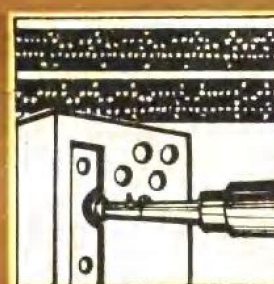
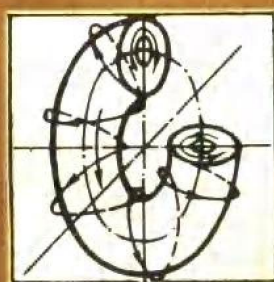


高等学校试用教材



机械制造中的 测试技术

华中工学院黄长艺 卢文祥 编



机械工业出版社

前 言

本书系根据 1978 年 4 月在天津召开的高等学校一机部对口专业座谈会的精神和同年 6 月在大连召开的机械制造工艺及设备专业教材会议所制定的《机械制造中的测试技术》编写大纲编写的。

本书内容主要介绍机械制造中常见动态物理量的电测法。全书分为两大部分：第一部分共六章，为基础部分，介绍有关数学、物理、测量装置和数据分析处理的基础知识；第二部分共七章，为应用部分，介绍位移、振动、噪声、力、温度和机械加工表面层结构状态的测定方法。

本书可作为高等学校机械制造工艺及设备专业的试用教材。也可供从事机械制造专业技术人员参考。

本书由华中工学院机制教研室黄长艺同志担任主编。参加编写的有黄长艺同志（第一、二、四、六、七、八、九、十章）、卢文祥同志（第三、四、五、十一、十二、十三章），霍静娴同志参加了第九章的部分编写工作。杨叔子和师汉民二同志对书稿作了详细的校阅。

本书在编写过程中，得到一机部教材编辑室和兄弟学校的大力支持和帮助。太原工学院施雄茂同志主审本书，参加审稿者有：一机部编辑室翁善惠、昆明工学院郭之锁、天津大学张世厚、上海交通大学洪迈生、浙江大学陆乃炎、重庆大学黄治明、清华大学吴正毅、一机部机床研究所徐性初、大连工学院张松涛、陕西机械学院张华容、西安交通大学王光铨、南京航空学院罗绍义、太原工学院程高楣、李润才、马名祥、一机部大连组合机床研究所范国清等同志。在此，一并表示衷心的感谢。

由于编者水平所限，编写时间短促，书中必定有很多错误和欠妥之处，望读者批评指正。

目 录

绪 言	1
第一章 信号分析	3
§ 1-1 周期信号	4
一、傅里叶级数和周期信号的分解	4
二、周期信号的均方值、均方根值、平均功率和相关函数	8
§ 1-2 非周期信号	10
一、非周期信号和傅里叶积分	10
二、傅里叶变换的若干特性	12
三、非周期函数的能量谱密度和相关函数	13
§ 1-3 随机信号	15
一、随机过程的一般关系	15
二、各态历经过程	16
1. 平均值、均方值、均方根值和方差值 (16) 2. 概率密度函数 (17) 3. 自相关函数和功率谱密度函数 (18)	
4. 互相关函数和互谱密度函数 (19)	
第二章 测量装置的基本特性	20
§ 2-1 测量概述	20
一、测量误差	20
二、选择测量装置应当考虑的一些因素	21
§ 2-2 测量装置的基本特性	22
一、线性系统	22
二、测量装置的静态特性	23
1. 直线性 (23) 2. 灵敏度 (24) 3. 滞后量 (24)	
三、测量装置的动态特性	24
1. 传递函数和频率响应 (25) 2. 脉冲响应函数 (27) 3. 正弦输入时的频率响应 (29)	
§ 2-3 常见测量装置的动态特性	30
一、相似系统	30
二、常见测量装置的频率响应	31
三、常见测量装置的瞬态响应	32
四、频率响应、时间常数、固有频率和阻尼率的影响	35
§ 2-4 测量装置特性参数测定的简介	37
第三章 常用传感器的变换原理	40
§ 3-1 传感器的分类和性能要求	40
一、分类	40
二、传感器应具有的性能	42
§ 3-2 电阻式传感器	43
一、变阻器式传感器	43
二、电阻应变式传感器	44
1. 金属丝电阻应变片 (44) 2. 半导体应变片 (46)	

