天骄之路大学系列

高等数学

北京大学数学科学学院
周民强教授　主编

学习辅导

上

北京邮电大学出版社

高等数学学习辅导

（上册）

周民强　主编

北京邮电大学出版社

内 容 提 要

本书是根据教育部最新颁布的全国工科院校高等数学教学大纲的要求编写的，也是编者多年来在北京大学教学、辅导工作的结晶，旨在帮助学生吃透教材的重点和难点，巩固基础知识，并形成数学各种应用能力的突破。

本书可作为工科大学生、电大、职大、民办大学学员、自学高等数学者学习高等数学时的辅导教材，也可供从事工科高等数学教学的教师、非数学专业的研究生及中学数学教师参考。

本丛书封面均贴有“天骄之路系列用书”激光防伪标志，凡无此标志者为非法出版物。盗版书刊因错漏百出、印制粗糙，对读者会造成身心侵害和知识上的误解，希望广大读者不要购买。盗版举报电话：(010)62755320。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习辅导/周民强主编 —北京：北京邮电大学出版社，1999.10
ISBN 7-5635-0401-X

Ⅰ.高…　Ⅱ.周…　Ⅲ.高等数学-教学参考资料　Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第62353号

北京邮电大学出版社出版发行
(北京市海淀区西土城路10号)
(邮政编码100876)
各地新华书店经售
中国农业出版社印刷厂印刷

850毫米×1168毫米　32开本　13.875印张　600千字
1999年10月第1版　1999年10月第1次印刷

全套定价：30.00元　本册定价：15.00元

编写说明

经各家名师的苦心构思和精心编写，各位编辑的层层推敲和点点把关，一套与高等数学最新现行教材同步配套的新型教学辅导书与全国广大大学生和教师见面了。

本书是通过对基础知识的巩固、重难点的剖析、例题的分析、讲解、提问、小结等方式提供辅导的。例题、习题的选择均符合全国工科院校高等数学课程教学的基本要求。因此，不管读者使用什么样的工科类教材，都能使用此书。

该书编写思路与众不同，它博采众长，匠心独运，有的放矢，注重实效，它融入了近几年高等数学教学科研最新成果，体现90年代以来教学改革的最新特点，遵循教、学、练、考的整体原则，每一单元结构均设计成"基础知识导学"、"重点难点突破"、"解题技巧导引"、"同步强化训练"、"能力提高测试"、"参考答案提示"六大板块。

基础知识导学主要抓住教材内容中的知识要点、考点，概括和阐述力求精练、解释清晰、视角广阔；

重点难点透视对部分内容繁杂的"重点"、"难点"、"误点"进行整理和提炼，做到举一反三，触类旁通；

解题技巧导引注重启发性和培育兴趣原则，讲究"题眼"布局，有助于形成正确的解题思路，把握解题技巧；

同步强化训练精心设计题型，不搞题海战术，务求实效性、典型性和启发性，意在培养学生的学科思想与悟性；

能力提高测试供有实力和时间的读者使用，所选习题有一定程度的拔高，以提高对学科知识点、规律性的整体掌握水平，以及灵活运用知识的学科能力；

参考答案提示对同步强化训练中的大部分习题及能力提高测试中的每个习题，其答案中均附有解题提示或分析，大大提高了资料的利用率及效果。

这套丛书是由多年工作在教学第一线的北京大学数学科学学院的教授编写的。他们不但精熟自己所执教的学科内容，善于精析教材中的重点和难点，而且对高等数学有过深入的研究。

读者在使用本书时，我们建议先看一下每节的基础知识导学部分及例题分析的题目，自己想一想，动手算一算，然后再去看例题分析，这样帮助会大些。

需要说明的是，为照顾广大学生的实际购买能力，使他们能在相同价位、相同篇幅内能汲取到比其它书籍更多的营养，本书采用了小五号字和紧缩式排版，如有阅读上的不便，请谅解。

