现代应用数学丛书

线性规划

〔日〕森口繁一　宫下藤太郎著

上海科学技术出版社

现代应用数学丛书

綫性规划

〔日〕森口繁一
宫下藤太郎 著

刘源張 譯
許国志 校

上海科学技术出版社

內容提要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本。以經济問題为例，介紹了有关綫性規划的理論和应用。全书分三章：第1章介紹单純形法的原理；第2章进一步討論修訂单純形法及对偶問題等；第3章着重介紹綫性規划的应用。

本书可供大学数学系、財經方面有关专业师生以及經济工作中的有关人員参考。

現代应用数学丛书

綫性規划

原书名　綫型計画法

原著者　〔日〕森口繁一　宮下藤太郎

原出版者　岩波书店

譯者　刘源張

校者　許国志

*

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

上海市书刊出版业营业許可証出093号

新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售

商务印书館上海厂印刷

*

开本 850×1168 1/32　印張 2 16/32　字数 57,000

1963年4月第1版　1963年4月第1次印刷

印数 1—9,000

統一书号：13119·502

定价：（十四）0.46元

出版説明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"現代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注释和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

现代应用数学丛书

书名	原作者	譯者
代数学*	弥永昌吉等	熊全淹
几何学*	矢野健太郎	孙澤瀛
复变函数	功力金二郎	刘书琴
集合·拓扑·测度*	河田敬义	赖英华
泛函分析*	吉田耕作	程其襄
广义函数*	岩村联	楊永芳
常微分方程*	福原满洲雄	張庆芳
偏微分方程*	南云道夫	錢端壮
特殊函数*	小谷正雄等	錢端壮
差分方程*	福田武雄	穆鴻基
富里哀变换与拉普拉斯变换*	河田龙夫	錢端壮
变分法及其应用*	加藤敏夫	周怀生
李群論*	岩堀长庆	孙澤瀛
随机过程*	伊藤清	刘璋温
回轉群与对称群的应用*	山内恭彥等	張质賢
結晶統計与代数*	伏見康治	孙澤瀛
偏微分方程的应用	犬井鉄郎等	楊永芳
微分方程的近似解法	加藤敏夫等	王占瀛
数值計算法	森口繁一等	閻昌齡
量子力学中的数学方法*	朝永振一郎	周民强
工程力学系統*	近藤一夫等	刘亦珩
非綫性振动論*	古屋茂	吕紹明
力学系与映射理論*	岩田义一	孙澤瀛
平面彈性論*	森口繁一	刘亦珩
有限变位彈性論*变形几何学	山本善之 近藤一夫	刘亦珩
塑性論*	鷲津文一郎	刘亦珩
粘性流体理論*	谷一郎	刘亦珩
可压縮流体理論*	河村龙馬	刘亦珩
网絡理論	喜安善市等	賈弃腎
自动控制理論*	喜安善市等	程立林
回路拓扑学	近藤一夫	張鳴鏞
信息論*	喜安善市等	李文清
推断統計理論	北川敏男	李賢平
統計分析*	森口繁一	刘璋温
試驗設計法	增山元三郎	刘璋温
群体遺傳学的数学理論*	木村資生	刘祖洞
博奕論	官澤光一	張毓春
綫性規划	森口繁一	刘源張
經济理論中的数学方法	安井琢磨等	談祥柏
随机过程的应用*	河田龙夫	刘璋温
計算技术	高桥秀俊	姚晋
穿孔卡計算机	森口繁一	刘源張

注：有 * 者已在1962年出版。

目　　录

第1章 单純形法

§1 綫性規划問題与图解法

綫性規划(Linear Programming＝LP)的典型問題可以写为下列的形式:

标准型綫性規划問題 在約束条件

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant s_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant s_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant s_m \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

与

$$x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0,\quad \cdots,\quad x_n\geqslant 0 \tag{1.2}$$