IV

§ 3-3 电感式传感器	47
一、可变磁阻式传感器	48
二、涡流式电感传感器	49
三、差动变压器式电感传感器	51
§ 3-4 电容式传感器	52
一、极距变化型	52
二、面积变化型	53
§ 3-5 压磁式传感器	54
§ 3-6 压电式传感器	55
§ 3-7 霍尔效应传感器	57
一、基本原理	58
二、霍尔效应传感器	59
§ 3-8 磁阻效应传感器	59
§ 3-9 热电效应	60
一、接触电势	61
二、同一导体中的温差电势	61
§ 3-10 光电式传感器	62
一、外光电效应及光电管	62
二、内光电效应及光导管	63
三、光生伏打效应及光敏晶体管	64
四、光电式传感器及其应用	64
1. 模拟式光电传感器 (65) 2. 数字式光电传感器 (66)	
第四章 测量装置的一些中间变换器	67
§ 4-1 电桥	67
一、直流电桥	67
二、交流电桥	68
三、变压器电桥	71
四、平衡电桥	71
§ 4-2 滤波器	72
一、理想滤波器	72
二、实际滤波器	73
1. RC 滤波器 (73) 2. 实际滤波器的主要类型 (74)	
§ 4-3 放大器	78
一、信号源和放大器的阻抗组合的影响	79
1. 阻抗 z_g 和 z_i 均为电阻 (80) 2. z_g 为电阻、 z_i 为复数阻抗 (80) 3. z_g 为容抗、 z_i 为复数阻抗 (81)	
二、放大器及其负载的阻抗匹配	81
§ 4-4 调制与解调	82
一、电桥调幅与相敏检波	82
二、谐振调频器与鉴频器	83
§ 4-5 模拟-数字转换器	87
一、模-数转换原理	88
二、模-数转换器	89
1. 跟踪比较式 (89) 2. 双积分式 (89)	

三、数-模转换器	90
第五章 记录仪器	92
§ 5-1 光线示波器	92
一、光线示波器工作原理	92
二、振动子特性	92
1. 振动子的力学模型 (93) 2. 静态特性 (93) 3. 动态特性 (93) 4. 振动子的阻尼 (96) 5. 电流灵敏度 (96)	
6. 振动子类型 (97) 7. 振动子的选用 (99)	
§ 5-2 笔式记录仪	100
一、检流计式笔记录仪	100
二、伺服记录仪	101
§ 5-3 磁带记录器	102
一、磁带记录器的构成及其工作原理	102
二、磁带记录器的类型	104
1. 模拟记录方式 (104) 2. 数字记录方式 (106)	
三、磁带记录器的应用	106
第六章 实验数据的处理和分析	108
§ 6-1 重复测量数据的数字特征	108
一、样本的数字特征	108
二、总体数字特征的估计和测量结果的表达	109
§ 6-2 实验数据表示法	111
一、回归方程——经验公式	111
1. 线性相关和相关系数 (111) 2. 线性回归方程的确定 (112) 3. 回归方程的精度 (114)	
二、图示法	116
§ 6-3 时间序列概述	116
§ 6-4 时间序列的平均值和均方值	117
§ 6-5 数据的滤波	118
§ 6-6 时间序列的相关分析	120
§ 6-7 时间序列的功率谱密度分析	122
一、功率谱密度的三种定义	122
二、功率谱密度的估计和误差	123
§ 6-8 互谱密度函数、相干函数和频率响应函数	126
一、互谱密度函数	126
二、相干函数	127
三、频率响应函数	128
§ 6-9 采样和频混	129
§ 6-10 泄漏和窗函数	131
第七章 位移的测量	134
§ 7-1 常用的位移传感器	134
一、变阻器式位移传感器	134
二、差动变压器式位移传感器	137
三、电容式位移传感器	139
四、同步机和微分同步器	141

