

现代数学译丛

几 何

(第 三 卷)

凸集和多胞形,正多面体,面积和体积

[法] M. 贝尔热 著

科学出版社

现代数学译丛

几何

[德] 施泰因

巴黎高等师范学校 数学系教授 施泰因著

[法] 施泰因译

科学出版社

现代数学译丛

几 何

(第三卷)

凸集和多胞形, 正多面体, 面积和体积

[法] M. 贝尔热 著

马传渔 译

周克希 校

科 学 出 版 社

1 9 8 9

内 容 简 介

《几何》是法国数学家 M. 贝尔热为大学生撰写的一套教学参考书。全书共分五卷。主要内容为：群在集合上的作用，仿射与射影空间；欧氏仿射空间；凸集与紧多面体；二次型，二次超曲面与圆锥曲线；球面与椭圆、双曲几何。本书配有大量的图和例，并有许多知识性的注释、按语和历史文献介绍。本书根据原书第二版翻译。

第三卷介绍凸集和多胞形，正多面体，面积和体积。

本书可供高等院校数学系师生和有关的数学工作者参考。

M. Berger

GÉOMÉTRIE

3/Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes

CEDIC/Fernand Nathan, 1979, 2^e édition

现代数学译丛

几 何

(第三卷)

凸集和多胞形，正多面体，面积和体积

〔法〕M. 贝尔热 著

马传渔 译

周克希 校

责任编辑 杜小杨

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1989 年 3 月第 一 次 开本：850×1168 1/32

1989 年 3 月第一次印刷 印张：5 3/8

印数：0001—1,600 字数：141,000

ISBN 7-03-000841-3/O · 214

定 价： 4.30 元

目 录

第 11 章 凸集合	1
11.1 定义. 例子	2
11.2 凸性和一般拓扑. 凸集的维数	12
11.3 凸集的拓扑	14
11.4 凸集和超平面; 分离定理	22
11.5 支撑超平面; 应用	27
11.6 凸集的边界, 顶点, 端点	34
11.7 Helly 定理及其应用	38
11.8 凸函数	45
11.9 练习	59
第 12 章 多胞形, 紧凸集	64
12.1 定义, 例子, 面	65
12.2 多胞形的体积	77
12.3 多胞形的面积	80
12.4 正多边形	86
12.5 正多胞形: 定义. 例子	89
12.6 正多胞形: 分类	103
12.7 Euler 公式	111
12.8 Cauchy 定理	118
12.9 用多胞形逼近紧凸集	125
12.10 紧凸集的面积	129
12.11 等周不等式	142
12.12 练习	150
参考书目	157

第11章 凸 集 合

在几何中很自然地会遇到凸集；而凸集在分析中也具有重要的作用，甚至在算术、微分几何里也会遇到凸集。本书中，除开有关凸函数的很少一部分内容外，我们只考虑凸性概念的几何观点。此外，作为特殊凸集的多面体，将在下一章作详细的研究。

11.1 节介绍凸集的几个较难的例子。这些例子：Minkowski 的加法、一个凸集关于一个球面的对偶凸集（或配极）、一个凸集的 Steiner 对称，在以后都是要用到的。

11.3 节在不计同胚差别的意义上，给出了凸集的分类和它们边界的分类；因而，从代数拓扑观点来看，凸集是容易研究的。当我们能够把研究对象如此容易地进行分类时，就应该利用这一便利。

11.4 节的内容是古典的，它给出了分离定理和 Hahn-Banach 定理的一些推论。它们特别对于证明凸集间的配极关系是良好对偶，以及在 11.6 节研究关于凸集的边界点都是很有用的。边界点和对偶性在第 12 章里将起极为重要的作用。

11.7 节给出 Helly 定理及其一些推论，这是一个很精彩的定理，叙述却很简单。Krasnosel'skii 定理是它的一个有趣的应用。

最后，11.8 节中定义了凸函数，并给出凸函数的一些性质；两个不那么平常的凸函数的例子都是下文中要用到的：等周不等式的 Brunn-Minkowski 定理在等周不等式证明中要用到，而 Loewner-Behrend 定理将作为仿射二次超曲面的一个特征。

在整个这一章里，只讨论维数为有限数 d 的实仿射空间。

11.1 定义. 例子

11.1.1 定义. 设 S 是仿射空间 X 的一个子集. 如果 $\forall x, y \in S$, 有 $[x, y] \subset S$ (参见 3.4.3), 这里 $[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y: \lambda \in [0, 1]\}$, 则称 S 是凸子集, 简称凸集.

