经济管理中的数学方法

主　编　李少斌
副主编　李　政　郭玉魁
　　　　胡家喜　伍延兴
　　　　田云刚

武汉工业大学出版社

NGJI GUANLIZHONG DE SHUXUE FANGFA

《经济管理中的数学方法》编辑委员会

主　编　李少斌

副主编　李　政　郭玉魁　胡家喜
　　　　伍延兴　田云刚

编　委　黄晓莉　夏顺义　李启平
　　　　宁兰华　吕蔚如

各章编者

胡家喜：	第一章	经济预测
胡家喜：	第二章	经济决策
李　政：	第三章	网络分析与图论方法
夏顺义：	第四章	可靠性分析
郭玉魁：	第五章	库存分析
伍延兴：	第六章	质量管理
李少斌：	第七章	数学规划
宁兰华：	第八章	会计
李启平　田云刚：	第九章	统计
黄晓莉　夏顺义：	第十章	金融
吕蔚如：	第十一章	货币
郭玉魁：	第十二章	涉外经济
郭玉魁　黄晓莉：	第十三章	综合

序

我国的宪法明文规定，我国实行社会主义市场经济。在市场经济条件下，经济管理的科学化与现代化已关系到我国经济能否持续、快速、健康发展的问题，对广大的企业来说，更关系到它们的兴盛与衰败问题。因此，搞好我国的经济管理工作势在必行，不仅从管理思想、制度、理论等方面要搞好，而且在管理方法和技术上也要高度重视。

经济管理有宏观管理和微观管理两大类。加强对国民经济的宏观调控，实现经济快速、健康、稳步地增长，这是宏观的经济管理问题；提高企业的经济效益，降低生产成本，以最低的消耗获取最大的效益，这是微观的经济管理问题。我们所要求的管理，是一种有效的管理，就是管理要合理化、科学化和现代化。因此，我们要大胆地学习和借鉴世界发达国家和发展中国家一切行之有效的管理方法和经验，同我国的国情相结合，以促进我国经济的迅速发展。

运用现代数学方法于经济管理，在国际上已经十分普遍，数学方法已成为经济管理科学化和现代化的重要手段之一。法国的经济分析学家、1988 年诺贝尔经济奖获得者莫里斯·阿莱教授最突出的成就是运用数学方法探讨经济体系的均衡问题。他在一般均衡与资源配置优化理论、货币与经济周期理论等方面做出了最为杰出的贡献。中国科学院外籍院士、1978 年的诺贝尔经济奖获得者司马贺(H. A. Simon)教授，在经济组织的决策程序上进行了创造性研究，提出了“管理就是决策，整个管理过程都是决策”的论点，并在经济学和企业管理以及应用数学、统计学和运筹学等方面作出了重要的贡献，成为人工智能的奠基者，把管理科学的发展推上了新的阶段。

经济管理数学方法的研究，在我国属于数量经济学的范畴。我国在这方面的研究工作，起步较晚，但是，在改革开放浪潮的推动下，十

多年来已取得了长足的进展。目前，已呈现出欣欣向荣蓬勃发展的态势，不论在学科建设、理论研究还是实际应用方面，都取得了可喜的成果。现在，经济数量分析和电子计算技术的应用已开始普及，经济数据的收集、整理、存储和传递工作以及建立决策支持系统，进行辅助决策，都已取得了显著成绩，朝着现代化管理的方向迈步前进。

实现国民经济管理现代化的主要关键是，实现国民经济和社会的信息化。信息化的根本任务是，建设好我国的"信息高速公路"。所谓"信息高速公路"是指全国性或全球性的四通八达的电子信息网络。这种网络能把个人、企业、机构和政府联接起来，并提供各种各样的优质服务。当前，我国"信息高速公路"的建设已经开始，计划已经制定，目标已经明确，"金桥"、"金关"、"金卡"工程正在起步。"三金工程"是巨大的系统工程，它的实施将大大促进经济管理数学方法的应用与发展。