§ 7-2 回转误差运动的测量	142
一、回转轴的误差运动	142
二、敏感方向	144
三、测量方法	145
1.打表法 (145) 2.双向测量法 (146) 3.单向测量法 (148) 4.数字式测量法 (150) 5.在 $e \approx 0$ 的条件下, 用双向测量法测定回转轴心平均位置和误差运动的问题 (150) 6.小结 (150)	
四、圆图象的处理和分析	151
五、圆球安装偏心和形状误差影响的消除	152
1.减小安装偏心影响的方法 (153) 2.圆球形状误差影响的消除 (153)	
第八章 机械振动的测量(一)——测振的基本原理和常用仪器	155
§ 8-1 单自由度系统的受迫振动	155
一、由作用在质量上的力所引起的受迫振动	156
二、由基础运动所引起的受迫振动	158
§ 8-2 拾振器和阻抗头	160
一、惯性式拾振器的力学模型	160
二、加速度计	163
1.压电式加速度计的结构 (163) 2.压电式加速度计的特性及其使用 (164) 3.其他型式的加速度计 (168)	
三、磁电式速度拾振器	168
四、伺服式加速度计	169
五、阻抗头	172
§ 8-3 振动信号处理仪器	172
一、振动计	172
二、频率分析仪	172
1.并联滤波器实时分析仪 (173) 2.时间压缩式实时分析仪 (173)	
三、快速傅里叶分析仪	174
§ 8-4 激振器	175
一、电动式激振器	175
二、电磁激振器	177
三、电液激振器	179
第九章 机械振动的测量(二)——机械阻抗的测量和测振装置的校准	180
§ 9-1 机械阻抗的测量	180
一、测量机械阻抗的方法	180
1.测量机械阻抗的基本原理和要求 (180) 2.激振方法 (180) 3.几种常用的测量系统 (181)	
二、机械阻抗数据的初步分析	183
1.结构受迫振动的一些现象 (183) 2.机械阻抗数据分析的方法 (184) 3.振型的测定 (188)	
§ 9-2 测振装置的校准	188
一、绝对校准法	189
1.激光干涉校准法 (189) 2.互易校准法 (190)	
二、比较校准法	191
三、机械阻抗测量系统的校准	191
第十章 噪声的测量	192
§ 10-1 基本概念	192
一、噪声的物理量度	192

1. 声压和声压级 (192) 2. 声强、声强级、声功率和声功率级 (192) 3. 噪声的频谱 (193)	
二、噪声的主观评价	193
1. 纯音的响度 (193) 2. 宽带噪声 (195)	
§ 10-2 噪声测量常用仪器	197
一、传声器	197
1. 传声器的频率响应 (198) 2. 常用的传声器 (198)	
二、声级计	201
三、声级计的校准	201
1. 活塞发声器校准法 (202) 2. 扬声器校准法 (203) 3. 静电激励器校准法 (203) 4. 互易校准法 (203)	
5. 置换法 (204)	
§ 10-3 噪声测量中的若干问题	204
一、一般的现场测量	204
二、声功率测量	205
三、声压相加	205
第十一章 力的测量	207
§ 11-1 力的基本测量方法及测力传感器	207
一、力的单位、与力有关的其他物理量	207
二、力的测量方法	207
三、测力传感器	208
1. 弹性式 (208) 2. 电阻应变式 (208) 3. 差动变压器式 (210) 4. 电容式 (210) 5. 压磁式 (211)	
6. 光电式 (211)	
四、测力传感器的定标	212
1. 静态定标——灵敏度和定标曲线的测定 (212) 2. 动态定标 (213)	
§ 11-2 切削力的测定	215
一、切削测力仪应具备的性能	215
1. 灵敏度 (216) 2. 直线性 (216) 3. 稳定性 (216) 4. 静刚度 (216) 5. 互干扰度 (216) 6. 频率响应特性 (216) 7. 结构简单 (216) 8. 体积小 (217) 9. 密封好 (217)	
二、典型的切削测力仪	217
1. 车削测力仪 (217) 2. 铣削测力仪 (220) 3. 钻削测力仪 (221) 4. 磨削测力仪 (221) 5. 滚削测力仪 (222)	
6. 压电晶体式测力仪 (223)	
三、切削测力仪的定标	223
1. 静态定标 (223) 2. 互干扰的修正 (224) 3. 动态定标 (225)	
§ 11-3 测力仪的动力学问题	226
一、测力系统的一般力学关系	226
二、测力仪的动态特性	227
1. 测力仪置于刚性基体上 (228) 2. 测力仪置于弹性基体上 (230) 3. 测力仪动态测量误差的消除 (230)	
第十二章 温度的测量	232
§ 12-1 温度标准及基本测量方法	232
一、温标	232
二、测温法分类	232
§ 12-2 接触式测温方法	233
一、接触式测温仪器	233
1. 热膨胀式温度计 (233) 2. 电阻温度计 (234) 3. 热电温度计 (236)	
二、接触式测温误差分析	239