检验本丛书质量的唯一标准是广大师生使用本书的实践，作为教研领域的最新成果，我们期盼它的社会效益，也诚挚地希望广大师生的批评指正。读者对本书如有意见及建议，请来信寄至：(100080)北京大学燕园教育培训中心大厦 1408 室 天骄之路大学系列丛书编委会收。相信您一定会得到满意的答复。

本丛书在编写过程中，得到了北京邮电大学出版社有关领导的大力支持，丛书的统稿及审校工作得到了北京大学有关专家教授的协助和热情支持，在此一并谨致谢忱。

编　者

1999 年 10 月于北京大学燕园

目　　录

第一章 函数

§1 预备知识

〔基础知识导学〕

1. 区间及其各种表示法

满足不等式 $a<x<b$ 的一切实数 x 的全体叫做开区间. 记作 (a,b).

满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的一切实数 x 的全体叫做闭区间, 记作 $[a,b]$.

满足不等式 $a\leqslant x<b$ 或 $a<x\leqslant b$ 的一切实数 x 的全体叫做半开区间, 记作 $[a,b)$, 或 $(a,b]$.

记号 $(-\infty,+\infty)$ 表示全体实数, 可写为 $-\infty<x<+\infty$.

记号 $(a,+\infty)$ 表示大于 a 的全体实数, 可写为 $a<x<+\infty$. 同样可以规定 $(-\infty,a)$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,a]$ 等记号的含义.

满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的一切实数 x 的全体叫点 a 的 δ 邻域.

2. 绝对值及其性质

(1)绝对值定义

$$|x|=\begin{cases} x, 当\ x\geqslant 0 时, \\ -x, 当\ x<0 时. \end{cases}$$

(2)绝对值的四则运算

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|,$$
$$|a\cdot b|=|a|\cdot|b|,$$
$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}.$$

(3)若 $|x|<\varepsilon$, 则 $-\varepsilon<x<\varepsilon$, 反之也对.

〔重点难点突破〕

本节的重点是不等式 $|ax+b|>c$, $|ax+b|<c$ $(c>0)$ 的解法. 一般地, 不等式 $|ax+b|<c$ 或 $|ax+b|>c$ $(c>0)$ 的解法是把其转化成与它同解的不含绝对值符号的一次不等式. 转化的依据是不等式 $|x|<a$ $(a>0)$ 与 $-a<x<a$ 同解; 不等式 $|x|>a$ $(a>0)$ 与 $x<-a$ 或 $x>a$ 同解. 转化的手段是

换元法,即把 $ax+b$ 看成一个整体,这就可把不等式 $|ax+b|<c \quad (c>0)$ 转化成 $-c<ax+b<c$ 求解;而把不等式 $|ax+b|>c \quad (c>0)$ 转化成 $ax+b<-c$ 或 $ax+b>c$ 求解.进而可以发现不论绝对值符号内是什么样的代数式,只要是上述两种形式的不等式,都可用此种方法把它转化成不含绝对值的不等式.在研究 $|ax+b|\geqslant c \quad (c>0)$ 或 $|ax+b|\leqslant c \quad (c>0)$ 的解集时,实际上是 $|ax+b|>c$ 的解集与 $|ax+b|=c$ 的解集的并集,或 $|ax+b|<c$ 的解集与 $|ax+b|=c$ 的解集的并集.

〔解题方法导引〕

【例1】 将带有绝对值的不等式 $|2x-3|<1$ 化为不带绝对值的不等式.

解答 根据绝对值不等式性质(3),由

$$|2x-3|<1,$$

$$\text{有}\ -1<2x-3<1,$$

即

$$2<2x<4,$$

所以不带绝对值的不等式为

$$1<x<2.$$

它的图形表示是在数轴上 $x=1$ 与 $x=2$ 两点之间的一线段,但不包括 $x=1$ 和 $x=2$ 两个端点.

