：

a_n：1.01，1.01001，1.010010001，…，

b_n：1.02，1.01002，1.010010002，…，

显然，这里a_n，b_n（$n=1$，2，…）都是有理数，且

$[a_1, b_1]\supset[a_2,b_2]\supset[a_3,b_3]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$，又有

$$b_n-a_n=\frac{1}{10^{2+3+\cdots+n}}\to 0\ \ (n\to\infty).$$

现证没有任何有理数属于一切 $[a_n, b_n]$ $(n=1, 2, \cdots)$。

设有有理数 $r.r_1r_2\cdots\in[a_n,b_n]$ $(n=1, 2, \cdots)$，则

由 $r.r_1r_2r_3\cdots\in[a_1,b_1]$ 可推知 $r=1$，$r_1=0$；

由 $r.r_1r_2r_3\cdots\in[a_2,b_2]$ 可推知 $r_2=1$，$r_3=r_4=0$；

由 $r.r_1r_2r_3\cdots\in[a_3,b_3]$可推知 $r_5=1$，$r_6=r_7=r_8=0$；

……

依此类推，得知$r.r_1r_2r_3\cdots=1.01001000100001\cdots$. 显然，此数不是有理数，与假设矛盾，从而结论获证。

以上论述表明，在有理数范围内，区间套猜想并不成立。此即为有理数的不完备性（也称不连续性）。形象地说，有理数轴虽然稠密（每个有理数区间中都有无限多个有理数存在），但它还有空隙存在。

2．实数及完备性

一切无限小数统称为实数，其中循环小数（包括有限小数）称为有理数，其余（不循环的）称为无理数。就是说，循环小数加上一切形式的不循环小数就构成了全体实数，今后用 R^1 记全体实数。可以证明，实数 R^1 具有完备性，即有

定理 1 （区间套定理） 设 $[a_1, b_1]\supset[a_2, b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$，这里 a_n，b_n 都是实数，$a_n\leqslant b_n$，$[a_n, b_n]$表满足 $a_n\leqslant x\leqslant b_n$ 的实数 x 的全体 $(n=1, 2, \cdots)$. 当$n\to\infty$时，$b_n-a_n\to 0$，则必存在唯一的实数 $\xi\in[a_n,b_n]$ $(n=1,2,\cdots)$.

此定理我们暂时不予证明，下面先由定理1出发，依次证明另外五条与定理1等价的定理，然后再来交待定理1的证明。

☆ **定理 2（有限复盖定理）** 设 D 是实数轴 R^1 上无限多个开区间构成的集合，$[a_1, b_1]$ 是 R^1 上一个确定的闭区间，若对任何 $x\in[a_1, b_1]$ 均有 D 中一个开区间 I_x，使 $x\in I_x$（此时称 $[a_1, b_1]$ 被开区间集 D 所复盖），则在 D 中必有有限个开区间 $I_1, I_2, \cdots, I_n$，使对任何 $x\in[a_1, b_1]$，均有 $I_i\in\{I_1, I_2, \cdots, I_n\}$，使 $x\in I_i$（即 $[a_1, b_1]$ 可被 $\{I_1, I_2, \cdots, I_n\}$ 复盖）。

证 设 $[a_1, b_1]$ 不能被有限个 D 中的开区间所复盖，我们二等分 $[a_1, b_1]$ 成为 $[a_1, c_1]$ 和 $[c_1, b_1]$，则二者中至少有一个不能被有限个 D 中的开区间所复盖，记其为 $[a_2, b_2]$，再二等分其为 $[a_2, c_2]$ 和 $[c_2, b_2]$，同样，二者中必有一个不能被有限个 D 中的开区间所复盖，记其为 $[a_3, b_3]$，…，如此无限进行下去，我们得到闭区间套：

