向量空间简明教程

陈继承
黎罗罗
编著

中 山 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书主要讨论有限维向量空间的基础理论，在叙述上注意了代数与几何的结合。与同类教材相比，本书在内容处理上有一定特色。本书可作为大专院校理工科线性代数课程的教材、自学青年及有关科技工作者的参考书。

向量空间简明教程

陈继承　黎文罗　编著

中山大学出版社出版发行

广东省新华书店经销

山西新华印刷厂印刷

•

787×1092毫米　32开本　13.125印张　29.5万字

1989年5月第1版　1989年5月第1次印刷

印数：1—1600册

ISBN7-306-00166-3

O·14　定价：2.35 元

前　言

本书是根据两位编者多年来在中山大学讲授高等代数课程的讲义编成的。

由于代数与几何关系密切，本书在引入代数概念和方法时，尽可能突出它们的几何背景。这一原则在本书的许多章节中都有所反映。例如，在第一章中引入了寻常空间及其中的向量，以此作为一般向量空间的感性认识基础；在第二章中专门介绍了三元线性方程组的几何意义；在矩阵的若当标准形一章中，强调了若当块的直和与广义特征子空间的直和的对应与联系，强调了若当基底是由矩阵的特征向量和广义特征向量构成这一事实；在全书中常常用寻常空间的例子来说明一般的向量空间及其上的线性变换。我们希望，代数概念与几何直观的结合能成为本书的一个特色。

鉴于多项式理论与代数结构概念已构成理工科许多专业数学教材的必要内容，同时这些内容与向量空间的理论亦有一定的联系，故本书对它们也都作了介绍。

本书在每一章之后都附有一定数量的练习，它们大致反映了各章的基本要求。在全书之末，我们选编了一批选作题。这批选作题一般来说综合性较强，难度较大，技巧要求较高，其顺序也不一定与书中正文的顺序一致。选编这批选作题的目的在于让一部份读者有机会得到更扎实的基本功训练，引起他们进一步钻研的兴趣。

讲授本书的主要内容大致需要216个学时，其中包括72

个学时的习题课。本书有一部份内容用小字排印。如果学时不够充裕，这部份内容可以略去。

本书适用于理科大部份专业及工科中对数学要求较高的专业，也可以作为科技人员的参考书。

由于编者水平有限，书中不妥之处，敬请读者批评指正。

本教材初稿得到李岳生教授、陈铭俊教授的关心。李岳生教授就代数与几何尽可能有机结合提供了指导性建议。在成书过程中，黄友谦教授、吴相辉副教授曾多次提出宝贵意见。我们在此一并表示衷心感谢。

编者

1988年8月

目　　录

第一章　寻常空间中的向量

本章叙述寻常空间中的向量及向量的线性运算，通过建立空间坐标系用坐标刻划向量，进而讨论了空间直线与平面的方程。本章还扼要叙述了空间向量（或点）的坐标变换以及空间的仿射变换。这些内容为今后进一步学习向量空间及线性变换提供了直观的几何背景。

§1　向　量

在中学物理课程中，我们已经知道，有些物理量，例如距离、质量、温度等，称为数量（或标量），在取定单位后，它们可以用实数来表示。有些物理量，例如位移、力、速度、加速度等，称为向量。向量的共同特征是：它们不仅要由其数值上的大小，同时还要由其指向才能确定。

向量的这两个特征的几何直观表示是空间中的一根矢，即空间中具有一定长度（用以表示向量数值上的大小）和一定指向（用以表示向量的指向）的有向线段。这里以及本章的后文中，我们都假定空间中已确定了某个长度单位。

从数学研究的角度看，有向线段也是一种向量。本章只讨论有向线段这种向量。

若 A、B 分别是有向线段的始点与终点，则该向量记为 $\overrightarrow{AB}$，它的指向（正向）是由始点 A 指向终点 B，线段 AB 的长度（一个实数）叫做向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模，记为 $|\overrightarrow{AB}|$。

我们规定两个向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$，当且仅当它们满足下述条件：

（1） 模相等，即

$$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}| \tag{1.1}$$

（2） $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 平行，即它们在同一根直线上或在互相平行的直线上；

（3） 两个向量指向相同时，称向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 相等（见图1.1），记为

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \tag{1.2}$$

这样规定其相等的向量称为自由向量。自由向量的概念恰恰反映了前面所说的向量的两个共同特征。

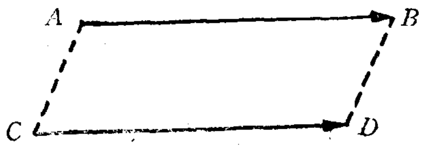

图 1.1

根据这种规定，一个向量经平行移动（平移）后，仍为与原来向量相等的向量。为了便于研究，可将所讨论的向量适当平移，使得平移后的向量以某个点，例如P，作为始点，这叫做将向量的始点移至P。