【例2】 将不等式 $-10<x<5$ 豢为带有绝对值的不等式,即表成 $|x-x_0|<\delta$ 的形式.

分析 先找出区间 $(-10,5)$ 的中点,再求出区间长度的一半,即可化为带有绝对值的不等式.

解答 设区间中点为 x_0,区间长度为 l,则

$$x_0=\frac{5+(-10)}{2}=-\frac{5}{2},$$

$$\delta=\frac{l}{2}=\frac{5-(-10)}{2}=\frac{15}{2},$$

所以带绝对值的不等式为

$$\left|x+\frac{5}{2}\right|<\frac{15}{2}.$$

它叫点 x_0 的 $l/2$ 邻域,其中 $x_0=-5/2, l=15$.

【例3】 解下列不等式:

(1) $x^2+2x-3\geqslant 0$; (2) $|2x-1|+|x+1|\leqslant 12$;

(3) $|x^2-4|\leqslant 1$.

解答 (1)方法一 将原式左边因式分解后可化为

$$(x+3)(x-1)\geqslant 0,$$

这个不等式相当于下列两个不等式组

$$\begin{cases}x+3\geqslant 0\\x-1\geqslant 0\end{cases}\quad 或 \quad \begin{cases}x+3\leqslant 0\\x-1\leqslant 0\end{cases}$$

它们的解分别是 $x\geqslant 1$ 和 $x\leqslant -3$，所以原不等式的解为

$$(-\infty,-3]\cup[1,+\infty).$$

方法二

分析 将不等式左边因式分解后，可以看出，只有当变量 x 通过 $x=1$ 和 $x=-3$ 时，不等式的左边才会改变正负号，其它的点均不会改变其正负号，因此我们只要讨论在三个区间 $(-\infty,-3]$，$[-3,1]$，$[1,+\infty)$ 上上述不等式是否成立就行了.

令 $f(x)=(x+3)(x-1)$.

当 $-\infty<x\leqslant -3$ 时，因 $(x+3)\leqslant 0$，$(x-1)<0$，所以 $f(x)\geqslant 0$；当 $-3\leqslant x\leqslant 1$ 时，因 $(x+3)\geqslant 0$，$(x-1)\leqslant 0$，所以 $f(x)\leqslant 0$，当 $1\leqslant x<+\infty$ 时，因 $(x+3)>0$，$(x-1)\geqslant 0$，所以 $f(x)\geqslant 0$，综合上述，原不等式的解为

$$(-\infty,-3]\cup[1,+\infty).$$

(2)**分析** 先要去掉绝对值. 由于 $x=-1$ 的两侧 $(x+1)$ 会变号，在 $x=\frac{1}{2}$ 的两侧 $(2x-1)$ 会变号，所以应该分三个区间：

$$(-\infty,-1],\left[-1,\frac{1}{2}\right],\left[\frac{1}{2},+\infty\right]$$

分别来讨论.

①设 $-\infty<x\leqslant -1$，则所给的不等式可化为

$$-2x+1-x-1\leqslant 12,$$

即

$$x\geqslant -4$$

所以在 $(-\infty,-1]$ 上的解为 $-4\leqslant x\leqslant -1$.

②设 $-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$，则所给的不等式可化为

$$-2x+1+x+1\leqslant 12,$$

即

$$x\geqslant -10.$$

所以在 $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$ 上的解为 $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$.

③设 $\frac{1}{2}\leqslant x<+\infty$，则所给的不等式可化为

$$2x-1+x+1\leqslant 12,$$

即

$$x\leqslant 4.$$

所以在$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$上的解为$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 4$.

综合上述讨论,原不等式的解为

$$-4\leqslant x\leqslant 4.$$

小结 解含有绝对值的不等式时,通常应找出每个绝对值式子的零值点,这些零值点把所考虑的范围分成了若干个区间,然后分别讨论这些区间上不等式的解,就可解得不等式.