经济管理数学方法的内容十分广泛。本书包含了经济预测、经济决策、网络分析、图论方法、可靠性分析、库存分析、质量管理、规划、统计、会计、货币、金融、涉外经济、优化分析、价值工程与市场营销等方面所使用的数学方法，内容十分丰富。全书十三章，各章虽有联系，但基本上是独立的。它不是强调数学方法的系统性，而是紧密结合国民经济管理，以实际管理方法为导向，突出实用性与可操作性，便于掌握。本书叙述简明扼要，层次分明，深入浅出。我相信，立志于提高科学管理水平的理论与实际工作者一定会从中获得收益。

本书的出版正值我国经济发展进入调整发展阶段，书中提供的方法，对于加强我国经济的宏观管理，防止经济运行过热，实现经济高速增长的"软着陆"，使经济能继续快速、健康地发展，有着重要的意义。另一方面，本书的出版发行，对我国经济管理人才的培养，提高我国的经济管理水平，加速经济的发展，将起良好的促进作用。

冯文权

1995 年 3 月于武昌珞珈山

目　　录

第一章　经济预测

一、经济预测基本概念

〔**经济预测**〕　经济预测就是利用一定的资料和方法，对经济问题，如工业、农业、商业、交通运输等的发展速度、投资规模、总产值及国民收入增长速度与水平、市场销售量和各种经营活动中的经济指标等的未来发展状况进行科学的估算和测定。

经济预测，作为经济管理的一个重要环节，具有如下功能：一是为经济决策提供依据；二是为经济系统规划提供依据；三是为经济系统设计和分析提供数据；四是为经济系统适应环境变化提供及时情报。

〔**经济预测分类**〕　从预测的时间长度来看，预测可分为长期预测（10～15 年）、中期预测（5～10 年）、短期预测（1～5 年）。一般地，预测精度是时间的函数，预测的时间越短，精度越高；反之，精度就越低。从预测的性质来看，预测可分为定性预测、定量预测两大类。定性预测主要是根据经验、靠人的主观判断获得预测结果；定量预测则是建立在一定统计资料基础上，利用科学的计算和分析方法，获得预测结果。因此，定量预测更具有科学性和精确性。在实际生活中，人们也常常将这两种方法综合使用，称之为综合预测。

〔**定量预测程序**〕　1. 确定预测目标。在预测前，明确规定预测要达到的目标、预测期限及预测过程中各指标的数量单位；

2. 根据可靠性原则收集资料和对历史数据进行分析；

3. 建立预测模型；

4. 根据模型进行预测，并结合实际进行评价、分析；

5. 修正预测值。

二、一元回归分析预测法

〔**一元线性回归预测模型**〕 设有两个经济变量 x、y，它们之间具有一定的因果关系，从理论上或由经验可知，y 是 x 的线性函数，可表达成如下形式：

$$y=a+bx+\varepsilon \tag{1—1}$$

这里，a、b 为未知待定常数，ε 是服从正态分布的随机变量，$\varepsilon\sim N(0,\sigma^2)$。

一元线性回归预测就是通过对以往 x，y 的 n 次观察数据 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)、……(x_n,y_n) 来估计 a、b 的值 $\hat{a}$、$\hat{b}$。从而得到预测模型

$$\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x \tag{1—2}$$

由式(1—2)可利用未来某时刻 x 的观察值(或估计值)来计算 $\hat{y}$，作为 y 的预测值。

由最小二乘法原理，$\hat{a}$、$\hat{b}$ 的计算公式为

$$\begin{cases}\hat{b}=\dfrac{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\sum\limits_{i=1}^{n}y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \\ \hat{a}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i-\hat{b}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}\end{cases} \tag{1—3}$$

〔**例 1**〕 某市人均收入和人平消费支出，1980～1986 年的调查数据如表(1—1)。求人均收入关于人均消费的回归预测模型。

表 1—1

年　份	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986
人均收入 x_i(元)	480	510	545	590	640	780	760
人均消费 y_i(元)	420	450	490	530	580	620	680

解:由表1—1,计算得到表1—2。

表1—2

序号	x_i	x_i^2	y_i	y_i^2	x_iy_i
1	480	230400	420	176400	201600
2	510	260100	450	202500	229500
3	545	297025	490	240100	267050
4	590	348100	530	280900	312700
5	640	409600	580	336400	371200
6	780	608400	620	384400	483600
7	760	577600	680	462400	516800
	$\bar{x}=615$	$\sum_{i=1}^{7}x_i^2=2731225$	$\bar{y}=538.6$	$\sum_{i=1}^{7}y_i^2=2083100$	$\sum_{i=1}^{7}x_iy_i=2382450$

