高 等 学 校 试 用 教 材

铸造实验技术

东南大学 王祥生主编

GAO DENG XUE XIAO JIAO CAI

东南大学出版社

高等学校试用教材

铸造实验技术

东南大学　王祥生　主编

东南大学出版社

内 容 提 要

本书根据1983年11月在郑州召开的铸造专业教材分编委扩大会议上审定的大纲编写。全书分三篇、共八章。

第一篇包括第1～3章，是实验技术的基础知识。其内容有误差分析、实验设计和回归分析，着重说明它们的应用方法。第二篇包括第4～7章，是基础实验部分。内容侧重在实验原理、方法的讨论以及实验技能的训练、主要仪器及设备的使用方法。第三篇仅第八章综合实验。在概括前面一般试验研究方法的基础上，按铸造工艺原理、型砂性能控制及铸铁熔炼等方面具体说明三种不同的试验方法。

本书为高等院校铸造专业试用教材，也可供有关单位的工程技术人员参考。

铸 造 实 验 技 术

王祥生　主编

东南大学出版社出版

南京四牌楼2号

江苏省新华书店发行　　南京人民印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/16　印张 16.625　字数 384千字

1990年6月第1版　　1990年6月第1次印刷

印数：1—2000册

ISBN　7—81023—306—5

TH·16　　　　定价：3.30元

前　言

本课程是1982年10月原全国高等工业学校铸造专业教材分编审委员会（现为全国高等工业学校铸造专业教学指导委员会）在杭州修订本科教学计划时新设置的。目的是：保证实践性教学环节，加强基本技能训练，提高科研和实验能力。

本书是根据1983年11月在郑州召开的铸造专业教材分编审委员会扩大会议上审定的大纲编写的。全书设三篇，共八章。

第一篇分为3章，是实验技术的基础知识。其内容有误差分析，实验设计和回归分析。误差及数据处理部分以等精度测量为限，说明直接测量及间接测量方法的误差。回归分析着重说明一元线性回归，在此基础上介绍一元非线性回归、多元线性回归及正交多项式。实验设计介绍正交试验设计及其分析方法。在这一部分中，还说明了相似原理的应用。第二篇分为4章，属基础实验部分。本篇侧重在实验原理和方法的讨论，以及实验技能的训练、主要仪器及设备的工作原理和使用方法。有关实验的目的和要求在概述中说明，各实验都附有“实践和思考”，以期进一步巩固和提高实验效果。第三篇仅第8章综合实验，所选定的实验内容比较系统。本篇概括了试验研究的一般步骤，试验报告的内容，然后结合型砂性能、铸造工艺原理和铸铁及其熔炼三方面，说明三种不同的试验方法。

本书为高等学校铸造专业本科的试用教材，也可供有关技术人员参考。本书所列实验项目多于需要开出的实验数，各校可按各自的条件从中选开。

有些实验所采用的实验方法，迄今尚无标准可循，或实验方法本身有待进一步完善，因而实验结果和可比性将是有条件的。对于这类实验，一般均介绍几个实验方法，以便读者根据具体条件选择比较合适的方法。由于综合实验方面的实践不多，有些测试方法也不够成熟，本书提出的几个方面只是尝试，希望各院校勇于实践，总结经验，丰富和完善这方面的内容。

本书由东南大学王祥生副教授主编，陕西机械学院王贻青教授主审。编写分工为：东南大学王祥生副教授编写第一～三章和第七章的第1～4节；肖瑞梅副教授编写第四章及第八章的第3节；林萍华讲师编写第五章及第八章的第1、2节；沈阳工业大学徐玉桥讲师和陈士梁教授编写第七章的第5节；陕西机械学院王琥副教授编写第六章和第八章的第4、5节。

本书编写过程中，得到了河北工学院、北京钢铁学院、山东工业大学、吉林工业大学、哈尔滨工业大学等院校提供的大量资料。江苏工学院、吉林工业大学、西安交通大学等校许多教师对本书提出了许多宝贵意见。编者在此表示衷心感谢。

