高等学校交流講义

理論力学补充教材

LILUN LIXUE BUCHONG JIAOCAI

北京大学数学力学系固体力学教研室编

人民教育出版社

高等学校交流講义

理論力学补充教材

LILUN LIXUE BUCHONG JIAOCAI

北京大学数学力学系固体力学教研室編

人民教育出版社

这是一本补充教材，是由北京大学数学力学系固体力学教研室針对西北工业大学理論力学教研組所編的“理論力学”上下册而編写的。其内容分两部分，其一是作为該“理論力学”上册运动部分的附录，其二是为下册重新写的第七章分析力学。本书可作为綜合大学和高等师范学校中的力学、数学、計算数学专业理論力学課程的补充教材。

簡装本說明

目前850×1168毫米規格紙張較少，本书暫以787×1092毫米規格紙張印刷，定價相应减少20%。希鉴諒。

理論力学补充教材

北京大学数学力学系固体力学教研室編

人民教育出版社出版 高等学校教学用书编辑部 北京宣武門内承恩寺7号

（北京市书刊出版业营业許可証出字第2号）

人民教育印刷厂印装

新华书店科技发行所发行

各地新华书店經售

統一书号 13010·968 开本 787×1092 1/32 印張 2

字数 45,000 印数 00001—21,000 定价（6）¥0.18

1961年7月第1版 1961年7月北京第1次印刷

目　　录

1. 运动学附录

相对于动参考系运动的質点的速度和加速度的合成

当質点相对于动参考系运动，而我們从另一个認为是基本的参考系中观察这个点的运动时，便得到速度和加速度的合成定理。在正文中我們已得到牵連运动是平动或只是定軸轉动时速度和加速度合成的表达式。从下面将看到，在最一般的情况下，也就是牵連运动是任一空間运动时，点的速度、加速度也有类似結果。

設动参考系 $Oxyz$ 在基本参考系 $C\xi\eta\zeta$ 中以某一規律作空間运动，則点 M 在基本参考系中的位置可以通过在动参考系中的位置来描述，

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}$$

$\boldsymbol{r}_1$ 是点在基本参考系中的坐标向徑，$\boldsymbol{r}_0$ 是动参考系原点在基本参考系中的坐标向徑，$\boldsymbol{r}$ 是点在动参考系中的坐标向徑。

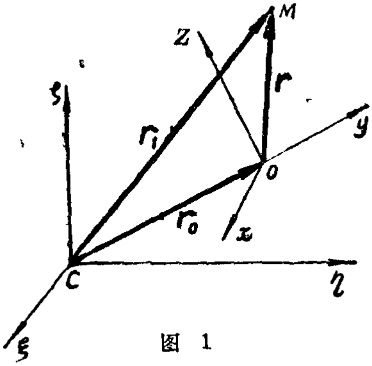

图 1

将此式对时間微商便得到点的速度，

$$\frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt}=\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}_0}{dt}+\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

由于 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，这里的 x、y、z 及 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 都是时間的函数，所以微商就得:

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}_0}{dt}+\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dy}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}+x\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}+y\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}+z\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}.$$

如果已知动参考系的瞬时角速度是 $\boldsymbol{\omega}$（一般情况下 $\boldsymbol{\omega}$ 的大小、方向都是随时間变化的），則利用已經在前面得到的波桑公式就得到，

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}_0}{dt}+\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dy}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}+x(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i})+y(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{j})+z(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{k})$$

$$=\frac{d\boldsymbol{r}_0}{dt}+\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dy}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}+\boldsymbol{\omega}\times(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$$