1. 测温过程中热量的传递及温度差 (239) 2. 动态测温误差 (239)	
§ 12-3 非接触式测温方法	242
一、热辐射的基本概念	242
二、热辐射的基本定律	243
1. 绝对黑体模型 (243) 2. 普朗克定律 (243) 3. 斯忒藩-波耳兹曼定律 (243)	
三、辐射温度计	245
四、红外测温	245
1. 红外探测器 (245) 2. 红外测温仪 (246) 3. 红外热象仪 (246)	
§ 12-4 切削温度的测量	246
一、测量切削温度的方法	247
1. 热电偶法 (247) 2. 热辐射法 (248)	
二、用热电偶法测温时的寄生热电势	249
三、用热电偶法测定切削温度时的定标	250
第十三章 机械加工表面层结构状态的测量	253
§ 13-1 零件表层加工硬化的测量	253
§ 13-2 金相组织分析方法及扫描电子显微镜在切削加工中的应用	255
一、光学金相显微镜	255
二、透射式电子显微镜	255
三、扫描电子显微镜	256
四、SEM 在金属切削研究中的应用	257
§ 13-3 残留应力的测定方法及 X 射线衍射仪	258
一、残留应力及其测定方法	258
二、X 射线法测定原理	259
三、X 射线衍射仪	260
四、X 射线应力测定在工业中的应用	260
§ 13-4 零件表层裂纹的检查方法	261
一、零件表层裂纹检查方法	261
二、超声波探伤仪原理及应用	261
1. 超声波探伤原理 (261) 2. 超声波探头 (262) 3. 超声波探伤仪工作原理 (263)	
附录	264
I 分贝换算	264
II 国际单位制 (SI) 及其换算	267
参考文献	272

绪 言

(一)

科学技术的发展，同测试技术的发展息息相关，除了极其个别的学科之外，现代的科学技术是离不开测试工作的。

诚然，现代测试方法和装置的出现，是科学技术发展的结果。然而，从另一方面来说，精确的测试又是促成科学技术的新发现和新发展的强有力的工具。这类事例在各个科学部门和技术行业中都数不胜数。因此，使用先进的测试技术是科学技术现代化的重要标志之一，也是科学技术现代化必不可少的条件。

现在从事机械制造业的工程技术人员，不仅面临着静态几何量的测量，而且随着科学技术的发展，还越来越多地面临着许多不可避免的动态物理量（诸如位移、振动、噪声、力和温度等）的测量。这些测量，大量的是使用所谓的非电量电测法的，即通过传感器将被测量变换成电信号，而后对电信号这种共同形式的信号进行各种中间变换来最终达到测量的目的。因此，机械制造业的工程技术人员，应当掌握这些常见动态物理量电测法的有关知识。

本课程研究的对象是机械制造（主要是机械加工）中常见动态物理量的电测法。

尽管机械制造业涉及的测试技术，其范围很广，但是由于教学时数有限，课程之间的分工和配合，本课程不可能也不必要介绍实际可能遇到的各种参数的测试方法。例如本教材没有介绍光栅、感应同步器和磁栅等检测系统，因为这些内容在《机床电气自动控制》课程中已经讨论过了。

(二)

任何一个物理量的测量装置，往往是由许多功能不同的器件所组成的。典型的测量装置如图1所示。传送着被测量变化的信息的输入信号，首先经过传感器变换成便于输送、转换和测量的电信号之后送进中间变换器。中间变换器用来实现信号的再转换、放大或衰减、调制和解调、阻抗变换、分析和运算等项处理，使信号变成一些合于需要又便于记录和显示的信号，并最后被记录器、显示器记录或显示出来，供测量者应用。

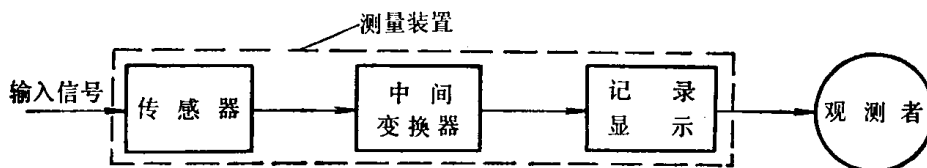


图1 测量装置的方框图

很明显，完成一次科学的测试，需要掌握多方面的知识。首先，需要深入了解各种信号的基本特性和分析方法。因为信号本身的特性，特别是它的频率结构对正确选择和运用测量

装置有着重大影响。

其次，应当掌握实验数据的处理方法。因为只有经过科学处理后的实验结果才可能是合于需要和可靠的。

这两方面所需的知识，将在第一章和第六章中讨论。

其三，必须了解传感器的变换原理和测量装置的基本特性。只有这样，才能依据被测量的性质和测量的目的正确选择和运用各种传感器和测量装置的其他组成部分。第二至五章就是讨论这方面的基本知识。

最后，由于被测量本身的物理特性及某些变化规律是建立测量方法和分析测量结果的依据，因此，必须了解被测量的这些规律，并结合这些规律来研究相应的测试方法。这就是第七至十三章所讨论的内容。