我们必须时常记住，两个向量的模相等不足以断言两个向量相等。向量等式（1.2）包含着比（1.1）更多的内容。

自由向量也可用一个粗体小写字母表示。例如 **a**、**b**、**c** 等，它们的模则以$|\mathbf{a}|$、$|\mathbf{b}|$、$|\mathbf{c}|$等记之。细体小写字母我们用来表示数。本章中出现的数都是实数。

始点与终点重合的向量称为零向量，用 **0** 表示。零向量的模等于 0，零向量没有确定的指向。我们约定，凡零向量都相等。

对向量可规定加法如下：设已给向量 a、b，以任一点O为始点，作$\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$，$\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$，再以$OA$，$OB$为边作平行四边形$OACB$，则$\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$（对角线向量），就是 a 与 b 之和，记作$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$，见图 1.2 。由 a、b 求$\mathbf{a}+\mathbf{b}$的运算叫做向量加法。上述加法法则称为平行四边形法则。

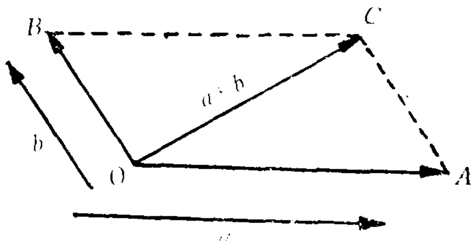

图 1.2

物理学中求作用在一个质点上两个分力的合力时，已经看见过这种加法法则。

向量加法也可按折线法则进行。折线法则要求在$\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$的终点引出第二个向量$\mathbf{b}=\overrightarrow{AC}$，封闭这根折线的向量$\overrightarrow{OC}$就是 a 与 b 的和，见图1.3。

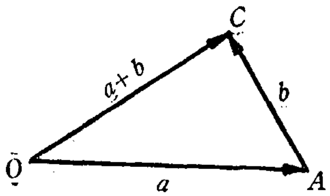

图 1.3

若a与b在同一直线上，或位于互相平行的直线上，则称 a 与 b是共线的向量。零向量0被认为是与任一向量 a 共线。

若a与b共线，模相等但指向相反，那末由向量求和的平行四边形法则或折线法则知道$\mathbf{a}+\mathbf{b}$是模等于0的向量，即零向量。

当且仅当$\mathbf{a}+\mathbf{b}=0$时，称b是a的负向量，记作$\mathbf{b}=-\mathbf{a}$。一般地成立：$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$。零向量的负向量是零向量。

命题1.1 向量加法满足如下规则

(V_1) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$ （交换律）

(V_2)　　$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$　　　（结合律）

(V_3)　　存在一个向量$\mathbf{0}$，使得对任意向量$\mathbf{a}$皆成立

$$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$$

(V_4^{*})　　对每一个向量$\mathbf{a}$，都存在向量$\mathbf{b}=-\mathbf{a}$，使得

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{0}$$

证明　仅写出(V_2)的证明。如图1.4，(V_2)中两种运

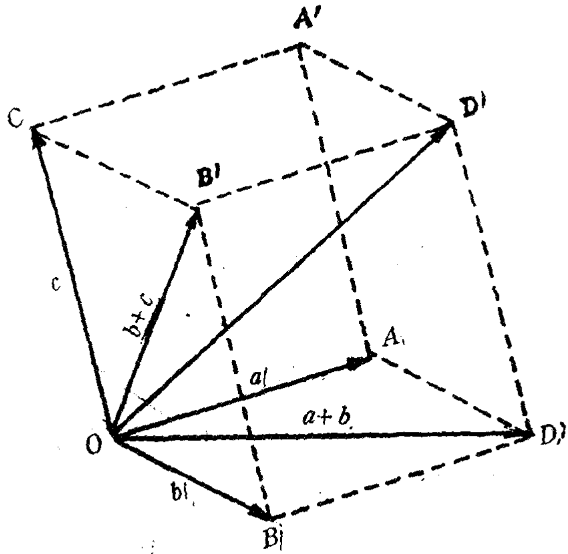

图 1.4

算次序的结果都是以OA、OB、OC为三条棱的平行六面体的对角线OD'。

结合律(V_2)允许我们直接写出多个向量的和：$\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\cdots+\mathbf{a}_p$。求多个向量的和用折线法则比较方便，见图1.5。

向量求和$\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$又写成$\mathbf{a}-\mathbf{b}$。