所以

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{v}_r$$

其中 $\boldsymbol{v}_0=\dfrac{d\boldsymbol{r}_0}{dt}$，$\boldsymbol{v}_r=\dfrac{dx}{dt}\boldsymbol{i}+\dfrac{dy}{dt}\boldsymbol{j}+\dfrac{dz}{dt}\boldsymbol{k}$。显然，如果动参考系相对基本参考系不动，則 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_r$，所以 $\boldsymbol{v}_r$ 是点相对动参考系的速度；而如果 $\boldsymbol{v}_r=0$，即点相对动参考系不动，則 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$，只与动参考系的运动有关，所以这两項表示牽連速度。如果以 $\boldsymbol{v}_t$ 表示牽連速度，則速度的合成公式可以表为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_t+\boldsymbol{v}_r.$$

对速度合成公式継續微商一次，便得到加速度

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{v}_0}{dt}+\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{v}_r}{dt}$$

只要注意到

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{v}_r$$

以及

$$\frac{d\boldsymbol{v}_r}{dt}=\frac{d}{dt}(v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k})$$

$$=\frac{dv_x}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dv_y}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dv_z}{dt}\boldsymbol{k}+\boldsymbol{\omega}\times(v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k})$$

$$=\boldsymbol{w}_r+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$$

便最后得到加速度合成表示式:

$$\boldsymbol{w}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{w}_0+\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r+\boldsymbol{w}_r$$

如果$\boldsymbol{v}_r=0$, $\boldsymbol{w}_r=0$, 則加速度只有前三項

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}_e=\boldsymbol{w}_0+\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$$

称为牵連加速度。它只与动参考系的运动有关。$\boldsymbol{w}_r$ 显然是点的相对加速度，而 $2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$ 是由于动参考系有轉动与点又有相对运动而形成的一部分加速度。我們称这一項为附加加速度，或叫科里奥莱加速度。

所以加速度合成公式也可以写为

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}_e+\boldsymbol{w}_k+\boldsymbol{w}_r$$

其中
$$\boldsymbol{w}_e=\boldsymbol{w}_0+\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$$

$$\boldsymbol{w}_k=2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$$

由此可以清楚看到，如果牵連运动中 $\boldsymbol{\omega}=0$, 即牵連运动只作平动，或是 $\boldsymbol{w}_0=0$, $\boldsymbol{\omega}$ 是某一定軸角速度，即牵連运动只有轉动，这两种特殊情形正是前面已經得到的結果。这里得到的公式包括了动参考系作任意运动的情形。

II. 第七章　分析力学

引　言

分析力学是应生产的要求而产生并随生产的发展而发展。十八世紀以后，机械工业大发展，它提出了大量的新的力学問題，分析力学就是在这些問題的解决过程中发展起来的。这些問題的主要特点是許多物体互相約束，而且系統是由更多的物体組成。这时用老的办法已經不能应付解决这些問題的要求。而分析力学則継承了以前力学发展的成果，給出解决力学問題的統一的观点和方法，它开辟了解决受約束的物体以及更为复杂的物体系的运动及平衡問題的新途徑，从而把理論力学推向新的阶段。

分析力学的基础是可能位移① 原理和达朗伯原理。前者給出解决力学系統平衡問題的普遍原理；而后者的引入使我們能够用平衡的观点来处理动力学問題。基于这些原理并运用数学工具把它精确化、一般化，我們就得到便于应用的新形式。

§7.1　可能位移原理

1. 可能位移原理是解决力学系統平衡問題的普遍原理。

随着生产的发展，特别是机械工业的发展，我們遇到的对象經常是由許多物体組成的复杂系統（如机构、机器）。这时，按照过去的方法解决問題，由于物体間内部約束，彼此牽扯，往往要列很多方程然后从相当庞大的方程組中求解。例如，在初等静力学中已經知道，在最一般情况下，剛体平衡时作用力滿足六个平衡方程。