(3)**分析** 找出绝对值式子的零值点 $x=\pm 2$,由于在 $x=\pm 2$ 的两侧(x^2-4)变号,所以应分三个区间$(-\infty,-2]$,$[-2,2]$,$[2,+\infty)$分别讨论.

①设$-\infty<x\leqslant -2$,则所给的不等式可化为

$$x^2-4\leqslant 1,$$

即

$$(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})\leqslant 0,$$

解得

$$-\sqrt{5}\leqslant x\leqslant\sqrt{5},$$

所以在$(-\infty,-2]$上的解为

$$-\sqrt{5}\leqslant x\leqslant -2$$

②设$-2\leqslant x\leqslant 2$,则所给的不等式可化为

$$-x^2+4\leqslant 1,$$

即

$$(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)\leqslant 0,$$

解得

$$(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty),$$

所以在$[-2,2]$上的解为

$$[-2,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},2].$$

③类似①的讨论,在$[2,+\infty)$上的解为

$$2\leqslant x\leqslant\sqrt{5}$$

综合上述讨论,原不等式的解为

$$[-\sqrt{5},-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},\sqrt{5}].$$

这里我们要提醒大家,解不等式$-3+x^2\leqslant 0$时,下述的做法是错误的:

$$x\ -3\leqslant 0$$

即

$$x^2\leqslant 3$$

解得

$$x\leqslant\pm\sqrt{3}$$

【例 4】 解不等式$|3-2x|<3$

解答 由原不等式可得

$$-3<3-2x<3,$$

各加-3,得

$$-6<-2x<0,$$

各除以-2,得

$$3 > x > 0,$$

所以原不等式的解集是

$$\{x \mid 0 < x < 3\}.$$

评析 本题在解法过程易出错误的地方是在不等式各边除以 -2 时，容易忽视不等号需要改变方向.为避免这一错误出现，注意到 $|3-2x| = |2x-3|$，可把不等式改写成 $|2x-3| < 3$，再去求解，这样就可避免上述错误的产生.

【例 5】 解不等式

(1) $x^2 > 3$　　　　(2) $x^2 < 4$

解答 (1)原不等式变形为

$$x^2 - 3 > 0$$

所以 $\triangle > 0$，方程 $x^2 - 3 = 0$ 的解是

$$x_1 = \sqrt{3}, \qquad x_2 = -\sqrt{3}$$

所以原不等式的解集是

$$\{x \mid x < -\sqrt{3} \text{ 或 } x > \sqrt{3}\}$$

(2)原不等式变形为

$$x^2 - 4 < 0$$

所以 $\triangle > 0$，方程 $x^2 - 4 = 0$ 的解是

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = -2$$

所以原不等式的解集是

$$\{x \mid -2 < x < 2\}$$

评析 本题是简单二次不等式，但是由于简单，在解法上容易受以往解二次方程的影响，简单地用开方法处理，导致错误.即把 $x^2 > 3$ 的解写成 $x > \pm\sqrt{3}$；把 $x^2 < 4$ 的解写成 $x < \pm 2$.因而注意解法的规范是避免这一错误的根本措施.

〔同步强化训练〕

一、选择题

1.不等式 $|3-x| < 2$ 的解集是　　( )

(A) $\{x \mid x > 5 \text{ 或 } x < 1\}$　　(B) $\{x \mid 1 < x < 5\}$

(C) $\{x \mid -5 < x < -1\}$　　(D) $\{x \mid x > 1\}$

2.不等式 $3|2x+1| - 1 > 5$ 的解集是　　( )

(A) $\left\{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > \frac{1}{2}\right\}$　　(B) $\left\{x \mid -1 < x < \frac{1}{2}\right\}$

(C) $\left\{x \mid x < -\frac{1}{2} \text{ 或 } x > 1\right\}$　　(D) $\left\{x \mid x > \frac{1}{2}\right\}$

3. 不等式 $1 \leqslant |2x-7| < 3$ 的解集是　　　　( )