由于本书是新教材，内容几乎涉及整个专业，又无现成书籍可供借鉴，加上编者水平有限，书中错误和缺点在所难免，竭诚希望读者批评指正。

编　者

1989年2月

目　　录

第一篇　实验技术的基础知识

第一章　测量误差的基本知识

§1-1　测量方法及测量系统组成

测量就是用专门设备靠试验和计算，对某一事物取得数量概念的认识过程。一般测量实际上是一个比较过程，即将被测的量与同性质的标准量比较，获得被测的量是标准量倍数的数量概念。

测量结果包含两个部分：其一是数值大小及其符号(正、负)；其二是相应的单位。表示测量结果的单位，应该使用法定计量单位。

现以弹簧管压力计测量介质压力为例，进一步说明测量的实质和测量系统的组成。

图1-1为弹簧管压力计的结构。被测的介质压力通过接头7引入弹簧管1，它的另一端是封闭的自由端，在介质压力作用下，弹簧管产生变形，自由端向上方移位，借助连杆2使扇形齿轮4作逆时针转动，与它相啮合的机心齿轮8及其上的指针5作顺时针转动，机心齿轮轴上装有游丝9，在释放介质压力后可使指针复位。连杆、扇形齿轮、中心齿轮及游丝能将弹簧管自由端微小的位移放大为指针较大的角位移，便于和由标准压力计转换成的表面刻度比较，显示出介质压力的数值。

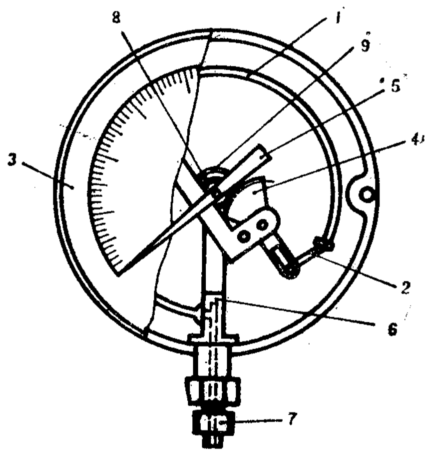

图1-1　弹簧管压力计的结构

1—弹簧管　2—连杆　3—表壳　4—扇形齿轮　5—指针　6—支持器　7—接头　8—机心齿轮　9—游丝

上面的实例说明了一般测量系统应有三个基本元件：感受件、传递件和显示件。

感受件直接与被测对象发生联系，它的作用是感受被测参数的大小，并把它转换成传递件所能接受的信号送出去，如上例的弹簧管。传递件是将感受件发出的信号直接或经放大后传递给显示件，如上例的连杆、扇形齿轮、中心齿轮及游丝等组成的放大件。显示件直接与测量者发生联系，向测量者指出被测参数的数值。

测量系统的每个元件，都有可能引起测量误差。此外，如测量方法不同，则引起的

误差也不同。

测量的方法很多，按如何得到测量结果来分，有直接测量法和间接测量法。

凡由试验数据直接得出测量结果的测量方法称为直接测量，用压力计测量介质压力，温度计测量物体温度等等都属于直接测量。

凡是需利用一定的函数关系，根据直接测量所得数据进行计算，才能得到结果的测量方法，称为间接测量。传动轴功率的测量，是用直接测量法测得转矩和转速后，通过下式计算得到

$$P=\frac{Tn}{9549}$$

式中 P——功率，$[P]$为kW；

T——转矩，$[T]$为N·m；

n——转速，$[n]$为r/min。

§1-2 测量误差的分类

由测量仪表指示并被读出的数据称测量值。由于种种因素，测量值不可能是理论上具有的确定值，即真值，它们之间的差别即为误差。

测量值不是真值，那么测量值的误差或误差范围有多大？它的可靠程度如何？可以采取那些措施来减少误差？要解决这些问题，就需要熟悉测量误差的种类、性质、产生原因及所表现的规律性等方面的知识。

根据误差产生的原因，可将误差分为三类：过失误差、系统误差和随机误差。

1.过失误差 过失误差是由试验过程中的差错引起的，主要由于操作不当、读错数据或计算错误等主观因素，或者由于试验条件突然改变造成的。过失误差的出现一般是偶然的，有误差值大和符号不定的特点。包含过失误差的数据会导致错误的测量结果，应舍弃不用。