11.1.2 例子

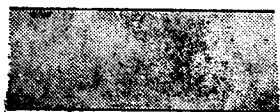


图 11.1.1.1.



图 11.1.1.2.



图 11.1.1.3.



图 11.1.1.4.

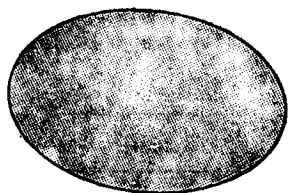


图 11.1.1.5.

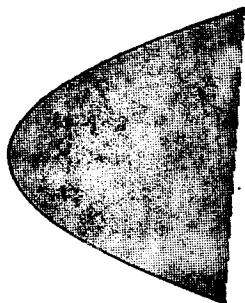


图 11.1.1.6.

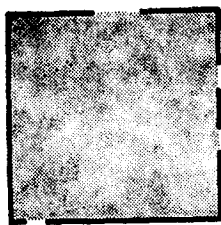


图 11.1.1.7.

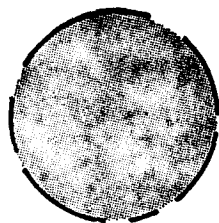


图 11.1.1.8.

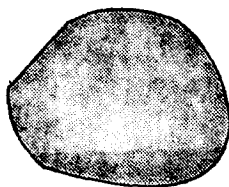


图 11.1.1.9.

11.1.2.1 在上面诸图形中,除图 11.1.1.2 和图 11.1.1.7 外均是凸集。对于图 11.1.1.7 和图 11.1.1.8,更确切地说,图形边界上粗线部分属于所考虑的集合,阴影部分不属于所考虑的集合。图 11.1.1.1 表示平面上一个带形区域;图 11.1.1.3 表示空间中无限延伸的一个圆柱体;图 11.1.1.4、11.1.1.5 和 11.1.1.6 分别表示平面上由双曲线、椭圆和抛物线所决定的区域(参见 17.1.4 节)。

11.1.2.2 整个仿射空间 X , X 的任意一个仿射子空间(参见 2.4),尤其是点、直线和超平面,都是凸集。空集也是凸集。但正如读者料想得到的那样,这样一来很快会造成一些似是而非的定理;回想一下 Valintine ([VE] 第 198 页) 救援公理是有益的:“如果由于集合 A 是空集而使一个定理是错的,那么我们将不言而喻地假设 A 是非空的。我们诚挚地希望以后永远不会再有这类的呼救”。

11.1.2.3 R (或者说 X 在 $d = 1$ 时) 中的凸集就是区间(任何一种类型的区间)。

11.1.2.4 设 E 是 X 的一个子集, $x \in E$. 若对任意的 $y \in E$, 有 $[x, y] \subset E$, 则称 E 是一个在 x 处的星形集. 因而, 一个凸集在其每一点处都是星形集. 在 11.7.7 节中将看到星形集的一个很漂亮的特征. 星形集是连通的(而且是弧连通的). 特别, 凸集是连通的.

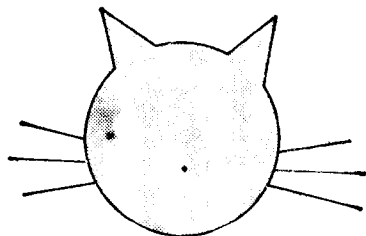


图 11.1.2.4.

11.1.2.5 在欧几里得仿射空间中, 每一个开球 $B(a, r)$ 或闭球 $U(a, r)$ 是凸集. 更进一步(参见图 11.1.1.8), 对于球面 $S(a, r)$ 的任意一个子集 A , $B(a, r) \setminus A$ 总是凸集; 对于立方体此结论不成立(参见图 11.1.1.7).

11.1.2.6 设 X, Y 是仿射空间, $S \subset X$ 和 $T \subset Y$ 都是凸集, $f: X \rightarrow Y$ 是一个仿射映射. 则 $f(S) \subset Y$ 和 $f^{-1}(T) \subset X$ 仍为凸集(应用 3.5.1). 特别, 如果 $H \subset X$ 是一个超平面, 则由它决定的半空间(开的或闭的, 参见 2.7.3)是凸的; 事实上, 如果对于 X 上一个仿射形式 f , $H = f^{-1}(0)$, 则这些区域就是 $f^{-1}([0, \infty[)$, $f^{-1}(]0, \infty[)$, $\dots$. 而 $[0, \infty[$, $]0, \infty[$ 是 $\mathbf{R}$ 中凸集(参见 11.1.2.3).