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots,$$

其中每个 $[a_n, b_n]$ 都不能被 D 中有限个开区间所复盖。另一方面，因。

$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

由定理1知，必有唯一的实数 $\xi\in[a_n,b_n]$ $(n=1,2,\cdots)$，因 $\xi\in[a_1,b_1]$，$[a_1,b_1]$ 被 D 复盖，故有开区间 $I_\xi\in D$，使 $\xi\in I_\xi$。又由 a_n，b_n 的取法知

$$a_n\to\xi,\ b_n\to\xi \quad (n\to\infty),$$

故当 n 充分大时，必有 $[a_n,b_n]\subset I_\xi$，这与每个 $[a_n, b_n]$ 不能被 D 中有限个区间所复盖相矛盾，故定理获证。

为了给出定理3，我们先给出“子数列”的概念。

定义 1 数列 $\{x_n\}$ 的一个子数列，是指从原数列$\{x_n\}$中去掉一些项（去掉0项，有限项，无限项均可）后，由剩下的无限项按原来先后顺序排列所成的新数列，一般常记为$\{x_{n_k}\}$。

这里k表示新的序号，n_k表示新数列的第k项在原数列中的序号，故总有$n_k \geqslant k$。

由子数列的含义，我们易知下面两个命题成立：

1° 每个数列有无限多个子数列。

2° 数列$\{x_n\}$有极限$\Longleftrightarrow$每个子数列彼此有相同的极限，且与数列$\{x_n\}$的极限相等。

定理 3 任何有界数列有收敛的子数列。

证 设$\{x_k\}$是有界数列：$a \leqslant x_k \leqslant b$ $(k=1, 2, \cdots)$，若$\{x_k\}$没有任何收敛的子数列，则对$[a, b]$中的每个数x，都不是任何子数列的极限，即对每个$x \in [a,b]$，$\exists \delta > 0$，使得开区间$I_x = (x-\delta, x+\delta)$中最多只含有$\{x_k\}$的有限多项，将此种$I_x$的全体记为$D$；则$D$构成了$[a, b]$的一个开复盖，由定理2知，有$I_1, I_2, \cdots, I_n \in D$，使$\{I_1, I_2, \cdots, I_n\}$复盖$[a, b]$，因而更复盖了$\{x_k\}$，这便推出了$\{x_k\}$一共只有有限多项，显然矛盾，故定理获证。

下面给出一个“基本数列”的概念。

定义 2 设$\{x_n\}$是一数列，若对$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，当$n, m \geqslant N$时，总有$|x_n - x_m| < \varepsilon$成立，则称此$\{x_n\}$是一基本数列，或称柯西数列。

今后我们也常用记号，

$$\lim_{n, m\to\infty} |x_n - x_m| = 0, \text{或} \ |x_n - x_m| \to 0 \ (n, m \to \infty)$$

表示 $\{x_n\}$ 是基本数列。

定理 4 $\{x_n\}$ 是收敛数列 $\Longleftrightarrow$ $\{x_n\}$ 是基本数列。

证 $\Rightarrow$：设 $x_n \to a$，则对 $\forall \varepsilon > 0$，总 $\exists N$，当 $n, m \geqslant N$ 时，有

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

故有

$$|x_n - x_m| \leqslant |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

这表明 $\{x_n\}$ 是基本数列。

$\Leftarrow$：1° 先证 $\{x_n\}$ 是有界数列。

给定 $\varepsilon = 1$，则 $\exists N$，当 $m = N$，$n \geqslant N$ 时，有

$$|x_n - x_m| = |x_n - x_N| < 1,$$

即当 $n \geqslant N$ 时，有

$$x_N - 1 < x_n < x_N + 1.$$

而 x_1，x_2，$\cdots$，x_{N-1} 一共只有有限多个值，故有最大值与最小值存在，总之有

$$\min(x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}, x_N - 1) \leqslant x_n$$
$$\leqslant \max(x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}, x_N + 1),$$