2.系统误差 系统误差是一种固定的或变化的误差。根据它的变化规律，又分线性系统误差、周期性系统误差和按复杂规律变化的系统误差。这种误差产生于测量仪表不准、测量方法本身错误以及其他外界因素(温度、电场、磁场等)等。系统误差反映了测量的准确度。系统误差越小，测量结果越准确。

系统误差不能以增加测量次数来减小，应通过事先试验或分析的方法，查明其产生原因和变化规律，从而在测量时采取相应的措施使之减小或消除，或者对测量结果加以修正。

3.随机误差 在测量中，即使已经消除了引起系统误差的一切因素，所测数据仍在末一位或末二位数字上有差别，这种误差就是随机误差。随机误差是由许多无法预测和控制的因素综合影响造成的，所以每次测量的误差大小和符号也无法预测，即具有随机性。但是分析重复多次的测量结果，可以发现它的概率分布服从一定的统计规律。随机误差不能通过试验的方法预先消除或事后修正，但其总体服从统计规律，可以从理论上估计其对测量结果的影响。

随机误差反映了测量的精密度，随机误差小，测量结果的精密度就高。

上述三类误差有时可以互相转化。随着对误差来源及其变化规律的认识的深入，有可能曾归为随机误差的某项，明确为系统误差。反之，当认识不足时，也常把系统误差当作随机误差。

在判定测量数据中所包含的随机误差时，其数字处理方法取决于测量方法。一般说来，对直接测量数据的处理，是根据正态分布规律求出测量结果和它所包含的误差；对间接测量的数据，则应用误差的传递原理计算之。

§1-3 直接测量的误差分析

测量数据中的误差，很多是随机误差，随机误差服从统计规律，可以利用数理统计中阐明的法则去分析直接测量中的随机误差。为此，需引用它的两个常用名词：

总体与个体　总体指所研究对象的全体，组成总体的每个单元就是个体。

样本　随机地从总体中选取一部分个体来代表全体时，所选的个体部分就是样本。

一、测定值的分布规律

(一)频率分布直方图、均值与方差

样本数据常用它的频数、频率分布表、频率直方图或均值与方差来表示其分布规律，现举例说明之。

某钢厂生产一种25MnSi钢，化验了120炉钢中硅的质量分数，所取得的120个数据

表1-1　　频数、频率分布表

组次	组区间	频数统计	频数	组频率	累积频数	累积频率
1	0.635～0.655	丅	2	0.017	2	0.017
2	0.655～0.675	0	0	0	2	0.017
3	0.675～0.695	0	0	0	2	0.017
4	0.695～0.715	丅	2	0.017	4	0.033
5	0.715～0.735	丅	2	0.017	6	0.050
6	0.735～0.755	正下	8	0.067	14	0.117
7	0.755～0.775	正正下	13	0.108	27	0.225
8	0.775～0.795	正正正正下	23	0.192	50	0.417
9	0.795～0.815	正正正正正	24	0.200	74	0.617
10	0.815～0.835	正正正正一	21	0.175	95	0.792
11	0.835～0.855	正正正	14	0.117	109	0.908
12	0.855～0.875	正一	6	0.050	115	0.958
13	0.875～0.895	丅	2	0.017	117	0.975
14	0.895～0.915	丅	2	0.017	119	0.992
15	0.915～0.935	0	0	0	119	0.992
16	0.935～0.955	一	1	0.008	120	1.000

就是一个样本，$n=120$称样本容量。现按硅的质量分数的大小分成16组，统计出分布在各组内的数据个数，这个数据个数称为频数n_i。各组数据的频数与样本容量的比值$f_i=n_i/n$，称f_i为组频率。进而从数据的最小组到最大组计算累加频数和累积频率。将这些数据列成表，就是频数、频率分布表（表1-1）。

为了更直观地表示数据的分布情况，可以画出数据频数或频率分布直方图(图1-2）和累积频率分布图(图1-3）。它们以硅的质量分数为横坐标，与硅的质量分数组的区间相对应的频数或频率和累积频率为纵坐标。