11.1.2.7 任意多个(有限多个或无限多个)凸集的交集为凸集. 由此根据(11.1.2.6)推得, 半空间的交集为凸集. 特别, 有限多个半空间的交集是凸集: 称为凸多面体. 凸多面体的研究将是第 12 章的主要内容.

凸集的相交并集仍为凸集.

11.1.2.8 向量空间 E 上的正定二次型构成 $\mathcal{P}^{\bullet}(E)$ 的一个

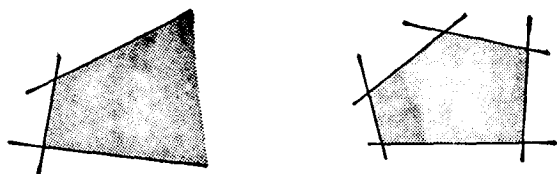


图 11.1.2.7.

凸集。在 11.8.9 节中还将遇到此例。

下面给出依照不同的方法构作的三个比较复杂一点的凸集的例子。

11.1.3 凸集的加法。 Minkowski 首先采用下面的运算：设 S, T 是向量空间 X 的两个凸集，则：

11.1.3.1 $\lambda S + \mu T = \{\lambda s + \mu t : s \in S, t \in T\}$ 是凸集，其中 λ, μ 为两个任意的实数。

读者可以直接予以证明，或对映射 $f: X \times X \ni (x, y) \mapsto \lambda x + \mu y \in X$ 应用 11.1.2.6 亦可。

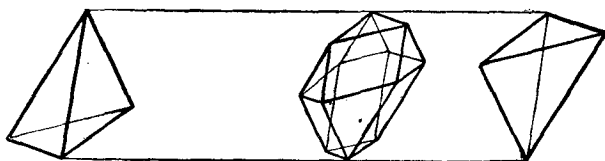


图 11.1.3.1.

如果 X 是仿射空间，上述的加法仅当 $\lambda + \mu = 1$ 时才有意义（参见 3.4.1）；否则， $\lambda S + \mu T$ 仅当不计平移差别时，才是确定的，而它的“形状”却总是相同的（参见 2.1.8）。请读者选取 S, T 画出几个 $\lambda S + \mu T$ ，特别是 $S - T$ 。一种特殊的情形在以后等周不等式的证明中将是十分重要的（参见 12.10.10）。

11.1.3.2 定义和命题。 设 X 是欧几里得向量空间， A 是 X 的一个子集， $\varepsilon > 0$ 。

置 $U(A, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\}$ ，

$$B(A, \varepsilon) = \{x \in X: d(x, A) \leq \varepsilon\}$$

(参见 0.3), 则有 $U(A, \varepsilon) = A + U(0, \varepsilon)$; 若 A 还是紧的, 则有 $B(A, \varepsilon) = A + B(0, \varepsilon)$.

如果 $d(x, A) < \varepsilon$, 则依 $d(x, A)$ 的定义 (参见 0.3), 存在 $a \in A$, 使得 $d(x, a) < \varepsilon$. 由此推出 $x = a + \vec{ax} \in A + U(0, \varepsilon)$. 反过来, 如果 $x \in A + U(0, \varepsilon)$, 则有 $x = a + \vec{ax}$, 使得 $\|\vec{ax}\| < \varepsilon$. 从而, $d(x, A) \leq d(a, x) = \varepsilon$.

在紧的情况下, 我们知道 $\forall x \in X, \exists y \in A$, 使得

$$d(x, y) = d(x, A).$$

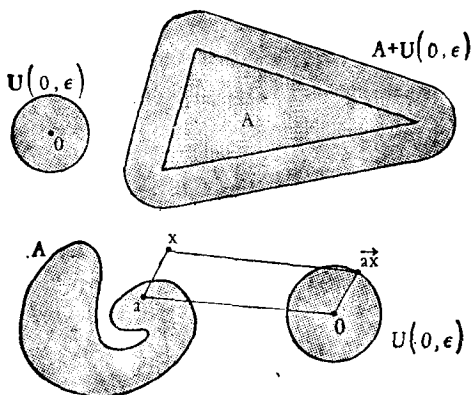


图 11.1.3.2.