---

① 这里說的“可能位移”，别的书上也叫做“虚位移”。

如果我們有由三个物体組成的系統，那末在一般情况下，我們就要解包含約束力的十八个方程。实际上，这样笨拙的方法不仅使問題繁杂到很不容易解决，而且也沒有必要，因为在大多数机械問題中并不需要知道約束力有多大，只要注意主动力与有用阻力。这样一来，就迫切地需要寻求新的更有力的解决这类問題的方法。而随着机械的发展，人們逐漸积累了一部分經驗，甚至在簡单机械(斜面，杠杆，…)的使用中也已产生某些新方法的萌芽。例如，对于杠杆(图 7.1)在它平衡时我們有

$$\frac{P}{Q}=\frac{BC}{AC}$$

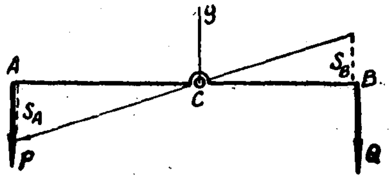

图 7.1

如果給杠杆一个小的轉动則 A 点得到位移 S_A，B 点得到位移 S_B。則有

$$\frac{P}{Q}=\frac{BC}{AC}=\frac{S_B}{S_A}$$

亦即：力与位移呈反比关系。这个式子也就是 $PS_A+Q(-S_B)=0$ 它表示：当系統平衡时，若給系統一个約束所允許的小位移(在我們的例子中表示杠杆的小的轉角)，則外力在这位移上做功之和为零。

許多經驗告訴我們，这个結論对于別的一系列的机构也对。下面我們需要把这个思想加以一般化和精确化，为此我們首先給出約束与可能位移的概念。

2. 約束和約束力

約束:是事先对系統的位置、速度所加的限制。

例如,火車被限制在鉄軌上运动,火車的軌迹是事先給定的(火車只能沿事先給定的軌道运动)。又如,枪彈在出枪口之前被限制在枪膛內运动。但是不能認为枪彈出了枪膛后被約束在拋物綫上运动。这是因为枪彈在膛外的軌迹是通过动力学关系与初条件得到的而并非事先給定的。

我們暂时只討論一些对位置限制的約束,而对速度的約束将在动力学中討論。

由 n 个質点組成的系統的位置以 $x_i, y_i, z_i, (i=1, 2, \cdots, n)$ 表示,則約束方程一般可以写为

$$f(x_1, y_1, z_1, \cdots, x_n, y_n, z_n)=0. \tag{7.1}$$

例如离心調速器的臂可以与軸成各种角度 φ,在机器运动过程中,φ 是时刻改变着的。然而从机器的特点容易看出杆端的小球被限制在球面上运动。如果小球的位置用 x、y、z 表示,則約束方程为

$$x^2+y^2+z^2=l^2.$$

从实际問題中可知,約束有单面的和双面的两种。

例如,数学摆用长 l 的柔繩把小球連于固定点,則質点(小球)便被限制在以定点为中心,l 为半徑的圓周上运动,但是質点向圓外运动受到限制,而向內运动則不受限制。其約束方程可以写为

$$x^2+y^2\leqslant l^2.$$

如果用剛性杆代替繩子,質点只能被限制在圓周上运动,約束方程可写为

$$x^2+y^2=l^2.$$

我們把前面用不等式表示的約束称为单面約束,而后面这种用等式表达的約束称为双面約束。

約束总是通过物体的相互作用来实現的，因此我們可以把約束作用用与之对应的力来代替，这力就称为約束力。例如螺旋起重机，螺紋之間的作用力就是約束力。同样支点对杠杆的反力也是約束力。

約束力的大小和方向取决于运动状态和其他作用力。例如火車载重越大，鉄軌的反力（卽約束力）也就越大。火車拐弯时，速度越大，則維持火車曲綫运动的向心力（卽約束力）就越大。

約束力以外的作用力称为主动力。

3. 可能位移，可能功

研究約束对物体的限制，我們引入可能位移的概念。

一組質点，受着約束的限制，必然只有某些方向的位移是約束所許可的，其余方向的位移則为約束所阻止。例如前面提过的单摆，若小球是用剛性杆联于固定点，則小球只能沿圓周运动。