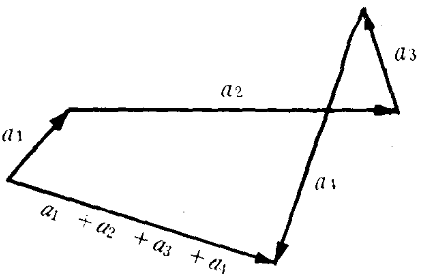

图 1.5

对向量规定（实）数乘运算如下：以实数λ数乘向量$\mathbf{a}$的结果是一个向量，记为$\lambda\mathbf{a}$：(1)$|\lambda\mathbf{a}|=|\lambda||\mathbf{a}|$；(2)$\lambda\mathbf{a}$与$\mathbf{a}$共线，且若$\lambda>0$时$\lambda\mathbf{a}$与$\mathbf{a}$指向相同，若$\lambda<0$时$\lambda\mathbf{a}$与$\mathbf{a}$指向相反。

图1.6画出了$2\mathbf{a}$与$(-2)\mathbf{a}$的图形。

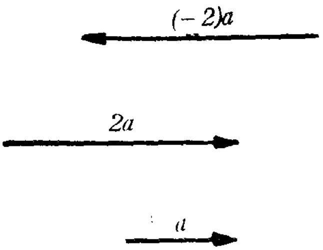

图 1.6

命题1.2 向量的数乘运算满足如下规则：

(V_5)　$1\mathbf{a}=\mathbf{a}$

(V_6)　$\lambda(\mu\mathbf{a})=(\lambda\mu)\mathbf{a}$

(V_7)　$(\lambda+\mu)\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$

(V_8)　$\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$

显然，还成立

$$(-1)\mathbf{a}=-\mathbf{a}$$

$$0\mathbf{a}=\mathbf{0}$$

向量的加法与数乘运算统称向量的线性运算。

例1.1 已知三角形ABC的三边$\overrightarrow{BC}=\mathbf{a}$，$\overrightarrow{CA}=\mathbf{b}$，$\overrightarrow{AB}=\mathbf{c}$，三边中点依次为$D$，$E$，$F$。求$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$

解 $\overrightarrow{AD}=\mathbf{c}+\dfrac{1}{2}\mathbf{a}$

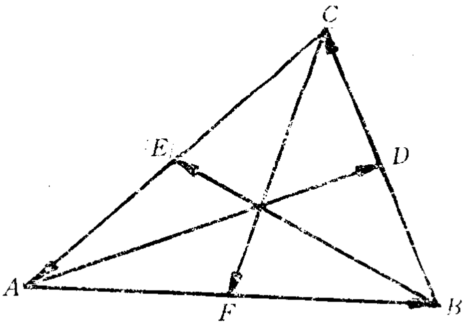

图 1.7

$$\overrightarrow{BE}=\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}$$

$$\overrightarrow{CF}=\mathbf{b}+\frac{1}{2}\mathbf{c}$$

所以

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$$

$$=\frac{3}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$$

由折线法则知 $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0$，故

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=0$$

模$|\mathbf{a}|=1$的向量 $\mathbf{a}$ 称为单位向量。如果 $\mathbf{a}\neq 0$，我们用 $\mathbf{a}^0$表示与 $\mathbf{a}$ 共线且指向相同的单位向量。我们有

$$\mathbf{a}=|\mathbf{a}|\mathbf{a}^0 \tag{1.3}$$

或

$$\mathbf{a}^0=\frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} \tag{1.4}$$

命题1.3 两个向量$\mathbf{a}_1$与$\mathbf{a}_2$共线的充分必要条件是：存在不全为0的两个数λ_1，λ_2，使得

$$\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2=0 \tag{1.5}$$

证明 必要性：设$\mathbf{a}_1$、$\mathbf{a}_2$共线。若$\mathbf{a}_1=\mathbf{a}_2=0$，令$\lambda_1=\lambda_2=1$即知存在不全为0的$\lambda_1$，$\lambda_2$使（1.5）成立。若$\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$不全为0，不妨设$\mathbf{a}_1\neq0$，于是$\mathbf{a}_1^0$是$\mathbf{a}_1$方向上的单位向量，而$\mathbf{a}_2$与$\mathbf{a}_1$共线，即与$\mathbf{a}_1^0$共线。所以

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_2&=\pm|\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_1^0\\&=\pm\frac{|\mathbf{a}_2|}{|\mathbf{a}_1|}\mathbf{a}_1\end{aligned}$$

即

$$|\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_1\mp|\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2=0$$