11.1.3.3 推论. 如果 A 是凸的, 则对于任意的 $\varepsilon > 0$, $U(A, \varepsilon)$ 也是凸的. 若 A 是紧的, $B(A, \varepsilon)$ 亦然.

11.1.4 凸集的 Steiner 对称化. 采用 9.13 节中的定义和记号:

11.1.4.1 命题. 若 S 是凸的, 则 $\text{st}_H(S)$ 也是凸的.

设 $x, x' \in \text{st}_H(S)$, D 和 D' 分别为过 x 和 x' 的与 H 垂直的直线, $[u, v] = \text{st}_H(S) \cap D$ 和 $[u', v'] = \text{st}_H(S) \cap D'$ 分别是 x 和 x' 所属的线段. 由作法, 又因为 S 是凸的, 可知 $[u, v]$ 和 $[u', v']$ 位于 S 中的两个线段 $[a, b]$ 和 $[a', b']$ 所在直线上. 在由 D 和 D' 所

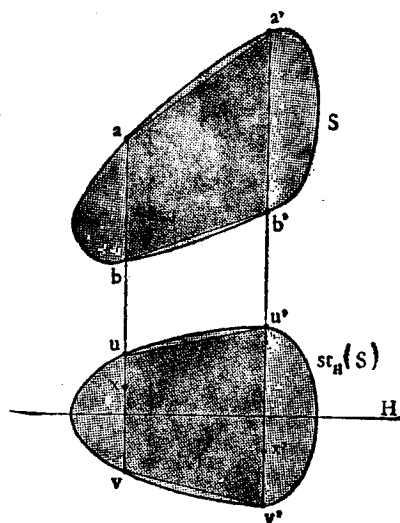


图 11.1.4.

决定的仿射平面内, 存在一个仿射映射 f , 使得 $a \mapsto u, b \mapsto v, a' \mapsto u', b' \mapsto v'$, 且由假设条件, f 保持与 H 垂直的线段长度不变. 于是, 如果 T 表示以 a, b, a', b' 为顶点的梯形, 则 $f(T)$ 是以 u, v, u', v' 为顶点的梯形; 但因 S 是凸的, 故 $T \subset S$, 由此得到 $f(T) \subset \text{st}_H(S)$, 特别有 $[x, x'] \subset \text{st}_H(S)$.

11.1.5 凸集的配极, 对偶

11.1.5.1 定义. 设 A 是欧几里得向量空间 X 的任意一个子集, A 的配极子集为

$$A^* = \{y \in X: (x|y) \leq 1, \forall x \in A\}.$$

根据 11.1.2.7, 对于任意的 A , A^* 是一个凸集. 定义 11.1.5.1 和关于 X 中单位球面 $S = S(0, 1)$ 的逆配极变换有密切联系; 事实上, $x \in X$ 的配极超平面不是别的, 就是 $\{y \in X: (x|y) = 1\}$, 参见 10.7.11 和 15.5. 请读者除下述这些图形外, 再画若干个 A , 并作出相应的 A^* . 在 11.4.8 节中将会看到, 如果 A 取遍内部包含有 0 点的紧凸集, 则映射 $f: A \mapsto A^*$ 是一个优异的对偶, 这种对

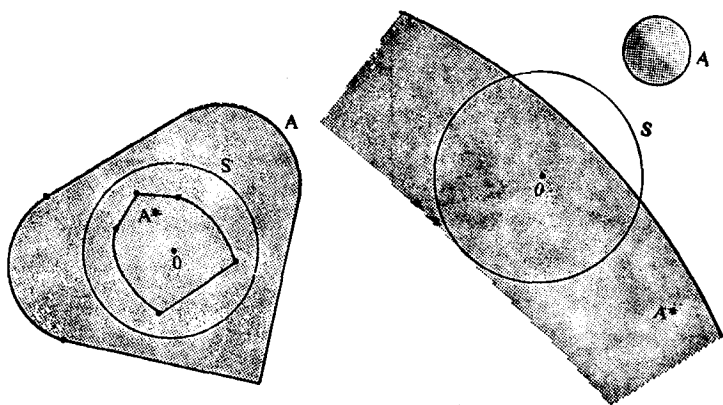


图 11.1.5.

偶在第 12 章中讨论多面体时将要大量地用到。

11.1.6 附注：凸锥。 凸锥是一个重要的概念；一个凸集 C 称为以 x 为顶点的凸锥，意即对于每一个以 x 为中心，比值为 $\lambda \in \mathbf{R}^+$ 的位似 $H_{x,\lambda}$, C 是稳定的。我们没有时间研究这个概念，对此例如可参阅 [BI 3] 第 46 页或者 [VE].