这样，第一章至第六章是测试技术及有关装置的一些基本理论和基本方法部分，第七章至第十三章则是这些理论和方法在一些物理量测试中的具体应用部分。

第一章 信号分析

在生产斗争和科学实验中，需要观测大量的物理现象和物理参数的变化，并且总是需要把它们变换成一定形式的信号。这些被观测的信号可分为确定性信号和非确定性信号两类。

作为时间函数的确定性信号是能够用明确的数学关系式来描述。例如集中参数的单自由度振动系统（图 1-1）作无阻尼自由振动时，其位移 $x(t)$ 这个信号可用下列关系式来描述：

$$x(t) = X \cos \sqrt{k} t \quad (1-1)$$

式中 t ——时间；

k ——弹簧常数；

m ——质量；

X ——取决于初始条件的常数。

式 (1-1) 确定了任何瞬时质量的精确位置。因此其位移信号是确定性的。

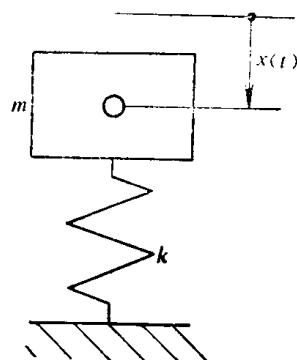


图1-1 单自由度振动系统

但是，在实践中还有许多信号，它作为时间函数却无法用明确的数学关系式来表达，无法预测未来任何瞬时的精确值。这类信号就称为非确定性信号或随机信号。它们只能用概率术语来描述。环境的噪声和环境的振动都属于这一类信号。

通常以实验能否重复产生这些信号为依据，来判断信号是确定性的还是非确定性的。如果产生信号的实验，重复多次能够得到相同的结果（在一定实验误差范围内）则一般可以认为这些信号是确定性的，否则就是随机性的。

确定性信号可以进一步分为周期性信号和非周期信号。非确定性信号可以分为平稳的和非平稳的两种。

尽管任何确定性信号，一般都可以用一个时间函数来表达，但是实际信号都比较复杂，直接对其时间函数进行分析和处理常常有许多困难。为了克服这些困难，往往将一般的复杂信号展开成某种类型的基本信号的和。这些被采用的基本信号必须是一些易于实现、分析和处理的信号。应用最广泛的基本信号之一是正弦型信号。

复杂的信号包含着许多有用的信息。根据测试目的的不同，必须对信号进行不同项目的测定和分析。例如：为了了解信号的强度，需要测定信号的均方值；要了解信号的波动程度，需要将信号看作稳定分量和波动分量之和，稳定分量用信号对时间的代数平均值来描述，波动分量用信号的方差来描述；为了了解信号的频率结构和在有关频率上的强度分布，需要在频率域上对信号进行频率分析；为了了解信号本身或者信号互相之间的相似程度，需要在时间域上对信号进行相关分析；为了了解信号大小取各种可能值的概率，需要在幅值域中进行概率密度分析。

§ 1-1 周期信号

设一个随时间 t 而变的信号 $x(t)$, 当 $x(t+nT) = x(t)$, n 为任意整数, T 为常数, 则 $x(t)$ 是一个周期信号。 T 称为周期 [s]*。周期信号 $x(t)$ 的频率记为 f_0 [Hz], $f_0 = \frac{1}{T}$ 。记 $2\pi f_0$ 为 ω_0 [rad/s], 称为角频率。

最简单又最有用的周期信号是正弦信号。因为, 除了容易产生正弦信号和利用正弦信号激励测量装置容易分析测量装置的动态特性等原因之外, 最主要的原因是任何一个周期信号都可以展开成由许多正弦谐波成分组成的傅里叶 (Fourier) 级数。正弦信号的表达式为

$$\begin{aligned} x(t) &= X \sin(\omega_0 t + \theta_0) \\ &= X \sin(2\pi f_0 t + \theta_0) \end{aligned} \quad (1-2)$$

式中 X ——幅值;

θ_0 ——初相角。

由于余弦信号可以改写成适当的正弦信号, 因此, 今后将两者总称为正弦信号。

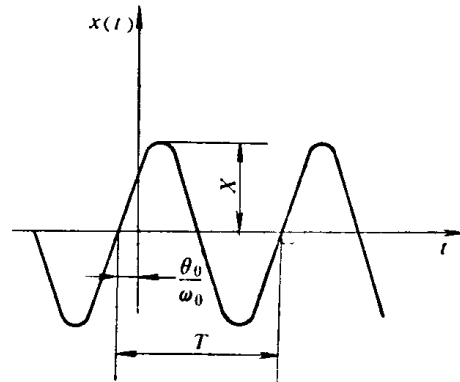


图1-2 正弦信号

一、傅里叶级数和周期信号的分解

描述周期信号的基本数学工具是傅里叶级数。根据傅里叶级数的理论, 在满足狄利克雷 (Dirichlet) 条件下, 任何一个周期为 T 的周期信号 $x(t)$ 都可展成如下的傅里叶级数:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1-3)$$