下,决定使

$$f(x_1, \cdots, x_n)=v_1x_1+v_2x_2+\cdots+v_nx_n \tag{1.3}$$

为最大的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

这里 (1.1) 中的系数 a_{ij} $(i=1, \cdots, m;\ j=1, \cdots, n)$,右边的 $s_i(i=1, \cdots, m)$ 与(1.3)中的系数 v_j $(j=1, \cdots, n)$ 都是給定的常数,并且 a_{ij}, v_j 可以是任意的实数,但 s_i 必須是正的。

例1[1] 某一企业要制造两种产品 A, B. 制造1公斤的产品 A 需要煤炭9吨,电力4瓩小时,劳动量3人日。制造1公斤的产品 B 需要煤炭4吨,电力5瓩小时,劳动量10人日。但是这个企业能够使用的只有煤炭360吨,电力200瓩小时,劳动量300人日,超过这些就不能用。产品 A 每1公斤有7万元的利潤,产品 B 每1公斤有12万元的利潤。在上述对于煤炭、电力、劳力的限制下,希

---

[1] 这是資本主义制度下的情况。在社会主义制度下,首先应該根据国家計划来考虑生产的品种及其产量。后面也有类似情况。——譯者注

望在使利潤最大的情况下决定产品 A 与产品 B 的产量。

問題中所給的数值可以整理成表 1.1.

表1.1 数　据

資源 \ 活动	产品 A 的生产（公斤）	产品 B 的生产（公斤）	各种資源的利用限度
煤炭(吨)	9	4	360
电力(瓩小时)	4	5	200
劳动量(人日)	3	10	300
利潤(万元)	7	12	—

产品 A, B 的产量分別設为 x_1 公斤，x_2 公斤，则約束条件可表示为

$$\left.\begin{aligned} 9x_1+\ 4x_2 &\leqslant 360, \\ 4x_1+\ 5x_2 &\leqslant 200, \\ 3x_1+10x_2 &\leqslant 300 \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

与
$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0; \tag{1.5}$$

利潤的式子成为

$$f(x_1, x_2) = 7x_1 + 12x_2. \tag{1.6}$$

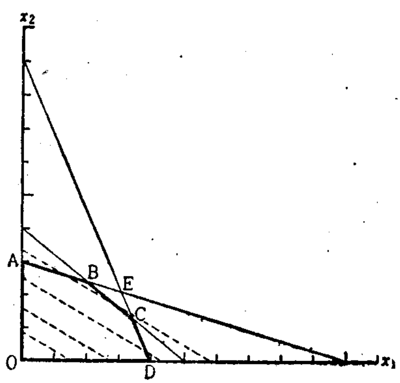

图1.1 图 解 法

因此，这个問題就是上面所述形式的問題。

［注］ 一般以号碼 i 与資源，号碼 j 与活动相对应。a_{ij} 可以解釋为技术系数，s_i 为資源的利用限度，v_j 为价值系数。函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 称为目标函数。

現在，如例 1 这样簡单的問題可以用图解法方便地处理(图 1.1)。

在(x_1, x_2)平面上，条件(1.4)的各式，指定点(x_1, x_2)各属于由某些直綫为界的半平面內。条件(1.5)要求点(x_1, x_2)应在第一象限內。满足全部这些条件的点的集合是5边形 $OABCD$ 的周边上和內部的全体点的集合。另一方面，以C为参数的曲綫群$f(x_1, x_2)=C$是平行直綫群，C愈大直綫愈在右上方(图1.1的虚綫)。只須在属于这个直綫群，并且与5边形$OABCD$至少共有1点的諸直綫內定出C的值是最大的那一条。在方格紙上作图一看就容易知道它是通过B点的直綫(对应的C是428)。B点是直綫$4x_1+5x_2=200$与$3x_1+10x_2=300$的交点，可知$x_1=20$, $x_2=24$. 所以，这个問題的最优解定为产品A的产量$x_1=20$公斤，产品B的产量$x_2=24$公斤，这时所得的利潤是$f(20, 24)=428$万元。