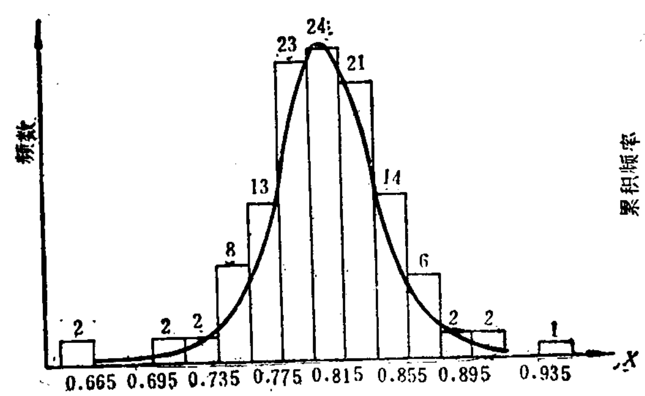

图1-2　频数(频率)分布直方图

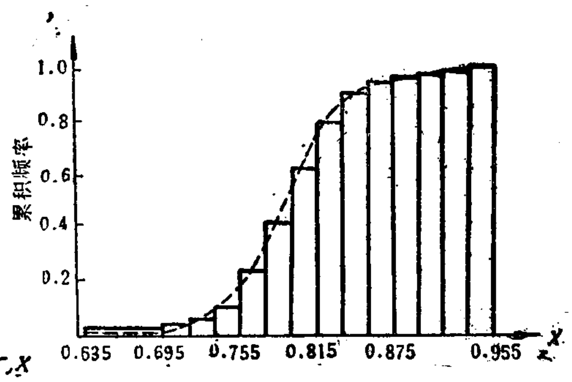

图1-3　累积频率分布图

当不断增加样本容量和组数后，频数(频率)分布图上小长方形的数目，以及这些小长方形顶边形成的曲折次数就不断增加，而每两个折点之间的距离(组距)却不断减小。如样本容量趋于无穷大，那么测量值将连续地充满数轴的某一区间，各组频率接近某一定值，此值即为概率。频率的直方图将变为光滑的曲线，称为分布(概率)密度曲线（如图1-2中黑线)，如果表示成函数，就称分布(概率)密度函数，用$p(x)$表示。对累积频率分布图也一样，样本趋无穷大时，也变成光滑曲线(图1-3中虚线)，称经验分布曲线，表达成函数，就称经验分布函数，用$P(x)$表示。

对不同的测量对象在等精度条件下进行大量试验，通过对测量值的统计和分析，绘制了大量直方图后发现：样本容量足够大时，最终的分布(概率)密度曲线的形状有一个共同的规律，即都有一个落在测量值散布区间中心的峰值，各个分布(概率)密度曲线的差异在于密集程度不同，有的比较集中在中心部分，有的却不集中，数据分散度很大。

为了评定测量数据的密集程度，使用两个常用参数。

1.样本平均值　把样本数据的算术平均值作为样本分布的中心

$$\overline{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \qquad (1\text{-}1)$$

式中，x_1、x_2、……为样本数据。

2.样本方差　样本方差表示为

$$S^2=\frac{1}{n-1}\left[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots\cdots+(x_n-\overline{x})^2\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \tag{1-2}$$

S^2反映了样本数据的分散度，其值越大，表示数据越分散；其值越小，表示数据越集中。

(二)数据总体的正态分布

实践证明，许多试验数据的概率分布遵循正态分布规律。正态分布是连续型随机变量的一种理论分布，根据随机误差的性质，可以推导出正态分布的分布(概率)密度函数为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \tag{1-3}$$

式中 x——试验数据的取值(测量值)；

m——被测量的真值；

σ——正态分布数据的总体标准差。

图1-4是函数$p(x)$的图形，称为正态分布曲线。由式(1-3)可知，只要参数m和σ已知，曲线就可确定。所以m和σ是决定正态分布的两个特征参数。在概率论中，它们都是随机变量的数字特征。m表示随机变量的集中位置，σ则表示随机变量的分散程度，σ越大，数据越分散，如图1-5所示。式(1-3)可简写为：$n(x; m, \sigma)$。其中，n表示正态分布，括号中参数m和σ同主要变量x之间用分号隔开。