式中

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (1-4)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (1-5)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (1-6)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

式 (1-3) 也可改写成另一种形式

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n) \quad (1-7)$$

式中

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (1-8)$$

$$\theta_n = \arctan \left(-\frac{b_n}{a_n} \right) \quad (1-9)$$

* 在本书中, 方括弧 [] 中的代号代表各种量的单位。

由式 (1-7) 可以清楚地看到, 满足狄利克雷条件的周期信号, 都可以分解为一个平均值 $\frac{a_0}{2}$ 和无限多个成谐波关系的正弦成分。这些谐波成分的频率是基频 $\frac{1}{T}$ 的整数倍。各频率成分的幅值 c_n 和初相位 θ_n 由式 (1-8) 和 (1-9) 给定, 并与时间 t 无关。

序列 c_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) 称为 $x(t)$ 的幅值频谱 (Amplitude spectrum)。其图形如图 1-3 所示, 是由无限个彼此相隔 ω_0 的离散的谱线所组成的, 故称为离散频谱。

与此类似, 序列 θ_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) 称为 $x(t)$ 的相位频谱 (Phase spectrum)。

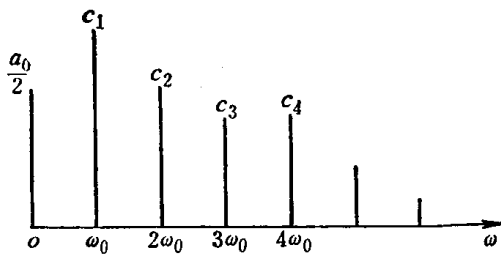


图1-3 周期信号的幅值频谱

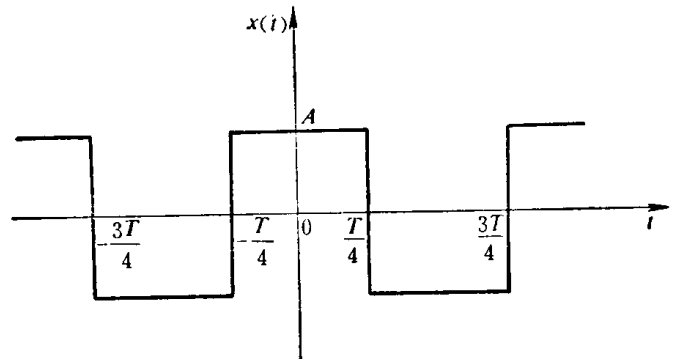


图1-4 周期方波

例 求图 1-4 所示的周期方波的傅里叶级数。

解 所给波形在一个周期 $(-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2})$ 的表达式为

$$x(t) = \begin{cases} -A & -\frac{T}{2} < t < -\frac{T}{4} \\ A & -\frac{T}{4} < t < \frac{T}{4} \\ -A & \frac{T}{4} < t < \frac{T}{2} \end{cases} \quad (1-10)$$

根据式 (1-4)、(1-5) 和 (1-6) 得

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= 0, & b_n &= 0 \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{-T/4} (-A) \cos n\omega_0 t dt + \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} A \cos n\omega_0 t dt \\ &\quad + \frac{2}{T} \int_{T/4}^{T/2} (-A) \cos n\omega_0 t dt \\ &= \frac{4A}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{4A}{n\pi} (-1)^{\frac{(n-1)}{2}} \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \end{aligned} \quad (1-11)$$

于是, 得

$$x(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\cos \omega_0 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_0 t - \dots \right) \quad (1-12)$$

此周期方波的幅值频谱如图 1-5 所示。各次谐波分量的幅值分别为基波幅值 $\frac{4A}{\pi}$ 的 $\frac{1}{n}$ 。

值得注意, 级数 (1-12) 式收敛很慢, 因此需要用很多项 (例如 50 项以上) 的谐波才能构成一个较精确的方波。从图 1-6 中可以看出取前四项和前七项所对应的波形与理论方波的差别。

实际上, 为了便于数学运算, 往往将傅里叶级数写成虚数指数形式。根据欧拉 (Euler) 公式, 正弦和余弦函数都可写成虚数指数形式, 即

$$\sin n\omega_0 t = \frac{1}{2j} (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) \quad (1-13)$$

$$\cos n\omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) \quad (1-14)$$

式中 $j = \sqrt{-1}$

因而可将式 (1-3) 改写成

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega_0 t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega_0 t} \right) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n e^{jn\omega_0 t} + \alpha_{-n} e^{-jn\omega_0 t}) \quad (1-15)$$