一般說，在n維空間的点$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$中，满足条件(1.1)与(1.2)的点的全体，組成一个由$m+n$个超平面(其中，后面的n个是坐标超平面)为界的$m+n$个半空間的共同部分所决定的凸集S. (連結那样两点的綫段上的任意一点，满足所有的条件，因而属于这个集合，由此可知是凸集。)另一方面，$f(x_1, \cdots, x_n)=C$的曲綫群是平行超平面群。問題就是在属于这个群，而又与上述的凸集至少共有1点的諸超平面內，决定C值是最大的那一个(以及它与S的共同点)。

实际上，能够利用这样的作图，几何地求最优解的，只限于例1那样$n=2$的情况。当$n\geqslant 3$时就必須通过計算来求最优解。即使如此，象上面的解釋在对問題的性质和解法的考察上也是有效的。

另外，在这里引进新的变数，而把問題改写一下。

例2 在例1中，設煤炭、电力、劳力的使用剩余各为λ_1吨，λ_2瓩小时，λ_3人日，則

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1&=360-9x_1-4x_2,\\ \lambda_2&=200-4x_1-5x_2,\\ \lambda_3&=300-3x_1-10x_2.\end{aligned}\right\}\tag{1.7}$$

这些都不允許是負的，卽必然是

$$\lambda_1 \geqslant 0, \quad \lambda_2 \geqslant 0, \quad \lambda_3 \geqslant 0. \tag{1.8}$$

这样就把不等式(1.4)改写成等式(1.7)和簡单形式的不等式(1.8)。

若在(1.7)中把含有未知数的各項移至左边,并且因为(1.8)与(1.5)是同样形式,故把它們放在一起,則例1就可改为下面的形式:

在約束条件

$$\left.\begin{array}{l} 9x_1+\ \ 4x_2+\lambda_1=360, \\ 4x_1+\ \ 5x_2+\lambda_2=200, \\ 3x_1+10x_2+\lambda_3=300 \end{array}\right\} \tag{1.9}$$

与

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad \lambda_1 \geqslant 0, \quad \lambda_2 \geqslant 0, \quad \lambda_3 \geqslant 0 \tag{1.10}$$

下,决定使

$$f(x_1, x_2) = 7x_1 + 12x_2 \tag{1.11}$$

为最大的 $x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

松弛变数(slack variables) $\lambda_i\ (i=1, \cdots, m)$ 一般定义为

$$\lambda_i = s_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n \quad (i=1, \cdots, m), \tag{1.12}$$

則本节开始所举的問題可改为:在約束条件

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n + \lambda_i = s_i \quad (i=1, \cdots, m) \tag{1.13}$$

与

$$x_j \geqslant 0 \quad (j=1, \cdots, n), \quad \lambda_i \geqslant 0 \quad (i=1, \cdots, m) \tag{1.14}$$

下,决定使

$$f(x_1, \cdots, x_n) = v_1x_1 + \cdots + v_nx_n \tag{1.15}$$

为最大的 $x_1, \cdots, x_n, \lambda_1, \cdots, \lambda_m$.

§2　代数解法

将尽量用普通代数的想法来説明用单純形法解前节例2的过程(更初等的解說見文献[10])。

第1段　首先考虑图1.1中对应原点 O 的规划，即 $x_1=x_2=0$ 的规划。这时，$\lambda_1=360$, $\lambda_2=200$, $\lambda_3=300$. 就是說，产品 A 和产品 B 全不生产，因此所有的資源全部剩下。利潤是 $f(0, 0)=0$.

这个规划不用說是可以改善的。从 (1.11) 可以看出，使 x_1 取正数或使 x_2 取正数都增加利潤 f. 若只取其中之一，則因为 x_2 的系数較大，我們就取 x_2. 即使 x_1 仍然为 0，考慮使 x_2 取正数的修正。

作这样的修正时，不能随便使 x_2 增大。在 (1.7) 中使 $x_1=0$，逐漸增大 x_2，則 λ_1, λ_2, λ_3 都逐漸变小。到 $x_2=300/10=30$ 时，λ_3 就变成 0 (λ_1, λ_2 还是正的)。x_2 不允許比这再大。因此，作为修正案，得到

$$x_1=0,\quad x_2=30,$$
$$\lambda_1=360-4\times30=240,\quad \lambda_2=200-5\times30=50,\quad \lambda_3=0 \tag{2.1}$$