将表1—2中数据代入式(1—3),得:

$$\hat{b}=\frac{7\times2382450-7\times615\times7\times538.6}{7\times2731225-(4305)^2}=0.7638$$

$$\hat{a}=538.6-0.7638\times615=68.86$$

故所求的预测模型为

$$\hat{y}=68.86+0.7638x$$

〔**一元回归预测模型的检验方法**〕 对于所求的回归模型 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$,一般需要进行三个方面的检验,以便确定回归直线的拟合优度(即回答其反映的真实情况如何)、参数 a、b 的估计值 $\hat{a}$、$\hat{b}$ 的显著性、回归预测模型的统计可靠性及回归余项的线性独立性。

1. 用 r 检验回归直线的拟合优度

设总体相关系数为 ρ_{xy},按相关系数的定义

$$\rho_{xy}=\frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sqrt{D(x)D(y)}}$$

它说明了总体 x、y 共同变化中关系的密切程度。由于 ρ_{xy}未知,所以要用样本的相关系数 r_{xy} 去估计总体相关系数,即 $r_{xy}=\hat{\rho}_{xy}$、r_{xy}的计算公式

$$r_{xy}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\overline{y}^2\right)}} \tag{1-4}$$

这里$|r_{xy}|\leqslant 1$。当$r_{xy}=1$时,称x、y为完全正相关;当$r_{xy}=-1$时,称x,y为完全负相关;当$0.7\leqslant|r_{xy}|\leqslant 1.0$时,称$x$、$y$为高度相关;当$0.3\leqslant|r_{xy}|<0.7$,称$x$,$y$为中度相关或显著相关;当$|r_{xy}|<0.3$时,称$x$,$y$为低度相关。显然,$|r_{xy}|$越大,说明回归预测模型的拟合程度越好。

例如,在〔例1〕中,将表1—2的数据代入(1—4),得

$$r_{xy}=\frac{2382450-7\times 615\times 538.6}{\sqrt{[2731225-7\times(615)^2][2083100-7\times(538.6)^2]}}\approx 0.96$$

因此,可以认为变量x(人均收入)与y(人均消费)是高度相关的,回归模型的拟合优度高。

2. 参数$\hat{b}$的显著性检验

参数$\hat{b}$的检验用t分布进行,主要考察变量x,y之间的线性假设的合理性,即回答x是否为y的重要解释变量。其步骤如下:

(1)$H_0:b=0$,$H_1:b\neq 0$。

(2)构造统计量t^*,并计算其值。

$$t^*=\frac{\hat{b}-E(\hat{b})}{S(\hat{b})}=\frac{\hat{b}-b}{S(\hat{b})}=\frac{\hat{b}}{S(\hat{b})} \tag{1-5}$$

其中 $S(\hat{b})=\frac{Sy}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{(n-2)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}}$,$t^*\sim t(n-2)$,$Sy$为回归标准差,$Sy=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{n-2}}$

〔注〕:$E(\hat{b})=b$,又$H_0:b=0$,故$\hat{b}-b=\hat{b}$。

(3)选取 α(一般为 0.05)进行双尾检验,查 t 分布表得到 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)$

(4)比较:若 $t^* > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)$,则拒绝原假设 H_0,认为 x 与 y 的线性假设合理;反之接收 H_0,以概率 $1-\alpha$ 认为回归系数 $b=0$,即 x,y 的线性假设不合理。

〔例 2〕 在〔例 1〕中,对 $\hat{b}$ 进行显著性检验。

解:(1)H_0:$b=0$,H_1:$b_1 \neq 0$。

(2)计算 t^*。

$$t^* = \hat{b} / \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2/(n-2)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

$$=0.7638/\sqrt{3872.56/5 \times 6766.25}=7.14$$

(3)选 $\alpha=0.05$,查 t 分布表,得: $t_{0.025}(5)=2.3646$

(4)$t^* > t_{0.025}(5)$

故拒绝原假设,认为 x 与 y 的线性假设合理。

3. $D \cdot W$ 检验

为了保证预测模型的适用,需要对回归余项的线性独立性进行检验,即序列自相关检验。其检验方法如下:

(1)设回归余项序列自相关系数为 ρ,则检验假设

$$H_0: \rho=0$$

(2)构造统计量 d

$$d=\frac{\sum_{i=1}^{n}(e_i-e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n}e_i^2} \qquad (1-6)$$

这里 $e_i=y_i-\hat{y}_i$

(3)给定 α,查 $D \cdot W(n,k)$ 表,得 d_L,d_u,其中,n 为样本数,k 为自变量个数。

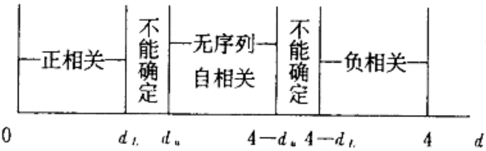
(4)判断:若 $d_u < d < 4-d_u$,则接收 H_0,认为回归余项无序列相

关。

若 $0<d<d_L$，则否定 H_0，认为回归余项有正序列相关。

若 $4-d_L<d<4$，则否定 H_0，认为回归余项有负序列相关。

当 $d_L<d<d_u$ 或 $4-d_u<d<4-d_L$，这一检验无法确定其相关性。



应该指出，在样本容量较大的情况下，$D \cdot W$ 检验是重要的。即是说，如果回归余项之间不相互独立，而存在着自相关关系，那么所建立的模型就不能用于预测，应重新分析，查找原因，重建模型。方法可详见有关著作，如易丹辉的《统计预测——方法与应用》。

三、多元回归预测法

〔**多元回归预测模型**〕　社会经济现象，往往不只由一个影响因素加以解释，如国家财政支出与基建拨款、增拨流动资金、文教卫生、科学事业及国防事业费支出都有直接关系。因此，某个经济变量 y，常与多个变量 x_1、x_2……x_k 具有一定的因果关系，从理论上可表述为

$$y=b_0+b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_kx_k+\varepsilon \qquad (1-7)$$

其中 b_0 为回归常数，$b_i(i=1,2\cdots\cdots k)$ 为回归系数，ε 是除 x_j 以外可忽略的随机因素，一般服从多元正态分布 $\varepsilon\sim N(0,\sigma^2I)$。

多元回归预测的原理、方法、步骤与一元回归预测基本上一样，也是根据对 $(y,x_1,x_2\cdots\cdots x_k)$ 的 n 次观察数据，$(y_1,x_{11},x_{12}\cdots\cdots x_{1k})$，$(y_2,x_{21},x_{22}\cdots\cdots x_{2k})\cdots\cdots(y_n,x_{n1},x_{n2}\cdots\cdots x_{nk})$ 利用最小二乘法原理得到 $b_0,b_1,\cdots\cdots b_k$ 的估计值，从而进行预测。

将 $(y,x_1,x_2\cdots\cdots x_k)$ 的 n 次观察值排列如下：

$$\begin{array}{lllll} y_1 & x_{11} & x_{12} & \cdots\cdots & x_{1k} \\ y_2 & x_{21} & x_{22} & \cdots\cdots & x_{2k} \\ & \vdots & & & \\ y_n & x_{n1} & x_{n2} & \cdots\cdots & x_{nk} \end{array}$$

令

$$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots\cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots\cdots & x_{2k} \\ & \vdots & & & \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots\cdots & x_{nk} \end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

则回归系数向量 b 的估计 $\hat{b}=(\hat{b}_0\ \hat{b}_1\cdots\cdots\hat{b}_k)^T$ 的计算公式为

$$\hat{b}=(X^T X)^{-1}X^T Y \tag{1—8}$$

这里 X^T 表示 X 的转置矩阵。

预测模型为

$$\begin{aligned} \hat{Y}&=X\ \hat{b} \\ &=X(X^T X)^{-1}X^T Y \\ &=\hat{b}_0+\hat{b}_1X_1+\hat{b}_2X_2+\cdots+\hat{b}_kX_k \end{aligned} \tag{1—9}$$