11.1.7 凸集的判定准则。 首先介绍凸集的一个简单的，但很有用也很有趣的性质。

11.1.7.1 命题。 设 S 是欧几里得仿射空间 X 的一个凸集， $x \in X$ ，则至多存在一点 $y \in S$ ，使得 $d(x, y) = d(x, S)$ (如果 S 是非空闭集，显而易见这样的 y 总是存在的)。

11.1.7.2 引理。 设 S 是 X 的一个凸集， $x \in X$ 和 $y \in S$ 使得 $x \neq y$ 和 $d(x, S) = d(x, y)$ ，则若 H 表示过 y 并同 $\overrightarrow{xy}$ 垂直的一个超平面， S 必落在由 H 决定的不含 x 的那个闭的半空间内。如果仅假定 S 是 y 处的一个星形集，本引理依然成立。

采用反证法。假设 $z \in X$ 为不属于此半空间的一点，则角 $\overrightarrow{yxy}, \overrightarrow{yzy}$ 是锐角，且在 $[y, z]$ 上存在点 t ，使得 $d(x, t) < d(x, y)$ ，

根据 9.22 节，即可由引理推得命题。

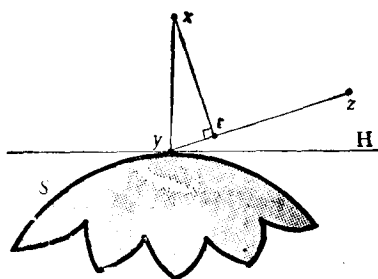


图 11.1.7.

其实性质 11.1.7.1 可作为凸集的特征, 这就是 Motzkin 定理:

11.1.7.3 定理. 设 S 是欧几里得仿射空间 X 的一个非空闭集, 使 $\forall x \in X$, 存在唯一的 $y \in S$ 使得 $d(x, y) = d(x, S)$, 则 S 是一个凸集.

本定理的一个证明方法可看 [VE] 第 94 页. 这本著作中还有对 S 中与 x “距离最远” 的点的研究, 见第 98 页和 ii.

11.1.7.4 借助于支撑超平面的概念, 在 11.5.4 节中将给出凸集的第二个特征.

在 [VE] 第 48 页和 ii, 还利用“局部凸性”的各种条件给出了凸集的一个特征; 这是一个从局部过渡到大范围的例子. 对于这种类型问题可参看 9.5.4.5; 12.8; 16.4; 18.3.8.6.

11.1.8 凸包络

11.1.8.1 从 11.1.2.2 和 11.1.2.7 节用常规的论证可以推出: 对于仿射空间 X 的任意一个子集 A , 存在一个包含 A 的最小凸



图 11.1.8.

集,即 X 内所有包含 A 的凸集之交. 作为定义,这样一个最小的凸集称为 A 的凸包络,记作 $\mathcal{E}(A)$.

11.1.8.2 在 12.1.9 节中 (参见 11.6.8) 将会看到, X 的有限子集的凸包络的集合和 X 内多面体(紧致)的集合之间有一个恒同关系.

11.1.8.3 为了得到 $\mathcal{E}(A)$,除其它方法外,有两个重要的方法. 第二种方法(取包含 A 的所有超平面区域的交集)将放在 11.5.5 节内加以研究. 第一种方法是采用重心的办法.

11.1.8.4 命题. 对于 X 的任意一个子集 A , $\mathcal{E}(A)$ 是由 A 内所有作用有正质量的点系的重心所构成的集合,即

$$\mathcal{E}(A) = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i x_i : \forall i, x_i \in A, \forall \lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1 \right. \\ \left. (\text{除去有限个 } i \text{ 外 } \lambda_i = 0), i \text{ 是任意的} \right\}.$$

证明是平凡的,利用定义 11.1.1 并在 3.4.9 的基础上用归纳法即可得证.

11.1.8.5 我们会很自然地希望把 11.1.8.4 从两个方面弄得更精细些: 第一,点系的基数是否仅限于有界的? 如果是,这个基数到底等于什么? 第二,是否有必要取 A 中所有点的重心? 如果不是,取哪些点? Krein 和 Milman 的定理给出了第二个问题的答案,参看 11.6.8,也可看 11.2.9. 回到第一个问题,前面任何一个图形都向读者表明,一般有必要使所取的 I 的基数, $\#I \geq d+1$. 其实,这个条件也是充分的.