(A) $\{x|4 \leqslant x < 5\}$　　(B) $\{x|x \geqslant 4$ 或 $x \leqslant 5\}$

(C) $\{x|2 < x \leqslant 3$ 或 $4 \leqslant x < 5\}$　　(D) $\{x|x \leqslant 3$ 或 $x > 2\}$

4. 不等式 $2x+3-x^2>0$ 的解集是　　　　( )

(A) $\{x|-1<x<3\}$　　(B) $\{x|x>3$ 或 $x<-1\}$

(C) $\{x|-3<x<1\}$　　(D) $\{x|x>1$ 或 $x<-3\}$

5. 若 $A=\{x|x>4\}$, $B=\{x|x<-3\}$, $C=\{x|x<4\}$, $D=\{x|x>-3\}$, $E=\{x|x^2-x-12>0\}$, 则 E 等于　　　　( )

(A) $A\cup B$　　(B) $A\cap B$

(C) $C\cup D$　　(D) $C\cap D$

6. 二次不等式 $ax^2+bx+c\leqslant 0$ 的解集是全体实数的条件是　　　　( )

(A) $\begin{cases} a>0 \\ \triangle<0 \end{cases}$　　(B) $\begin{cases} a>0 \\ \triangle\leqslant 0 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} a<0 \\ \triangle<0 \end{cases}$　　(D) $\begin{cases} a<0 \\ \triangle\leqslant 0 \end{cases}$

7. 设 $Q=\{x|x^2-4x+3<0\}$, $R=\{x|x(x-1)>2\}$, 则 $Q\cap R$ 为　　　　( )

(A) $\{x|x>3\}$　　(B) $\{x|-1<x<2\}$

(C) $\{x|2<x<3\}$　　(D) $\{x|1<x<2\}$

8. 设 $S=\{x|-x<0\}$, $T=\{x|-x^2<0\}$ 则 $S\cap T$ 为　　　　( )

(A) $\{x|x>0\}$　　(B) R

(C) $\{x|x\leqslant 0\}$　　(D) $\{x|x<0\}$

9. 已知 $M=\{x|x^2>4\}$, $N=\{x|x<3\}$, 下列结论中正确的是　　　　( )

(A) $M\cup N=\{x|x^2>4\}$　　(B) $M\cap N=\{x|2<x<3\}$

(C) $M\cap N=\{x|x<-2\}$　　(D) $M\cup N=R$

10. 不等式 $x^2-3ax+2a^2<0$ $(a<0)$的解集是　　　　( )

(A) $\{x|a<x<2a\}$　　(B) $\{x|2a<x<a\}$

(C) $\{x|x<a$ 或 $x>2a\}$　　(D) $\{x|x<2a$ 或 $x>a\}$

二、填空题

11. 已知 $A=\{x|x^2\geqslant 4\}$, $B=\{x|x^2-3\leqslant 0\}$, 则 $A\cap B$ ________; $A\cup B=$ ________.

12. $-1<\dfrac{2|x|-1}{3}$的解集是________.

13. 若 $|x-1|<3$, 化简 $|x-4|+|x+2|$ 得________.

14. 不等式 $-2x^2+x+3<0$ 的解集是________

15. 不等式 $2x^2-x+\dfrac{1}{4}>0$ 的解集是________.

16. 方程组$\begin{cases} xy=6 \\ x+y=k \end{cases}$有实数解，则 k 的取值范围是________.

17. 设全集 $I=R$，集合 $A=\{x\mid x^2-x-6<0\}$，$B=\{x\mid x^2+2x-8\geqslant 0\}$，则 $A\cap B=$________，$\overline{A}\cap\overline{B}=$________.

18. 若不等式 $ax^2+ax-1<0$ 在 R 上恒成立，则 a 的取值范围是________.

19. 已知不等式 $x^2+px+q<0$ 的解集是$\{x\mid -3<x<2\}$，则 $p=$________，$q=$________.