的规划(图 1.1 的 A 点)。与此相对应的利潤是

$$f(0,\ 30)=12\times30=360. \tag{2.2}$$

第2段 为了考査(2.1)是否还能改善，从方程(1.9)导出与此等价的下列方程式：

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1+7.8x_1-0.4\lambda_3&=240,\\ \lambda_2+2.5x_1-0.5\lambda_3&=\ 50,\\ x_2+0.3x_1+0.1\lambda_3&=\ 30.\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

这只須先以 10 除(1.9)的第 3 式，得(2.3)的第 3 式，再从(1.9)的第 1 式与第 2 式中各减去它的 4 倍与 5 倍。再将 (2.3) 的第 3 式的 12 倍加到 (1.11) 的两边，移項整理得

$$f=360+3.4x_1-1.2\lambda_3 \tag{2.4}$$

在前段得到的无非是在(2.3)，(2.4)中使 $x_1=\lambda_3=0$ 的规划。若要对此修正，就是将 x_1 或 λ_3 向正的方向移动。但是根据(2.4)知道，移动 λ_3 反倒不上算。使 x_1 为正的修正是上算的。这样，可以使 x_1 增加到什么地方呢？这只要在(2.3)中使 $\lambda_3=0$，看使 x_1 逐漸增大时变成什么样子就行。这时，λ_1, λ_2, x_2 都逐漸减小，到 $x_1=50/2.5=20$ 时，λ_2 最后成为 0. 其它的两个成为 $\lambda_1=240-7.8\times20=84$, $x_2=30-0.3\times20=24$. 利潤成为

$$f=360+3.4\times20=428. \tag{2.5}$$

这样就得到新的规划(图 1.1 的 B 点)

$$x_1=20,\quad x_2=24,\quad \lambda_1=84,\quad \lambda_2=\lambda_3=0. \tag{2.6}$$

第3段 为了考査规划(2.6)是否还能改善，从方程(2.3)导出与此等价的下列方程：

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1-3.12\lambda_2+1.16\lambda_3&=84,\\ x_1+0.40\lambda_2-0.20\lambda_3&=20,\\ x_2-0.12\lambda_2+0.16\lambda_3&=24.\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

这只須先以 2.5 除(2.3)的第2式,得出(2.7)的第2式,再从(2.3)的第1式和第3式各减去它的 7.8 倍。再将(2.7)的第2式的 3.4 倍加到(2.4)的两边,移項整理得

$$f=428-1.36\lambda_2-0.52\lambda_3. \tag{2.8}$$

規划(2.6)和与此相对应的利潤(2.5)无非是在(2.7)和(2.8)中使 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 的規划和利潤。若要对此修正,就应使 λ_2 或 λ_3 成正的,但从(2.8)知道任何一方都不利(使 λ_2 和 λ_3 都成正的修正当然不利)。

这样就証实了規划(2.6)(图 1.1 的 B 点)是最优。

在上面的解法里,从方程(1.9)导出(2.3),再計算出(2.7),以及从(1.11)得(2.4),再求(2.8)的計算,利用表 2.1 来进行是很方便的。

表2.1 单純形表

段											
			$j\to$	0	1	2	3	4	5		
			$v_j\to$	0	7	12	0	0	0		
	i	v_i	变数	s	x_1	x_2	λ_1	λ_2	λ_3	計	θ_i
1	3	0	λ_1	360	9	4	1	0	0	374	360/4=90
	4	0	λ_2	200	4	5	0	1	0	210	200/5=40
	5	0	λ_3	300	3	10	0	0	1	314	300/10=30 →
			z_j-v_j	0	−7	−12	0	0	0	−19	
2	3	0	λ_1	240	7.8	0	1	0	−0.4	248.4	240/7.8=30.8
	4	0	λ_2	50	2.5	0	0	1	−0.5	53.0	50/2.5=20 →
	2	12	x_2	30	0.3	1	0	0	0.1	31.4	30/0.3=100
			z_j-v_j	360	−3.4	0	0	0	1.2	357.8	
3	3	0	λ_1	84	0	0	1	−3.12	1.16	83.04	
	1	7	x_1	20	1	0	0	0.40	−0.20	21.20	
	2	12	x_2	24	0	1	0	−0.12	0.16	25.04	
			z_j-v_j	428	0	0	0	1.36	0.52	429.88	◎