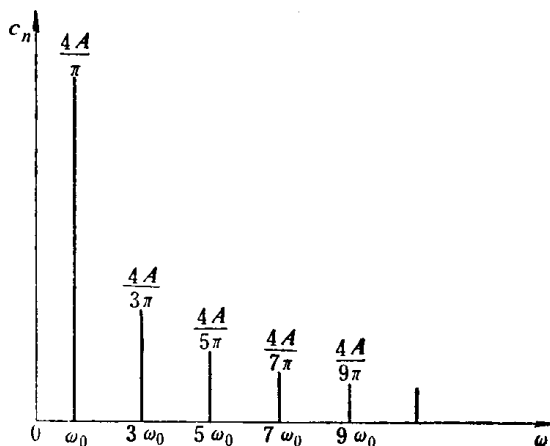


图1-5 方波的幅值频谱

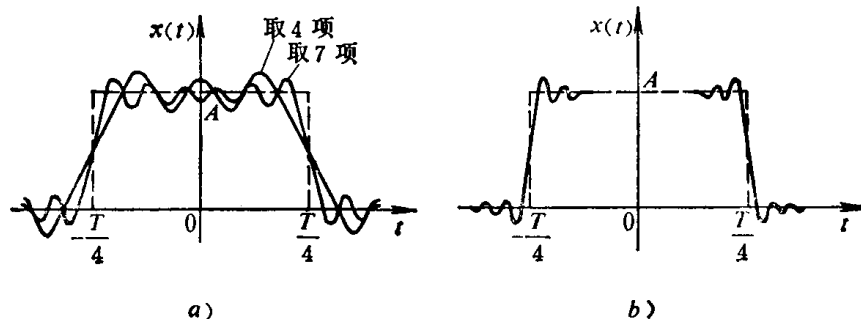


图1-6 少数谐波和与方波的差别

a) 取少数几项和 b) 许多项之和 ($n \gg 1$)

$$\text{式中} \quad \alpha_0 = \frac{a_0}{2} \quad (1-16)$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2} (a_n - jb_n) \quad (1-17)$$

$$\alpha_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + jb_n) \quad (1-18)$$

当 $n = 0$ 时, 由式 (1-6) 得知 $b_n = 0$, 故式 (1-17)、(1-18) 与式 (1-16) 一致。同时, 根据式 (1-5) 和 (1-6) 可知

$$a_n = a_{-n}, \quad b_n = -b_{-n}$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{n=-1}^{-\infty} \alpha_n e^{jn\omega_0 t}$$

最后, 可将式 (1-15) 改写成

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{jn\omega_0 t} \quad (1-19)$$

这就是傅里叶级数的虚数指数形式。将式 (1-5) 和 (1-6) 代入式 (1-17), 可得傅里叶级数的复数系数 α_n

$$\alpha_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (1-20)$$

式中 n 在从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 范围中取整数值。 α_n 也称为傅里叶级数变换。

值得注意, 若 $x(t)$ 是 t 的周期性偶函数, 即

$$x(t) = x(-t)$$

则 $x(t)$ 的傅里叶级数中只含有余弦项和常数项, 并可用下式来计算系数 a_n

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (1-21)$$

$$\text{式中 } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

若 $x(t)$ 是 t 的周期性奇函数, 即

$$x(t) = -x(-t)$$

则 $x(t)$ 的傅里叶级数只有正弦项, 并且系数 b_n 可按式计算:

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (1-22)$$

例 求图 1-7 中周期三角波的傅里叶级数。

解 因为 $x(t)$ 在一个周期中可表达为

$$x(t) = \begin{cases} A + \frac{2A}{T}t & -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \\ A - \frac{2A}{T}t & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

且满足

$$x(t) = x(-t)$$

故 $x(t)$ 是偶函数, 只含余弦项, 且

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \cos n\omega_0 t dt \\ &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \left(A - \frac{2A}{T}t \right) \cos n\omega_0 t dt \\ &= \begin{cases} \frac{4A}{n^2\pi^2} & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