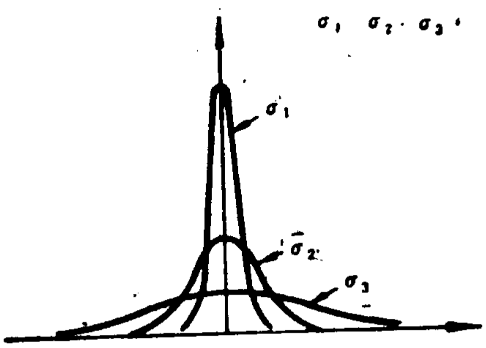

图1-4 正态分布曲线

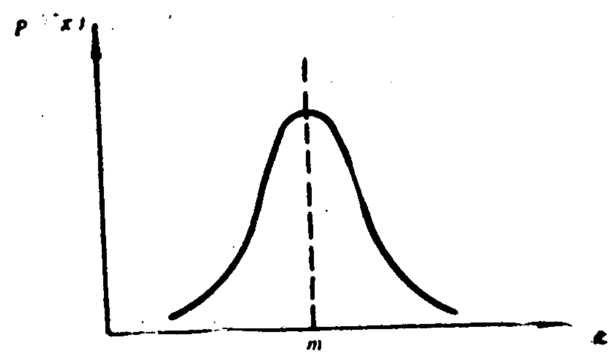

图1-5 σ值对数据分布的影响

正态分布密度函数有如下特性：

1.对称性 对$x=m$处的轴线对称。这说明绝对值相等的正、负误差出现的概率相同；

2.有限性 当$|x-m|\to\infty$时，$p(x)\to 0$。这表明在一定的测量条件下，误差的绝对值不会超过一定界限，即随机误差的值是有限的；

3.分布规律性 当$x-m=0$时，$p(x)$达最大值，而当$|x-m|\to\infty$时，$p(x)\to 0$。表明绝对值小的误差，出现的概率大，而绝对值大的误差，出现的概率小。

(三)正态分布表及其应用

如上所述，正态分布密度函数及其曲线形状和位置，是由其特征参数m和σ所确定的，作为特殊情况，在$m=0$、$\sigma=1$时的函数称为标准正态分布密度函数

$$n(x;\ 0,\ 1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{1-4}$$

将标准正态分布密度函数积分，即获得标准正态分布函数

$$N(x;\ 0,\ 1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u \tag{1-5}$$

上式在误差分析中用处很大，但积分计算很麻烦，为便于利用，已将其制成表，可查阅参考文献[1]、[2]。标准正态分布密度函数和标准正态分布函数的图形见图1-6 a及图1-6 b。

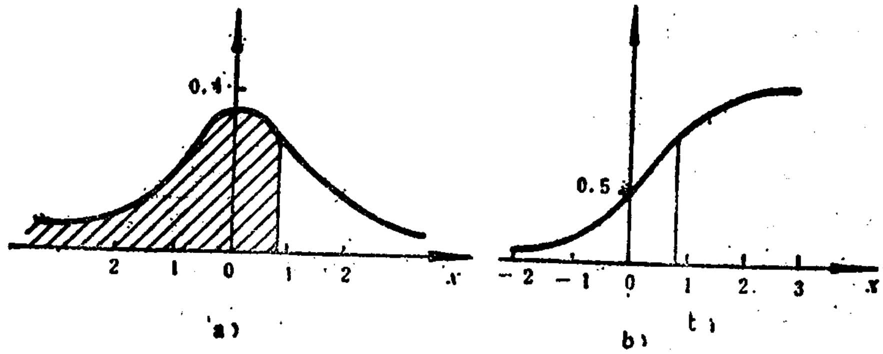

图1-6 标准正态分布密度函数(图a)与标准正态分布函数(图b)