在表 2.1 里,上边有 v_j,左边有 v_i 栏,还在右边有計和 θ_i 栏,此外有 z_j-v_j 的注記 ◎ 的記号等。这些意思将在下节的說明中

搞清楚。

表 2.1 本体部分的計算是綫性計算(各行作为一个向量处理的計算)的一种，称为迭代法(参照本丛书，森口、高田：数值計算法❶ I, §1)。它的"樞軸件"是在表 2.1 里以用虛綫包括的行和列的交点指示出来。

§3 单純形法的原理

現在将前节所述的代数解法的要点概括成一般的形式。

作为准备，为了形式的整理，将原来的变数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和松弛变数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 一概用下列同类的記号

$$\left.\begin{array}{ll} y_1=x_1, \cdots, & y_n=x_n, \\ y_{n+1}=\lambda_1, \cdots, & y_{n+m}=\lambda_m \end{array}\right\} \tag{3.1}$$

表示。并且与此相随，将新的价值系数 $v_{n+1}, \cdots, v_{n+m}$ 都定为 0. 这样，(1.13)，(1.14)，(1.15) 各成为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j + y_{n+i} = s_i \quad (i=1, \cdots, m), \tag{3.2}$$

$$y_j \geqslant 0 \quad (j=1, \cdots, n+m), \tag{3.3}$$

$$f = \sum_{j=1}^{n+m} v_j y_j. \tag{3.4}$$

从而可以說，問題是：在条件 (3.2)，(3.3) 下使 (3.4) 最大。

例 1 对于上面的例子，就是

$$y_1=x_1, \quad y_2=x_2, \quad y_3=\lambda_1, \quad y_4=\lambda_2, \quad y_5=\lambda_3, \tag{3.5}$$

$$v_1=7, \quad v_2=12, \quad v_3=0, \quad v_4=0, \quad v_5=0, \tag{3.6}$$

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 5 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

单純形法是从 (3.2) 出发，依次进行"迭代"的計算。这样得到

❶ 即本丛书中，闞昌齡譯《数值計算法》。——譯者注

的(与原来等价的)方程一般可写作如下的形式:

$$y_i+\sum_{k\in K} b_{ik}y_k=b_{i0} \quad (i\in B), \tag{3.8}$$

此处 B 和 K 都是号碼的集合。B 含有 m 个, K 含有 n 个,彼此沒有共同的号碼,双方相加恰是 $\{1, 2, \cdots, n+m\}$, 即

$$B+K=\{1, 2, \cdots, n+m\}. \tag{3.9}$$

例2 参照記号(3.5);在(2.3)就是

$$B=\{3, 4, 2\}, \quad K=\{1, 5\},$$

在(2.7)就是

$$B=\{3, 1, 2\}, \quad K=\{4, 5\}.$$

[注] (3.8)可以說是对(3.2)中具有属于 B 的号碼的变数 $y_i(i\in B)$ 求解所得的。就是說 (3.8) 是将特定的 m 个变数 $y_i(i\in B)$ 以其余的 n 个变数 $y_k(k\in K)$ 表示的式子。

除(3.8)中所含 b_{i0}, b_{ik} 之外, 当 $i=j$ 时将 $b_{ij}(i, j\in B)$ 定为1, 当 $i\neq j$ 时定为0, 則(3.8)也可写为

$$\sum_{j=1}^{n+m} b_{ij}y_j=b_{i0} \quad (i\in B). \tag{3.10}$$

(3.10) 的系数的行列記入在单純形表的本体部分里。(属于 B 的号碼的列是单位向量, 唯一不是0的分量1可在具有对应的号碼的变数的行里找到。)

[注] m 个变数 $y_i(i\in B)$ 称为表中的"基底变数 (basic variables)"。

将前节的計算程序作成一般的框图(flow chart), 如图3.1.