20. 不等式 $x^2+bx+\frac{b}{2}>0$ 恒成立，则 b 的取值范围是________.

解答题

21. 解不等式

$$\frac{|x+1|+7}{1+|x+1|}<3$$

22. 解不等式

$$1\leqslant|x-1|\leqslant 2$$

23. 不等式 $x^2-2ax>-3x-a^2$ 对任意 $x\in R$ 均成立，求 a 的取值范围.

24. 已知不等式 $kx^2-2x+6k<0$，$(k\neq 0)$

(1)若不等式的解集是$\{x\mid x<-3$ 或 $x>-2\}$，求 k 的值；

(2)若不等式的解集是$\{x\mid x\in R$ 且 $x\neq\frac{1}{k}\}$，求 k 的值.

25. 方程 $x^2-2(m-1)x+m^2-4=0$ 的两根异号，求 m 的取值范围.

〔参考答案提示〕

一、选择题

(1) B (2) A (3) C (4) A (5) A

(6) D (7) C (8) A (9) D (10) B

二、填空题

11. $\varnothing$; $\{x\mid x\leqslant -2$ 或 $-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$ 或 $x\geqslant 2\}$

12. R 13. 6

14. $\{x\mid x<-1$ 或 $x>\frac{3}{2}\}$ 15. R

16. $k\leqslant -2\sqrt{6}$ 或 $k\geqslant 2\sqrt{6}$

17. $\{x\mid 2<x<3\}$ 18. $-4<a\leqslant 0$

19. 1; -6 20. $0<b<2$.

三、解答题

21. 因为 $1+|x+1|>0$,所以原不等式变形为

$$|x+1|+7<3+3|x+1|,\ |x+1|>2,$$

由此解得 $\{x|x<-3 \text{ 或 } x>1\}$.

22. 由 $\begin{cases}|x-1|\geqslant 1\\|x-1|\leqslant 2\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x\leqslant 0 \text{ 或 } x\geqslant 2\\-1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$,所以原不等式的解集是

$$\{x|-1\leqslant x\leqslant 0 \quad \text{或} \quad 2\leqslant x\leqslant 3\}.$$

23. 原不等式变形为 $x^2-(2a-3)x+a^2>0$,由于解集为 R,所以 $\triangle=(2a-3)^2-4a^2<0$,解得 $a>\frac{3}{4}$.

24. (1)由已知 $k<0$,且 $-3-2=\frac{2}{k}$,所以 $k=-\frac{2}{5}$.

(2)由已知有二次函数 $y=kx^2-2x+6k$ 开口向下,且方程 $kx^2-2x+6k=0$ 有两个相等实根为 $\frac{1}{k}$,所以

$$k<0 \text{ 且 } \triangle=(-2)^2-4k\cdot 6k=0,$$

解得 $k=-\frac{\sqrt{6}}{6}$.

经检验 $k=-\frac{\sqrt{6}}{6}$ 满足题意.

25. 由已知有 $\triangle=4(m-1)^2-4(m^2-4)\geqslant 0$ 且 $m^2-4<0$,由此分别解得 $m\leqslant\frac{5}{2}$ 且 $-2<m<2$. 故 $-2<m<2$.

§2 函数的概念

〔基础知识导学〕

1.函数的概念

(1)函数的定义

设D是一个给定的数集,f是一个确定的对应关系.如果对于D中的每一个元素x,通过f都有R内的唯一确定的一个元素y与之对应,那么这个关系f就叫做从D到R的**函数关系**,,简称为**函数**,记为

$$f:\mathrm{D}\rightarrow\mathrm{R}\quad 或\quad f(x)=y.$$

我们把按照函数f对$x\in\mathrm{D}$所对应的$y\in\mathrm{R}$叫做f在x上的**函数值**,记作$y=f(x)$.并把D叫做函数f的**定义域**,而f的全体函数值的集合

$$\{f(x)\mid x\in\mathrm{D}\}$$

叫做函数f的**值域**,通常用y来表示,即

$$y=\{f(x)\mid x\in\mathrm{D}\}$$

有时为简明起见,我们把f的定义域、值域分别记为$\mathrm{D}_f,\mathrm{R}_f$.