所謂質点或剛体的可能位移，就是滿足約束条件的微小位移。可能位移与实位移不同，实位移是实际所发生的位移，而可能位移只能說明物体在約束条件下运动的可能性。例如約束在曲面上的質点，实位移是在外力作用下質点在曲面上軌迹的一段，可能位移則是質点沿曲面在各个方向所可能产生的微小移动。

前面說过，可能位移要滿足約束条件。下面用方程精确表达。设系統有 n 个質点，由 $x_i, y_i, z_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 确定系統的位置；系統又受有 l 个約束：

$$f_j(x_1, y_1, z_1, \cdots, x_n, y_n, z_n)=0, \ (j=1, 2, \cdots, l). \qquad (7.1)$$

若系統各質点有可能位移 $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \cdots, \delta x_n, \delta y_n, \delta z_n$，則質点的位置变到 $x_1+\delta x_1, y_1+\delta y_1, z_1+\delta z_1, \cdots, x_n+\delta x_n, y_n+\delta y_n, z_n+$ $+\delta z_n$。这时也必然滿足約束方程

$$f_j(x_1+\delta x_1, \cdots, z_n+\delta z_n)=0 \quad (j=1, 2, \cdots, l) \qquad (7.2)$$

从上面(7.2)式减去(7.1)式利用泰勒展开，并且注意到可能位移

是微小的，所以可以略去 $\delta x_1, \delta y_1, \cdots, \delta z_n$ 的高次項，就得到：

$$\Delta f_j=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial f_j}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial f_j}{\partial z_i}\delta z_i\right]=0 \qquad (7.3)$$

$$(j=1, 2, \cdots, l)$$

注意到 $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \cdots, \delta x_n, \delta y_n, \delta z_n$ 要滿足上式，因而不能全部任意，其中独立变数只有 $3n-l$ 个。

当給出系統的一組可能位移时，作用在系統上的力将因其作用点发生位移而作功，这功被称为可能功。

4. 可能位移原理

有了可能位移与可能功的概念，我們就可以来精确叙述可能位移原理如下：

可能位移原理：对于受双面，理想約束的系統，它平衡的充分和必要条件是所有主动力在任一組可能位移上所作的可能功之和为零。

所謂理想約束，就是在这种約束下，約束力所作的可能功之和为零。下面先来説明什么是理想約束，它是可能位移原理成立的条件。

本节的开始已經指出，在簡单机械中主动力作功之和为零的事实。但是并非所有情况皆如此，比如螺旋起重机，螺旋滑潤情况較好时需要的力就少，否则就費力很多。很自然就会考慮到約束力在可能位移上作功与否。在很多事实中发現对双面，光滑的約束来說，也就是对双面，无摩擦或摩擦十分小的約束来說，可能位移原理是成立的。

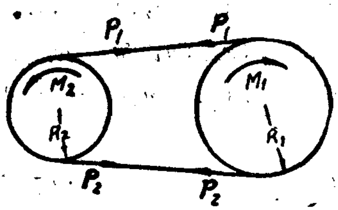

图　7.2

但是，这并沒有包括所有的情况。例如皮带輪傳动机构，（如图 7.2 所示）是依靠摩擦力及皮

带的張力来傳动的。虽然它不是光滑約束，但是約束力所作的可能功之和为零，故系統的約束仍为理想約束。

这只要注意到，系統平衡时，两輪匀速轉动，我們取逆时鉀方向为正，这时根据平衡条件皮带張力 P_1, P_2，发动力矩与有效阻力矩 M_1, M_2 間有

$$M_1-(P_1-P_2)R_1=0, \tag{A}$$
$$(P_1-P_2)R_2-M_2=0.$$

若給系統以可能位移，主动輪与从动輪分別轉过 $\delta\varphi_1, \delta\varphi_2$ 角，并注意皮带不可伸长，有 $R_1\delta\varphi_1=R_2\delta\varphi_2$，这便是約束所給可能位移的限制。分別把前面平衡方程乘以 $\delta\varphi_1, \delta\varphi_2$ 相加便得到：