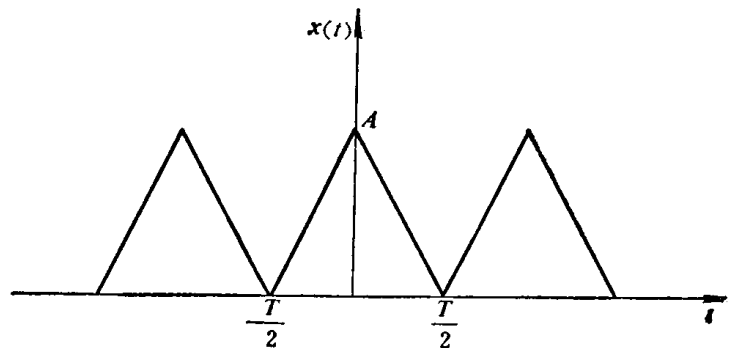


图1-7 周期性三角波

$$a_0 = A$$

因此

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{A}{2} + \frac{4A}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos n\omega_0 t \\ &= \frac{A}{2} + \frac{4A}{\pi^2} \left(\cos \omega_0 t + \frac{1}{3^2} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5^2} \cos 5\omega_0 t + \dots \right) \end{aligned} \quad (1-23)$$

二、周期信号的均方值、均方根值、平均功率和相关函数

周期信号 $x(t)$ 在一周期内对时间的平均值 μ_x 就是稳定分量。由式 (1-4) 和 (1-16) 可知, a_0 就是信号的平均值 μ_x , 即

$$\mu_x = a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (1-24)$$

一般不宜用周期信号的最大值来描述信号的大小 (正弦信号除外), 因为最大值仅仅表达信号在某一瞬时的大小, 却没有涉及信号的时间过程。平均值 μ_x 也只能描述信号的稳定分量, 无法反映信号的波动分量。描述信号大小的量, 以信号的均方根值最为合适。信号 $x(t)$ 的均方根值 (Root-mean-square value) x_{rms} 就是 $x(t)$ 的均方值 (Mean square value) ψ_x^2 的正平方根, 由下式来定义:

$$\psi_x^2 = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad (1-25)$$

$$x_{rms} = \left[\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1-26)$$

根据巴什瓦 (Parseval) 等式有

$$\psi_x^2 = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1-27)$$

或者

$$\begin{aligned} \psi_x^2 &= \alpha_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \\ &= \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (1-28)$$

相应得到

$$\begin{aligned} x_{rms} &= \left[\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (1-29)$$

尽管并不是所有信号的均方值都具有功率的量纲, 但是在信号分析中却形象地称均方值为信号的平均功率 P_{av} 。如果将信号 $x(t)$ 看成加在一个电阻值为一单位的电阻上的电

压, 则 P_{av} 就表示信号在一个周期中加在该电阻上的平均功率。从 (1-28) 式可清楚看到, 平均功率取决于平均值和各个频率分量的幅值 c_n 。

将序列 $|\alpha_n|^2$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 或序列 $\frac{1}{2}c_n^2$ ($n = 1, 2, \dots$) 称为周期信号 $x(t)$ 的功率频谱 (Power spectrum)。应当注意到 n 在两序列中取值范围不同, 两序列对应项的值也不同, $\frac{1}{2}c_n^2 = 2|\alpha_n|^2$ 。

相关函数 (Correlation function) 是描述两个时间函数 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 之间的相似程度。

定义

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t) x_2(t + \tau) dt \quad (1-30)$$

为周期函数 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的互相关函数 (Cross-correlation function)。式中, T 为 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的周期; τ 是在 $(-\infty, \infty)$ 中变化的并与 t 无关的连续时间变量, 称为时间位移。

将两周期函数的傅里叶级数代入式 (1-30), 可得

$$\begin{aligned} R_{12}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{n_2} e^{jn\omega_0(t+\tau)} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{n_2} e^{jn\omega_0\tau} \cdot \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t) e^{jn\omega_0 t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{n_2} \cdot \overline{\alpha_{n_1}} e^{jn\omega_0\tau} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha'_n e^{jn\omega_0\tau} \end{aligned} \quad (1-31)$$

式中, $\overline{\alpha_{n_1}}$ 是 α_{n_1} 的共轭复数, 而 $\alpha'_n = \alpha_{n_2} \cdot \overline{\alpha_{n_1}}$ 。式 (1-31) 表明周期函数的互相关函数也是一个周期函数。

根据傅里叶级数和式 (1-31) 得知

$$\alpha'_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_{12}(\tau) e^{-jn\omega_0\tau} d\tau \quad (1-32)$$

即, α'_n 是 $R_{12}(\tau)$ 的傅里叶级数变换。

由上所述, 不难看到相关分析实际上包括三个步骤:

1. 取函数 $x_2(t)$ 的时间平移函数 $x_2(t + \tau)$;
2. 取 $x_2(t + \tau)$ 和 $x_1(t)$ 的乘积;
3. 在时间域中求积分并平均之。

这样的处理过程, 对于以后将要讲的非周期信号和各态历经随机信号也都是适用的。

当 $x_1(t) = x_2(t) = x(t)$, 则式 (1-30) 变成