标准正态分布密度函数与标准正态分布函数有如下性质：

1. $n(-x)=n(x)$ 及 $N(-x)=1-N(x)$；

2. $\int_0^x n(u)\mathrm{d}u=N(x)-0.5$， $\int_{-x}^{x}n(u)\mathrm{d}u=2N(x)-1$

这一性质是因密度函数从$-\infty$到$+\infty$的积分为1，加上它的对称性之故。

对于非标准正态分布$n(x;\ m,\ \sigma)$及$N(x;\ m,\ \sigma)$可先将其标准化，然后由标准正态分布表查出函数值，变换式为

$$N(x;\ m,\ \sigma)=N\left(\frac{x-m}{\sigma};\ 0,\ 1\right) \tag{1-6}$$

下面举例说明标准正态分布表的应用。

例1 已知正态变量的分布是$N(x;\ 1,\ 2)$，问$|x|$超过3的可能有多大？

解 对于$|x|>3$，有$|x|>3=x<-3\cup x>3$

即 $P(|x|>3)=P(x<-3\cup x>3)=P(x<-3)+P(x>3)$

因为 $P(x>3)=1-P(x\leqslant 3)$

所以 $P(|x|>3)=P(x<-3)+1-P(x\leqslant 3)$

$$=N(-3;\ 1,\ 2)+1-N(3;\ 1,\ 2)$$

$$=N(-2;\ 0,\ 1)+1-N(1;\ 0,\ 1)$$

$$= 1 - N(2;\ 0,\ 1) + 1 - N(1;\ 0,\ 1)$$

$$= 2 - 0.9772 - 0.8413 = 0.1815$$

例2 设x的分布函数为$N(x;\ m,\ \sigma)$问$x-m$落入区间$[-\sigma,\ \sigma]$、$[-2\sigma,\ 2\sigma]$、$[-3\sigma,\ 3\sigma]$的概率是多少？

解 设给定区间为$[a,\ b]$，落入该区间的概率是

$$P(a<x<b) = F(b) - F(a) = N(b;\ m,\ \sigma) - N(a;\ m,\ \sigma)$$

$$= N\left(\frac{b-m}{\sigma};\ 0,\ 1\right) - N\left(\frac{a-m}{\sigma};\ 0,\ 1\right)$$

对于区间，$[-\sigma,\ \sigma]$，有

$$P(-\sigma<x<\sigma) = N(1;\ 0,\ 1) - N(-1;\ 0,\ 1)$$

$$= 2N(1;\ 0,\ 1) - 1 = 0.6826$$

同理，对于$[-2\sigma,\ 2\sigma]$及$[-3\sigma,\ 3\sigma]$，分别为

$$P(-2\sigma<x<2\sigma) = 2N(2;\ 0,\ 1) - 1 = 0.9544$$

及 $$P(-3\sigma<x<3\sigma) = 2N(3;\ 0,\ 1) - 1 = 0.9974$$

二、总体特征参数的估计值

上面说明了测定值的分布是遵循正态分布规律的。正态分布密度函数的特征参数为m和σ，这是样本容量无穷大时的理论值。由于测量次数总是有限的，所以必须了解通过有限次的测量，估计被测量的真值及误差范围的方法。

由数理统计中的统计估计法得知：在样本容量足够大时($n>30$)，就可以通过样本参数来估计总体参数，样本的算术平均值可代表总体的平均值，而样本的方差可以代表总体方差。

用样本算术平均值作为总体平均值时会有偏差，这个偏差可以用区间估计法估计。

所谓区间估计，是估计总体某一特征参数以多大概率包含在某一数值区间内。该数值区间称为置信区间。置信区间包含总体特征参数的概率称置信度。

区间估计有两种情况。

(一)已知总体标准差σ，对m进行区间估计

当总体呈正态分布时，样本特征值也是正态分布，即$\overline{x}$属正态分布，如总体标准差为σ，则在某一概率下的变量取值范围

$$Z = \frac{\overline{x} - m}{\sigma/\sqrt{n}}$$

也服从正态分布。式中n为样本容量。查标准正态分布表可知

$$P\{|Z| \leqslant 1.96\} = 0.95$$

这就是说，$|Z| \leqslant 1.96$的概率是0.95。换句话说，有95%的把握保证参数m在

$$\bar{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<m<\bar{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