其中$|\mathbf{a}_1|\neq0$，必要性结论成立。

充分性：设（1.5）成立且不妨设$\lambda_1\neq0$，于是

$$\mathbf{a}_1=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{a}_2$$

根据向量数乘的规定，$\mathbf{a}_1$与$\mathbf{a}_2$共线。

推论1 两个向量共线的充分必要条件是其中一个向量可表示为另一个向量的数乘。

推论2 若$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$共线且$\mathbf{a}\neq0$，则必存在数λ，使

$$\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}$$

成立。

例1.2 证明三角形两边中点连线平行于第三边。

解 如图1.8，

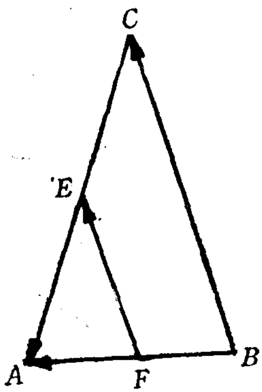

图 1.8

$$\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FA}-\overrightarrow{EA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CA})$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

可见$\overrightarrow{FE}$与$\overrightarrow{BC}$为共线向量。FE应于BC平行。

如果有若干个向量，当将它们的始点移至同一个点时，它们都在同一个平面上，就称它们是共面的向量。

命题1.4 三个向量$\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_3$共面的充分必要条件是：存在三个不全为0的数λ_1，λ_2，λ_3，使得

$$\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\lambda_3\mathbf{a}_3=0 \tag{1.6}$$

证明 必要性：设$\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_3$三向量共面。如果其中有两个向量，例如$\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$共线，则由命题1.3，存在不全为0的数λ_1，λ_2，使$\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2=0$，于是，$\lambda_1$，$\lambda_2$及$\lambda_3=0$便是使（1.6）成立的不全为0的三个数。

现设$\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_3$中任意两个向量皆不共线。将它们的始点都移至点O。如图1.9，$\overrightarrow{OA_1}=\mathbf{a}_1$，$\overrightarrow{OA_2}=\mathbf{a}_2$，$\overrightarrow{OA_3}=\mathbf{a}_3$。过$\mathbf{a}_3=\overrightarrow{OA_3}$的终点$A_3$分别作直线平行于$\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$而交

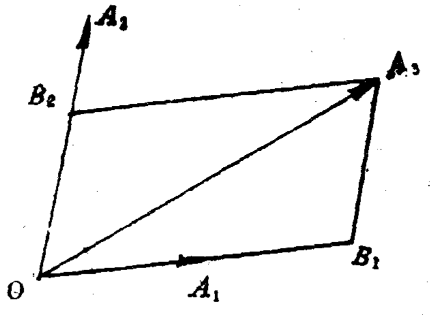

图 1.9

$\overrightarrow{OA_2}$，$\overrightarrow{OA_1}$所在直线于点 B_2和B_1。（因$\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_3$共面且两两不共线，这种作法是可实现的。）于是

$$\overrightarrow{OA_3}=\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}$$

$\overrightarrow{OB_1}$与$\mathbf{a}_1$共线，且$\mathbf{a}_1\neq 0$，故由命题1.3推论 2，存在数λ_1，使$OB_1=\lambda_1\mathbf{a}_1$，同理存在数$\lambda_2$，使$\overrightarrow{OB_2}=\lambda_2\mathbf{a}_2$。这样，不全为0的数$\lambda_1$，$\lambda_2$，$\lambda_3=-1$实现式（1.6）。

充分性：设(1.6)成立且不妨设$\lambda_1\neq 0$，于是

$$\mathbf{a}_1=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{a}_2-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\mathbf{a}_3 \qquad (1.7)$$

由向量运算的规定与规则，知$\mathbf{a}_1$与$\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_3$共面。

我们称$\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\cdots+\lambda_p\mathbf{a}_p$为向量$\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，…，$\mathbf{a}_p$的一个线性组合。

例如，(1.7)表示$\mathbf{a}_1$为$\mathbf{a}_2$与$\mathbf{a}_3$的线性组合。

推论1 三个向量共面的充分必要条件是其中一个向量可表示为另外两个向量的线性组合。

推论2 若$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$共面且$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$不共线，则必存在数λ、μ，使

$$\mathbf{c}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b} \qquad (1.8)$$

(1.8)又称为 $\mathbf{c}$ 依不共线方向 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ 的分解。

命题1.5 设$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$为给定不共面向量，则任一向量$\mathbf{d}$均可表示为$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$的线性组合。

证明 将$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$，$\mathbf{d}$的始点都移至同一点O，如图1.10，$\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$，$\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$，$\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$，$\overrightarrow{OD}=\mathbf{d}$。过$\overrightarrow{OD}$的终点$D$作平行于 $\mathbf{c}$的直线交$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$所在平面于点D'。于是

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OD'}+\overrightarrow{D'D}$$