現在,一般地稍微詳細考查一下这个程序的各个步驟。

从考查一个給出的表所表示的規划开始。(作为具体的例子, 請参照表2.1的第2段或第3段。)就图3.1, 从②开始說起。

一般說,一个表是如上面說过的表示 (3.8) 那样的一組方程, 这里特别使 $y_k=0(k\in K)$, 則得 $y_i=b_{i0}(i\in B)$. 若

$$b_{i0}\geqslant 0 \quad (i\in B), \tag{3.11}$$

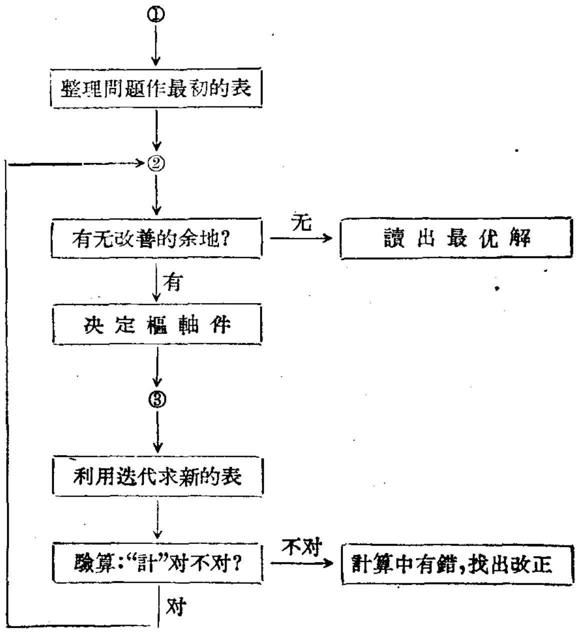

图3.1 单純形計算的一般程序

这便是确实可以容許的——可能实行的(feasible)——規划。为了簡单起見,条件(3.11)成立的表称为 **S 型**(取 simplex 的头一个字母)。S 型的表表示一个可行解

$$y_i=b_{i0} \quad (i\in B), \quad y_k=0 \quad (k\in K), \tag{3.12}$$

这就称为那个表的“基底解(basic solution)”。

为了考查基底解(3.12)是否有改善的余地,必須求得将利潤表示为 $y_k(k\in K)$ 的函数的式子。这只須在(3.4)右边的 y_j 当中,对基底变数 $y_i(i\in B)$ 代入从(3.8)求得的式子,对其他的变数 $y_k(k\in B)$ 仍然不动,加以整理就行。这样就成为

$$\begin{aligned} f&=\sum_{i\in B} v_i\Big(b_{i0}-\sum_{k\in K} b_{ik}y_k\Big)+\sum_{k\in K} v_k y_k \\ &=\sum_{i\in B} v_i b_{i0}-\sum_{k\in K}\Big(\sum_{i\in B} v_i b_{ik}-v_k\Big)y_k. \end{aligned} \tag{3.13}$$

一般定义

$$z_j=\sum_{i\in B}v_ib_{ij}\quad(j=0,1,\cdots,m+n),\tag{3.14}$$

则(3.13)可写为

$$f=z_0-\sum_{k\in K}(z_k-v_k)y_k.\tag{3.15}$$

对于基底解(3.12)的利潤等于z_0。[因为对于i，$j\in B$的b_{ij}只在$i=j$时是1，其他时是0，所以$z_j=v_j(j\in B)$。因此，$j\in B$时的z_j-v_j一定是0。若再定义$v_0=0$，则z_0-v_0与z_0相同。]