今后我们把函数用

$$y=f(x),\quad x\in\mathrm{D}$$

来表示.并说y是x的函数,其中x中做**自变量**,y叫做**因变量**.

(2)函数的表示法

函数的表示方法有:公式法、表格法和图示法.

(3)分段函数

由两个或两个以上的分析表达式表示的函数,称为**分段函数**.

(4)反函数定义

设函数$y=f(x)$,当变量x在一个区域A内变化时,变量y在区域B内变化,如果对于变量y在区域B内任取一个值y_0,变量x在区域A内有x_0,使$y_0=f(x_0)$,则变量x是变量y的函数,用$x=\varphi(y)$表示,函数$x=\varphi(y)$称为函数$y=f(x)$的反函数.

〔重点难点突破〕

1.关于函数概念

(1)在理解函数的定义时抓住:

①定义域:自变量的变化范围 D;

②对应规律:因变量与自变量的对应规律(对应法则或对应关系)f;

③值域:因变量的取值范围 Y.

因为③是随着①、②的确定而完全确定,所以说定义域和对应规律是确定函数的两要素.例如,$f(x)=\sqrt{x-5}+\sqrt{3-x}$,由于定义域是空集,因此它不表示函数关系.至于对应规律 f,一般要求一个 x 值有唯一确定的 y 值与之对应,如果有两个或两以上的 y 值与 x 对应,这是多值函数.而我们讨论的是单值函数,因此强调给一个 x 只有一个 y 值与之对应.但是并没有要求一个 y 值只与一个 x 值相对应.例如,$y=x^2$ 与 $y=4$ 相对应的 x 值有 $x_1=2,x_2=-2$ 两个值.又如,$y=\sin^2x+\cos^2x$,对于 $x\in(-\infty,+\infty)$都只对应于1,这些都是可以的,都满足函数定义的要求.

(2)由上述可知:要判断两个函数是相等的,它们必须满足以下条件:

①两个函数的定义域相同;

②对于定义域内的每一个值,两函数都有相同的函数值与之对应.

这两条只要有一条不满足,两个函数就是不同的函数.

例如,$\ln x^2$ 与 $2\ln x$ 不是相同的函数,因为 $\ln x^2$ 的定义域是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,而 $2\ln x$ 的定义域是$(0,+\infty)$.而 $a=\sqrt{b}$ 与 $y=\sqrt{x}$ 却是两个相同的函数,尽管两者自变量字母不一样,因变量字母也不相同,但两者的定义域都是非负实数集合$[0,+\infty)$,两者的对应规律也一样,都是对自变量取算术平方根.

(3)在函数的定义域中,对表示函数的方式没有任何限制.因此,不要认为函数就是分析式子,式子只是表示函数的一种主要形式,表示函数关系还可以用列表、图形、语句等其他形式.而且,即使采用分析式子来表示函数,也不是非得用一个式子不可,可以用两个或多个式子表示一个函数,即分段函数.

(4)要注意 $f(x)$ 和 $f(x_0)$ 的不同.前者是函数记号,表示一个变量,后者是函数值记号,表示函数在 $x=x_0$ 处的值,表示一个数.

2.关于求函数的定义域

在微积分中,所讨论的量(常量和变量)一般都限制在实数范围内,自变量与因变量都只能取实数值.求函数的定义域,就是在实数范围内求使函数表达式有意义的自变量的取值范围.

在求用分析表达式给出的函数的定义域时,请注意以下几点:

(1)分式函数的分母不能为零;

(2)偶次根式内的量不能为负值;

(3)对数符号内的量必须取正值;

(4)正切符号内的量不能等于 $2k\pi+\frac{\pi}{2}$,其中,$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$;