即 $\{x_n\}$ 有界。

2° 再证 $\{x_n\}$ 收敛：

由定理 3 知 $\{x_n\}$ 有子数列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛，设 $x_{n_k} \to a$（$k \to \infty$ 时），即对 $\forall \varepsilon > 0$，总 $\exists K$，当 $k \geqslant K$ 时，有 $|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$。又由 $\{x_n\}$ 是基本列知 $\exists N$，当 $k \geqslant N$（此时 $n_k \geqslant k \geqslant N$）时，有

$$|x_{n_k}-x_k|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $N_1=\max(N,K)$，则当 $k\geqslant N_1$ 时，有

$$\begin{aligned}|x_k-a|&\leqslant|x_k-x_{n_k}|+|x_{n_k}-a|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

此表明 $x_k\to a$（$k\to\infty$ 时）.

定理证毕。

下面为进一步论证的需要，先给出数集的上（下）确界的概念。

设 A 是一数集，M 是一个数，若对任何 $x\in A$，均有 $x\leqslant M$，则称 M 是 A 的一个上界。显然，若 A 有上界，则它必定有无穷多个上界（因大于 M 的数都可成为 A 的上界），在这无穷多个上界中，是否一定有一个最小的上界呢？这个问题在数学上很有意义。为此给出

定义 3 数集 A 的最小上界称为 A 的上确界，记作 $\sup A$。

类似地可定义数集 A 的下确界为 A 的最大下界，并记作 $\inf A$。

上确界的定义，有时常用下述等价的说法：

定义 3′ 设 M_0 是数集 A 的一个上界，若对任给的 $\varepsilon>0$，$M_0-\varepsilon$ 不再是 A 的上界，则称 M_0 为 A 的上确界。

定义 3″ 设 M_0 是数集 A 的一个上界，若对任给的 $\varepsilon>0$，总有 $x_\xi\in A$，使 $x_\xi>M_0-\varepsilon$，则称 M_0 是 A 上确界。

类似的，下确界 $\inf A$ 也有上述等价的说法，请读者自行补足。

显然，若数集 A 中有一最大值 x_0，则 x_0 定是 A 的上

确界。但有上确界的数集并不一定都有最大值存在，如

$$A=\{x|x<0\} \text{ 时，有 } \sup A=0,$$

但 0 不是 A 的最大值。

定理 5 非空而有上（下）界的数集必有上（下）确界。

证 设 A 是一非空而有上界的数集，y_1 是 A 的一个上界，现证 A 有上确界 $\sup A$：

取实数 $x_1<y_1$，使 $[x_1, y_1]$ 中含有 A 的点，分 $[x_1, y_1]$ 为两个等分区间 $[x_1, c_1]$，$[c_1, y_1]$，若右半区间 $[c_1, y_1]$ 中含有 A 的点，则改称其为 $[x_2, y_2]$，否则改称左半区间 $[x_1, c_1]$ 为 $[x_2, y_2]$；再分 $[x_2, y_2]$ 为两个等分区间 $[x_2, c_2]$，$[c_2, y_2]$，同样，若右半区间中含有 A 的点，则改称其为 $[x_3 y_3]$，否则改称左半区间为 $[x_3, y_3]$，…，依此无限进行下去，我们得到一个数列：

$$x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2,\ x_3,\ y_3,\ \cdots,\ x_k,\ y_k,\ \cdots$$

用 $\{z_n\}$ 记此数列，易知此 $\{z_n\}$ 是一基本数列。由定理 4 知，应有 $z_0\in R^1$ 使 $z_n\to z_0$ $(n\to\infty)$。又由子数列的性质，知有 $x_k\to z_0$ 及 $y_k\to z_0$ $(k\to\infty)$。由 y_k 的取法知每个 y_k 都是数集 A 的上界，故 $\{y_k\}$ 的极限 z_0 也是 A 的上界（因对 $\forall x\in A$，有 $x\leqslant y_k$，$(k=1,2,\cdots)$ 故 $x\leqslant\lim\limits_{k\to\infty}y_k=z_0$）。又读者不难从每个 $[x_k, y_k]$ 中都有 A 的点及 $y_k-x_k\to 0$ 知 z_0 是 A 的上确界。