$$M_1\delta\varphi_1-M_2\delta\varphi_2=0 \tag{B}$$

这里我們看到(B)与(A)同样給出平衡条件。

又如，車輪在地面上作无滑动的滚动，有滑动摩擦力，但約束力（即滑动摩擦力）所作的可能功为零，因此仍是理想約束。

我們仔細分析前面几个例子。在螺旋起重机中，产生矛盾是因为摩擦力作了功。在皮带傳动机构中，一方面輪对皮带及皮带对輪子的摩擦力大小相等、方向相反而可能位移一样（因为无滑动），因此約束力的可能功之和为零；另一方面，皮带張力分別对主动輪及从动輪来講作了可能功，但其和仍为零。而車輪在地上滚动这一例中，車輪与地面接触点是瞬心，其可能位移是高阶微量，因而約束力做的可能功也为零①。

① 由約束条件 $x=a\theta$（图 7.3），其中 a 为半徑，x 为輪心位移，θ 为輪的轉角，得到 $\delta x=a\delta\theta$. 对三角形 $AA'B$ 用余弦定理

$$(AA')^2=(\delta r)^2=(\delta x)^2+\left(2a\sin\frac{\delta\theta}{2}\right)^2-2\left(2a\sin\frac{\delta\theta}{2}\right)\times(\delta x)\cos\frac{\delta\theta}{2},$$

以 $\delta x=a\delta\theta$ 代入，就得到

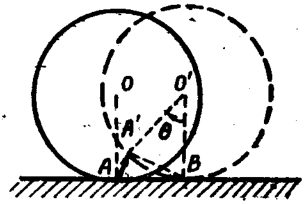

图 7.3

$\delta r\sim(\delta\theta)^2$ 故接触点可能位移是高級微量。

总之，若約束力所作的可能功之和为零，則系統的約束是理想約束。

順便指出，当剛体看为質点組时，各質点之間的距离应保持不变；这种約束也是理想約束。这是因为任何两質点間的約束力沿其联綫，大小相等、方向相反；而两点的可能位移沿两点联綫方向投影必相等。因而約束力所作可能功之和为零。

5. 現在我們来給可能位移原理以严格的証明。

必要性: 卽双面理想約束条件下，若系統平衡，則所有主动力可能功之和为零。

若系統平衡，設 $\boldsymbol{F}_i$ 与 $\boldsymbol{N}_i$ 分别表第 i 个質点上的主动力和約束力，則

$$\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{N}_i=0 \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

对每一質点給一任意可能位移 $\delta\boldsymbol{r}_i$，則每一質点得到可能功为

$$(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{N}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

对 i 求和有

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{N}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{N}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0.$$

由于約束是理想約束，所以 $\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{N}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$，

因而

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0.$$

充分性: 卽在双面理想約束条件下，若系統的一切力之可能功之和为零，則系統平衡。

設对任意可能位移，都有主动力作的可能功之和为零。如果系統不平衡，則系統由靜到动；經 Δt 时間后，动能由零变为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_iv_i^2>0.$$

根据动能定理，动能的获得是因为有力作了功，功的大小就等于系統获得的动能。即对于眞实位移

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{N}_i)\cdot d\boldsymbol{r}_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_iv_i^2>0.$$

显然，实位移 $d\boldsymbol{r}_i$ 也必然满足該时刻的約束条件，当然是可能位移的一个。因此相应这一組可能位移，

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{N}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i>0.$$

由于是理想約束，所以$\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{N}_i\delta\boldsymbol{r}_i=0$，