在基底解(3.12)中，所有的$y_k(k\in K)$都作为0。对于它的修正案是以使$y_k(k\in K)$当中一个以上成为正的形式出現。至于它是否有利，决定于(3.15)中的系数(z_k-v_k)的符号。若

$$z_k-v_k\geqslant 0\quad(\text{对所有的 }k\in K),\tag{3.16}$$

则利潤不会超过z_0（根据(3.3)，y_k决不会是負的）。就是說基底解(3.12)是最优。

[注]　若对所有的$k\in K$，$z_k-v_k>0$，最优规划只有(3.12)。这是因为在其他的规划中，$y_k(k\in K)$当中有一个以上是正的，利潤就一定比z_0小的原故。

若(3.16)成立，对某一$k\in K$，$z_k-v_k=0$，进行使对应的y_k成为正的修正，利潤也不会发生变化。在这种情况，也存在(3.12)以外的最优解。

假若判别条件(3.16)不成立，即对某一个$k\in K$，$z_k-v_k<0$，则进行使对应的y_k成为正的修正，利潤将較z_0为大。就是說规划(3.11)还有改善的余地。对于这时的改善方法再来加以詳細的考查。

記使$z_k-v_k<0$这样的一个k为k^*。[当有許多这样的k的时候，使其中的任何一个为k^*，都能得到改善。普通将其中使$|z_k-v_k|$最大的——負得最多的(most negative)——記为k^*。]若对于k^*以外的$k\in K$，仍使$y_k=0$而只使y_{k^*}成为正的(其值写作θ)，则修正案从(3.8)成为

$$\left.\begin{array}{l} y_i = b_{i0} - b_{ik^*}\theta \quad (i \in B), \\ y_{k^*} = \theta, \\ y_k = 0 \quad (k \neq k^*,\ k \in K). \end{array}\right\} \tag{3.17}$$

而且，对于它，目标函数是

$$f = z_0 - (z_{k^*} - v_{k^*})\theta. \tag{3.18}$$

因为在(3.18)中，$z_{k^*} - v_{k^*} < 0$，所以θ愈大则f愈大，从这一点說最好尽量使θ取大值。但是，一般θ不能随便增大。因为若增大了θ而使(3.17)变成不能容許的就不行了。就是說，在(3.17)满足条件(3.3)的范圍內可以使θ增大。(3.17)第一式最初的m个可能为負。不过，其中$b_{ik^*} \leqslant 0$的不会成負的（θ增大，y_i也不会减小，所以不用担心它成为負的）。因此，只有对$i \in B$，$b_{ik^*} > 0$的才要担心。在θ等于

$$\theta_i \equiv b_{i0}/b_{ik^*} \tag{3.19}$$

的时候，那个y_i成为0。θ超过θ_i，則y_i成为負的，(3.17)成为不能容許的規划。因此，θ一定要小于θ_i。对于$b_{ik^*} > 0$的所有的$i \in B$，若$\theta \leqslant \theta_i$，則(3.17)給出可以容許的規划。在这样的限制下，若要尽量使θ取大值，可以取等于諸θ_i中的最小值，

$$\theta = \min\{b_{i0}/b_{ik^*}:\ i \in B,\ b_{ik^*} > 0\}. \tag{3.20}$$

例 3 表 2.1 的第 2 段中，只是对于$k=1$（y_1即x_1的列），$z_k - v_k < 0$。这样，使$k^* = 1$（这一列在表 2.1 中，夹在虛綫里面）。这时，$B = \{3, 4, 2\}$，因为b_{ik^*}都是正的，計算得

$$\left.\begin{array}{l} \theta_3 = b_{30}/b_{31} = 240/7.8 = 30.8, \\ \theta_4 = b_{40}/b_{41} = \ \ 50/2.5 = 20, \\ \theta_2 = b_{20}/b_{21} = \ \ 30/0.3 = 100. \end{array}\right\}$$

取其最小值$\theta_4 = 20$（在表 2.1 中，这个計算記在右方的边上。y_1（即x_1）在修正案中使为 20）。

［注］ 若在$i \in B$当中，沒有$b_{ik^*} > 0$的i，即对所有的$i \in B$都有$b_{ik^*} \leqslant 0$，則θ可为任意大，随之f可任意增大。这时解是“无限大”。