特别地，当 k 等于 2 时，称多元回归预测问题为二元回归预测问题。预测模型为

$$\begin{aligned} \hat{Y}&=X\ \hat{b}=(1,X_1,X_2)\begin{pmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{pmatrix} \\ &=\hat{b}_0+\hat{b}_1X_1+\hat{b}_2X_2 \end{aligned}$$

其中

$$
\begin{cases}
\hat{b}_1 = \dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_{i1}\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_{i2}^2\right) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_{i2}\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_{i1} x_{i2}\right)}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_{i1}^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_{i2}^2\right) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_{i1} x_{i2}\right)^2} \\
\hat{b}_2 = \dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_{i1}\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_{i1}^2\right) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_{i1}\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_{i1} x_{i2}\right)}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_{i1}^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_{i2}^2\right) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_{i1} x_{i2}\right)} \\
b_0 = \hat{Y} - \hat{b}_1 \overline{X_1} - \hat{b}_2 \overline{X_2}
\end{cases}
\qquad (1-10)
$$

在一般情况下，二元回归模型用式(1—8)、式(1—9)所述的矩阵方法较为方便。

〔**例** 3〕 设收入受 x_1、x_2 的影响，并存在线性关系，资料如表 1—3。求回归预测方程

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$$

表 1—3

序号	y	x_1	x_2	序号	y	x_1	x_2
1	5000	80	9	6	10000	115	14
2	6000	95	8	7	11000	105	15
3	7000	100	10	8	12000	116	13
4	8000	101	10	9	13000	120	16
5	9000	103	11	10	14000	110	17

解：

$$
X^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 80 & 95 & 100 & 101 & 103 & 115 & 105 & 116 & 120 & 110 \\ 9 & 8 & 10 & 10 & 11 & 14 & 15 & 13 & 16 & 17 \end{pmatrix}
$$

$$
X^T X = \begin{pmatrix} 10 & 1045 & 123 \\ 1045 & 110441 & 13106 \\ 123 & 13106 & 1601 \end{pmatrix}
$$

$$(X^TX)^{-1}=\begin{pmatrix} 11.13160227 & -0.13458020 & 0.24589446 \\ -0.13450820 & 0.00194234 & -0.00556712 \\ 0.2458946 & 0.00556712 & 0.02730644 \end{pmatrix}$$

$$X^TY=\begin{pmatrix} 9500 \\ 10202000 \\ 1249000 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \hat{b}=(X^TX)^{-1}X^TY=\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7628.13 \\ 85.04 \\ 669.99 \end{pmatrix}$$

$\hat{Y}=X\hat{b}=-7628.13+85.04X_1+669.99X_2$ 即为所求的回归预测方程。

〔**多元回归系数的显著性检验**〕 多元线性回归模型的回归系数 $b_j(j=1,2,\cdots\cdots k)$ 用来测定其变量保持不变时，自变量 $x_j(j=1,2\cdots\cdots k)$ 与因变量 y 之间的变化关系在一定的显著性水平 α 下，若 b_j 显著地不为 0.说明自变量 x_j 与因变量 y 有较强的线性关系，x_j 的变化能很好地解释 y 的变化。反之，可认为 b_j 与 0 无显著不同，表明回归模型中 x_j 的变化对 y 影响不大，模型用于预测的效率不高。

在多元线性回归预测中，作统计量

$$t(\hat{b}_j)=\frac{\hat{b}_j}{S(\hat{b}_j)}$$

其中，$S(\hat{b}_j)$ 是 $\hat{b}_j$ 的标准差 $j=1,2,\cdots\cdots k$

$$S^2(\hat{b}_j)=S^2C_{jj}=\frac{\sum_{i=1}^{k}e_i^2}{n-k-1}C_{jj}$$

C_{jj} 是矩阵 $(X^TX)^{-1}$ 的主对角线第 $j+1$ 行、$j+1$ 列的元素，$t_{(\hat{b}_j)}\sim t(n-k-1)$。

称 $t(\hat{b}_j)$ 为回归系数 b_j 的 t 值，用 t 值法可检验 X_j 与 Y 的线性关系。其方法如下：

(1)由统计量 $t(\hat{b}_j)=\dfrac{\hat{b}_j}{S(\hat{b}_j)}$，计算其值 $(j=1,2\cdots k)$。