范围内，就称$[\bar{x}-1.96\sigma/\sqrt{n},\ \bar{x}+1.96\sigma/\sqrt{n}]$为置信区间，95%就是置信度。而把$\alpha=1-0.95=0.05$称作危险率。实际测定中，往往是给定置信度后求置信区间。

用更一般的语言表达，就是：设$x_1, x_2\cdots, x_n$为总体$N(x; m, \sigma)$的一个样本，$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$是$m$的一个点估计①，对于给定的置信度$100(1-\alpha)\%$有

$$\left(\bar{x}-Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\quad \bar{x}+Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \tag{1-7}$$

现举例说明寻求置信区间的方法。

例 3 用热电高温计重复测得 5 次的温度值为：1250℃、1265℃、1245℃、1260℃、1275℃。已知总体标准差$\sigma=16$℃，求真实温度的置信区间。

解 先求 5 次测量的平均值

$$\bar{x}=\frac{1}{5}(1250+1265+1245+1260+1275)=1259$$

这是温度值的点估计。设置信度为0.95，按标准正态分布表及用例 2 的方法算得$Z=1.96$，则$Z(\sigma/\sqrt{n})=1.96\times(16/\sqrt{5})=14.0$，即

$$P\{\bar{x}-14.0<m<\bar{x}+14.0\}=0.95$$

$$P\{1245<m<1273\}=0.95$$

所以，m的95%的置信区间为(1245℃，1273℃)。

(二)σ未知时，求m的置信区间

实际问题中σ经常是未知数，在样本容量很小(重复测量次数较少)的情况下，如用样本标准差S代替总体标准差σ，就需考虑一个取决于样本容量n的统计量t的分布，即所谓t分布，此时

$$P\left\{\left|\frac{\bar{x}-m}{S/\sqrt{n}}\right|\leqslant t_\alpha(n-1)\right\}=1-\alpha$$

即总体平均值m的$100(1-\alpha)\%$的置信区间为

$$\bar{x}-t_\alpha(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}<m<\bar{x}+t_\alpha(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} \tag{1-8}$$

$t_\alpha(n-1)$可从t分布表(参考文献[1]、[2])查得。现举例说明之。

例 4 例 3 中如σ未知，求真实温度的置信区间。

解 $n=5$，$\bar{x}=1259$℃

① 所谓点估计，就是用一个统计量的值作为总体某一特征参数的估计值。

$$S^2=\frac{1}{5-1}[(1250-1259)^2+(1265-1259)^2+(1245-1259)^2$$

$$+(1260-1259)^2+(1275-1259)^2]=570/4$$

$$\sqrt{\frac{S^2}{n}}=\sqrt{\frac{570}{4\times 5}}=5.34$$

查 t 分布表，在 $n-1=4$ 时，$t=2.776(\alpha=0.05)$，故

$$t_{0.05}\frac{S}{\sqrt{n}}=2.776\times 5.34=14.8$$

$$\overline{x}-t_{0.05}\frac{S}{\sqrt{n}}=1259-14.8=1244.2$$

$$\overline{x}+t_{0.05}\frac{S}{\sqrt{n}}=1259+14.8=1273.8$$

于是，得真实温度的置信度为0.95的置信区间为[1244.2℃，1273.8℃]。较例 3 略宽，因样本容量小，按 t 分布算得的结果更可靠。

三、测量结果的表示方法

测量结果可表示为在一定置信度下，以样本的平均值为中心，以置信区间的半长为界的一个范围。这个范围是由测量数据的误差及测量次数所决定。由于置信度不同，测量数据的误差通常有以下几种表示方法。

(一)标准误差

标准误差 σ 指的是总体参数，它反映了测量的精密度。

如例 2，随机误差不大于 $\pm\sigma$ 的置信度为0.683，也即置信度为0.683时，对应的置信区间为[$-\sigma$，σ]。σ 本身反映了测量的精密度，所以在上述置信度下，精密度高的测量置，信区间就较小。