定理证毕。

非空而无上界的数集，当然无上确界可言，此时我们补充定义 $\sup A=+\infty$。于是对任何非空数集 A，符号 $\sup A$ 都有了意义，它或为一确定的数，或为 $+\infty$。

我们还不难得知，当A为非空数集时，总有$\{x_n\}\subset A$，使$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sup A$成立。

当$\sup A=+\infty$时，这是不言自明的，当$\sup A$为有限数时，由$\sup A$的定义知，对任何$\varepsilon_n=\frac{1}{n}>0$，总有$x_n\in A$，使

$$\sup A-\frac{1}{n}<x_n\leqslant\sup A.$$

令$n\to\infty$，即得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sup A$。

定理 6 单调上升（下降）而有上（下）界的数列必为收敛数列。

证 设$\{x_n\}$是一单调上升的有界数列：

$$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant\cdots\leqslant M.$$

视$\{x_n\}$为一数集，则此数集有上界，故由定理5知$\{x_n\}$有有限的上确界，记$M_0=\sup\{x_n\}$。因M_0为最小的上界，故对$\forall\varepsilon>0$，$\exists x_{n_\varepsilon}>M_0-\varepsilon$。由于$\{x_n\}$单调增，故当$n\geqslant n_\varepsilon$时，更有

$$x_n\geqslant x_{n_\varepsilon}\geqslant M_0-\varepsilon.$$

另一方面，显然有$x_n<M_0+\varepsilon$，从而当$n\geqslant n_\varepsilon$时，有

$$M_0-\varepsilon<x_n<M_0+\varepsilon\quad 即\quad |x_n-M_0|<\varepsilon.$$

此表明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=M_0=\sup\{x_n\}$。

定理证毕。

以上我们从定理1出发，依次证明了定理2至定理6。读者还不难由定理6证明定理1。所以，上述六条定理是互相等价的，它们都刻划了实数完备性的实质，故也称它们为

实数完备性的等价命题。

到现在，细心的读者会注意到，以上六定理虽然彼此等价，但它们的真实性还是一个问题，因为开头的定理1并未予以证明。下面我们从实数的定义出发来直接证明与定理1等价的定理5。

设非空数集A有上界M，现证A必有上确界M_0。

因A中的每一个数有形式$r.r_1r_2\cdots$，先看这些数的整数部分r，因这些整数满足$r\leqslant M$，故其中必有一最大整数$r^{(0)}$，把A中整数部分为$r^{(0)}$的那些数的全体记为A_1。看A_1中所有数的第一位数r_1，因这些$r_1\leqslant 9$，故其中必有一最大值$r_1^{(0)}$。把A_1中所有第一位小数为$r_1^{(0)}$的那些数的全体记为A_2。看A_2中所有数的第二位小数r_2，因$r_2\leqslant 9$，故其中必有一最大值$r_2^{(0)}$，…。如此继续，或至某一步终止得到A的最大值$M_0=r_0^{(0)}.r_1^{(0)}r_2^{(0)}\cdots r_k^{(0)}$，或可无限进行下去得到一确定的实数

$$M_0=r_0^{(0)}.r_1^{(0)}r_2^{(0)}\cdots r_n^{(0)}\cdots.$$

容易验证$M_0=\sup A$。证毕。

1.2 集合运算的几个法则

关于集合与集合运算的初步知识，我们在微积分、线性代数等课程中已有所了解，这里再简单重复一下集合的三种运算。

（1）并集　设A，B是两个确定的集合，则称由A的元素与B的元素的全体构成的新集合为A与B的并集，记为$A\cup B$。即有

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\ \text{或}\ x\in B\}.$$