这便得到

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i>0.$$

它与主动力在任何可能位移上都不做功的假設相矛盾。定理得証。

从另一角度来看，如果給系統以任意方式的可能位移都得不到动能的話，那末系統在任何方向都沒有动起来的可能，即系統处于平衡。

現在可能位移原理已經完全精确地叙述并証明了。在可能位移原理中，我們的目的是处理系統的平衡問題，但是并不是孤立地静止地研究平衡这一特定狀态，而是改变这一狀态（給出可能位移），从变革中認識平衡时的規律。这一观点在認識事物本質时是十分重要的。

§7.2　自由度及广义坐标

1. 对于一个由 n 个質点所构成的系統，在直角坐标中要用 $3n$ 个坐标来描述它的空間位置，即 $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \cdots\cdots; x_n, y_n, z_n$。由于系統受到一些約束的限制，这 $3n$ 个坐标一般并不是完全独立的，它們之間还要滿足某些依賴关系，也就是約束方程。

如果系統具有 l 个几何約束，这 l 个約束方程为

$$f_j(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \cdots\cdots x_n, y_n, z_n)=0 \quad j=1,2,\cdots\cdots l, \tag{7.1}$$

则質点組的 $3n$ 个坐标中就有 l 个可以表为其余 $3n-l$ 个变数的函数，所以系統的独立坐标的数目便只有 $3n-l$ 了。

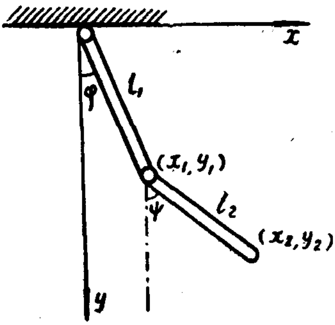

图 7.4

完全确定地描述系統位置的独立坐标的数目称为系統的自由度。

例如，空間自由質点的位置用 x, y, z 表示，它們之間完全是独立的，所以自由度是 3。如果質点是約束在平面上运动，则 x, y, z 之間还要滿足一个約束方程，所以这时自由度为 2。在图 7.4 中的双摆作平面运动时，需要用 x_1, y_1, x_2, y_2 4 个变数来描述系統在直角坐标中的位置。但系統又滿足两个約束方程

$$x_1^2+y_1^2=l_1^2,$$

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=l_2^2,$$

所以系統的自由度为 $4-2=2$。

为了描述系統的位置，所选定的完全独立的变数称为描述系統位置的广义坐标。

显然，广义坐标并不一定取为直角坐标的分量，也可以用其他

变数作为广义坐标。通常采用的除了直角坐标分量外，还有弧长 s，角度 φ 等。再以上面双摆为例，系統的自由度为 2，描述系統位置的广义坐标可以取为 x_1, x_2，或 y_1, y_2，为了更簡单方便，常取为 φ 与 ψ。不管怎样选取，广义坐标都是独立变化的，而且一經确定后，系統的位置就相应地完全被确定了。由此可見，对同一問題广义坐标的取法并不是唯一的。

在只考虑系統满足几何約束的情况下，系統位置可以完全由独立的变数(广义坐标)来描述，因此广义坐标与自由度二者数目是相等的。

2. 广义坐标下的可能位移原理

下面我們将根据坐标变換导出在广义坐标下的可能位移原理。

对于有 n 个質点的系統若能用 s 个独立的广义坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_s$ 来描述其位置，

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \cdots q_s),\quad y_i = y_i(q_1, q_2, \cdots q_s),$$

$$z_i = z_i(q_1, q_2 \cdots q_s), \tag{7.4}$$

则它們的微小位移間滿足关系

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j,\quad \delta y_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial y_i}{\partial q_j}\delta q_j,$$

$$\delta z_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial z_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

将 $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ 代入

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \delta \boldsymbol{r}_i = 0,$$

便可得到

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{F_{ix}\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j + F_{iy}\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\delta q_j + F_{iz}\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\delta q_j\right\} = 0,$$