在正态密度分布曲线上，σ 刚好是曲线拐点的横坐标，它对其中较大误差或较小误差的反映比较灵敏，所以是表示精密度的较好方法。

(二)平均误差

平均误差 δ 是测量值全部随机误差绝对值的算术平均值

$$\delta=\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i-m|}{n}$$

对于连续型随机变量，δ 值就是各测量值随机误差绝对值的数学期望，将这一定义代入正态分布函数，即得

$$\delta=\int_{-\infty}^{+\infty}|x-m|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}=0.7979\sigma$$

(1-9)

而在 $\delta = x - m = \pm 0.7979\sigma$ 时的置信度为 $2N(0.7979;\ 0,\ 1) - 1 = 0.574$。从几何图形看，$\delta$ 刚好是正态分布密度曲线左半边或右半边面积重心的横坐标(图1-7)。

(三)或然误差

或然误差 γ 是指一组测量中对应于置信度 $1-\alpha$ 为50%时的置信区间。换句话说，在一组测量中，随机误差绝对值大于 γ 和小于 γ 的测量次数各占一半，即 $N(x;\ m,\ \sigma) = 0.50$，而

$$\gamma = x - m$$

所以

$$P\left[-\frac{\gamma}{\sigma},\ \frac{\gamma}{\sigma}\right] = 2N\left(\frac{\gamma}{\sigma};\ 0,\ 1\right) - 1 = 0.50,$$

$$N\left(\frac{\gamma}{\sigma};\ 0,\ 1\right) = 0.75$$

查表得

$$\gamma/\sigma = 0.6745,\quad \gamma = 0.6745\sigma \tag{1-10}$$

或然误差的几何意义见图1-7。

(四)极限误差

极限误差 δ_m 又称最大可能误差，定义极限误差 δ_m 的范围为标准误差的3倍，即

$$\delta_m = 3\sigma \tag{1-11}$$

由例2，对应于置信区间 $[-3\sigma, 3\sigma]$ 的置信度为99.7%，即真值落在 $\pm 3\sigma$ 范围内的概率已接近100%，误差超过这个范围的可能性非常小。

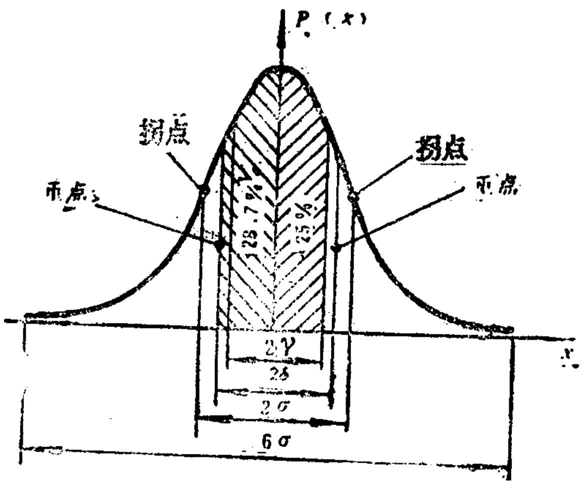

图1-7 各种误差与标准误差的关系

(五)相对误差

上面提到的误差表示方法，都是反映误差绝对值的大小。实际测量中，往往在测量值大时，误差绝对值也大，这就不便于相互比较。因此，常用绝对误差和某一约定值的比值，即相对误差来表示。定义

$$\varDelta_\sigma = \frac{\sigma}{m};\quad \varDelta_\gamma = \frac{\gamma}{m};\quad \varDelta_\delta = \frac{\delta}{m},\quad \varDelta_{3\sigma} = \frac{3\sigma}{m}$$

为标准相对误差、或然相对误差、平均相对误差和最大相对误差。约定值可根据需要取被测量的实际值、仪器的示值和仪器的满刻度值，与此相应的相对误差分别称实际相对误差、标准相对误差和引用相对误差。

综上所述，一般直接测量结果有以下几种表达方式：

1. 当不需要指出误差时，可直接用测量数据的平均值 $\overline{x}$ 来表示；

2. 当需要指出最大误差时

$$m = \overline{x} \pm 3S/\sqrt{n}$$