11.1.8.6 定理 (Carathéodory). 对于 d 维仿射空间 X 的任意一个子集 A ,我们有

$$\mathcal{E}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i x_i : \forall i, x_i \in A, \forall \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1 \right\}.$$

设 $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$, $k > d+1$; 以任何方式将 X 向量化 (参阅 2.1.9 节). 因为 $\dim X = d$, 而 $k > d+1$, 由线性代数知识可知: 存在不全为 0 的 $\alpha_i (i=1, \dots, k)$, 使得 $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = 0$ 和

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0.$$

设 $\Theta = \{\tau \in \mathbf{R}: \tau \alpha_i + \lambda_i \geq 0 \ \forall i = 1, \dots, k\}$.

Θ 是 $\mathbf{R}$ 的一个闭集(有限个数的广义不等式); 因为 $0 \in \Theta$, 所以 Θ 是非空的. 因为 α_i 不全为 0, 所以 $\Theta \neq \mathbf{R}$. 设 τ 是 Θ 的一个边界点, 并且相应的 j 满足 $\tau \alpha_j + \alpha_j = 0$, 则有

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + \tau \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i \right) = \sum_{i=1}^k (\lambda_i + \tau \alpha_i) x_i \\ &= \sum_{i \neq j} (\lambda_i + \tau \alpha_i) x_i, \end{aligned}$$

由引进符号的意义可知 $\sum_{i \neq j} (\lambda_i + \tau \alpha_i) = 1$, 从而我们把 x 表作

了 $k-1$ 个具有正质量的向量的重心.

11.1.8.7 推论. 若 A 是紧的, 则 $\mathcal{E}(A)$ 也是紧的.

事实上, 若令 $K = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1}) \in \mathbf{R}^{d+1}: \forall i \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1 \right\}$,

K 是 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的一个紧集. 并且 11.1.8.6 表明: $\mathcal{E}(A)$ 是 $K \times A^{d+1} \subset \mathbf{R}^{d+1} \times X^{d+1}$ 在连续映射

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1}, x_1, \dots, x_{d+1}) \mapsto \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i x_i$$

下的象.

在 11.9.3 中对 11.1.8.6 作了改进. 请看 11.2.2 Hilbert 给出了 11.1.8.6 一个很精彩的应用, 对此可参看: W. J. Ellison, Waring's problem. American Mathematical Monthly. 78 (1971), 特别是第 5 节.

11.1.8.8 若 A 是有界的, 则直径 $\text{diam}(\mathcal{E}(A)) = \text{diam } A$. 特别, $\mathcal{E}(A)$ 仍是有界的.

这是 11.8.7.6 的一个推论.

11.2 凸性和一般拓扑. 凸集的维数

回想到我们的仿射空间是有限维的, 故它有一个典范的拓扑 (参见 2.7.1.4).

11.2.1 命题. 如果 S 是凸的, 则它的闭包 $\bar{S}$ 也是凸的.

可用两种方法看出这一点. 首先, 我们可以利用映射 $(x, y) \mapsto \lambda x + (1-\lambda)y$ 对任意 λ 的连续性. 其次, 于 S 所在的仿射空间 X 内装上一个欧几里得结构后, 就有 $\bar{S} = \bigcap_{\epsilon > 0} U(S, \epsilon)$, 因而由 11.1.3.3 本命题得证.

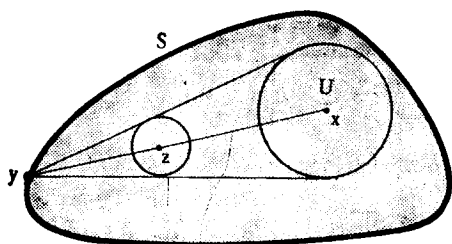


图 11.2.1.

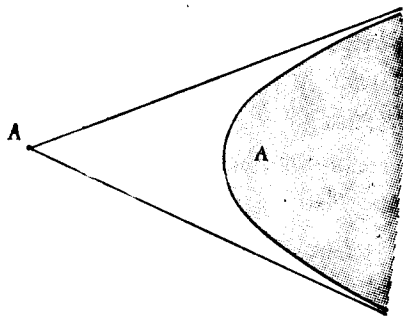


图 11.2.2.