

高等学校试用教材

# 数学在刀具设计中的应用

姚南珣 王炽鸿 陈志杰 编

GAO DENG XUE  
XIAO JIAO CAI

机械工业出版社

本书是全国高等工业学校机械制造（冷加工）类专业教材编审委员会  
刀具教材编审组1986~1990年规划中的一本必修课教材。全书为适应刀具  
技术的最新发展，扼要地介绍了数学中有关矢量与矩阵、微分几何和计算  
方法（含优化方法）方面的基本知识。书中对于数学概念的叙述，从工程  
技术人员的实际需要出发，注重形象化和深入浅出，不做过多的理论推  
导，而侧重于结合刀具设计计算中的实例，说明这些数学方法在实际中的  
应用，使读者学完本书后能很快地加以运用。

本书为高等学校机制工艺及其设备专业本科生的教材，也可作为有关  
课题研究生的参考教材，对于从事刀具和齿轮设计的工程技术人员，也是  
一本有效的自学提高读物。

### 数学在刀具设计中的应用

姚南珣 王炽鸿 陈志杰 编

\*

责任编辑：王世刚

\*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南里一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

\*

开本  $787 \times 1092 \frac{1}{16}$  · 印张  $14 \frac{3}{4}$  · 字数 354 千字

1988年6月北京第一版·1988年6月北京第一次印刷

印数 0.001—2,200 · 定价：2.50 元

\*

ISBN 7-111-00155-9/TG·52(课)

## 前 言

本书是根据全国高等工业学校机械制造（冷加工）类专业教材编审委员会确定的规划与编写原则编写的。

本书编入的数学内容，其范围涉及矢量与矩阵、微分几何和计算方法（含优化方法），内容丰富；而深度是在高等数学课程的基础上提高了一步，这都是为了适应刀具技术最新发展的需要，尤其是考虑到计算机技术在刀具设计计算中得到应用后的需要。在具体内容的编写上，考虑到便于读者学完本书后能迅速地使用，因此特别注重数学方法的实际应用，尽量结合刀具设计计算中的有关实例予以介绍。对于数学概念的叙述，则力求形象化和深入浅出，不做过多的理论推导，便于读者的自学。

本书由大连工学院姚南珣（第七章至第十章、附录）、山东工业大学王炽鸿（第四章、第五章）、卫秉权（第六章）、河北机电学院陈志杰（第一章、第二章、第三章）编写的。全书由姚南珣统稿，由西安交通大学乐兑谦教授、成都国营新都机械厂董仁扬高级工程师主审。

本书为高等学校机械制造工艺与设备专业本科生的教材，也可作为有关课题研究生的参考教材。对于从事刀具和齿轮设计的工程技术人员，这也是一本有效的自学提高读物。

本书在编写过程中，得到刀具编审组编委同志的热情指导和帮助，尤其是主审人对此书稿先后进行了初审和复审，提出了重要的修改意见，对教材编写质量的提高起了很重要的作用，在此，一并表示衷心的感谢。

由于编写水平有限，书中难免有错，恳请读者批评指正。

编者 1986.12

# 目 录

## 第一篇 矢量与矩阵

|                      |    |                                               |    |
|----------------------|----|-----------------------------------------------|----|
| 第一章 矢量、矩阵的基本知识 ..... | 1  | § 2-1 坐标变换 .....                              | 21 |
| § 1-1 行列式 .....      | 1  | 一、平移坐标变换 .....                                | 21 |
| 一、二阶行列式 .....        | 1  | 二、旋转坐标变换 .....                                | 22 |
| 二、三阶行列式 .....        | 2  | 三、连续旋转坐标变换 .....                              | 27 |
| 三、 $n$ 阶行列式 .....    | 2  | 四、平移与旋转的联合坐标变换 .....                          | 28 |
| 四、行列式的性质 .....       | 3  | § 2-2 矢量运动 .....                              | 32 |
| § 1-2 矢量代数 .....     | 4  | 一、矢量绕坐标轴旋转 .....                              | 32 |
| 一、矢量 .....           | 4  | 二、矢量绕坐标轴旋转两次 .....                            | 34 |
| 二、矢量的加减法 .....       | 5  | 三、矢量平移加旋转运动 .....                             | 35 |
| 三、矢量与数量的乘法 .....     | 5  | 四、本章小结 .....                                  | 36 |
| 四、在直角坐标系中的矢量 .....   | 6  | 第三章 矢量法在刀具角度计算中的                              |    |
| 五、矢量的标积 .....        | 7  | 应用 .....                                      | 38 |
| 六、矢量的矢积 .....        | 8  | § 3-1 刀具角度的矢量表达式 .....                        | 38 |
| 七、矢量的混合积 .....       | 9  | 一、两个基本矢量 .....                                | 38 |
| 八、三重矢积、拉格朗日恒等式 ..... | 10 | 二、三个辅助矢量 .....                                | 39 |
| § 1-3 矩阵 .....       | 12 | 三、前、后角矢 $\gamma^\circ$ 、 $\alpha^\circ$ ..... | 40 |
| 一、矩阵 .....           | 12 | 四、用矢量表示四个基本角度 .....                           | 40 |
| 二、矩阵运算 .....         | 13 | 五、几个常用坐标系 .....                               | 41 |
| 三、转置矩阵 .....         | 15 | § 3-2 应用举例 .....                              | 47 |
| 四、单位矩阵 .....         | 16 | 例3-1 焊接式车刀几何角度换算 .....                        | 47 |
| 五、逆矩阵 .....          | 16 | 例3-2 车刀刀槽加工的调整计算 .....                        | 52 |
| 六、正交矩阵 .....         | 18 | 例3-3 可转位面铣刀的几何角度计算 .....                      | 55 |
| 七、分块矩阵 .....         | 19 | 例3-4 直齿插齿刀齿形角修正计算 .....                       | 57 |
| 第二章 坐标变换 .....       | 21 | 例3-5 标准麻花钻的前角及后角计算 .....                      | 59 |

## 第二篇 微分几何基础

|                      |    |                     |    |
|----------------------|----|---------------------|----|
| 第四章 曲线 .....         | 65 | § 4-3 空间曲线 .....    | 78 |
| § 4-1 矢函数的导数 .....   | 65 | 一、空间曲线的表达式 .....    | 78 |
| 一、矢函数的求导原则 .....     | 65 | 二、不变量与不变矢量 .....    | 79 |
| 二、矢函数的泰勒展开式 .....    | 67 | 三、曲线论的基本公式 .....    | 79 |
| § 4-2 平面曲线 .....     | 68 | 第五章 曲面 .....        | 91 |
| 一、平面曲线的表达式 .....     | 68 | § 5-1 曲面概述 .....    | 91 |
| 二、刀具设计中常用的平面曲线 ..... | 69 | 一、曲面方程 .....        | 91 |
| 三、切线与法线 .....        | 71 | 二、刀具设计中常用曲面 .....   | 92 |
| 四、曲率与密切圆 .....       | 73 | 三、切平面和法线 .....      | 94 |
| 五、曲线的拐点和奇异点 .....    | 76 | § 5-2 曲面的度量性质 ..... | 98 |

|                      |     |                      |     |
|----------------------|-----|----------------------|-----|
| 一、曲面的第一基本形式          | 98  | 二、曲线族的包络方程           | 115 |
| 二、曲面上两条曲线的夹角         | 99  | 三、啮合基本定理             | 119 |
| § 5-3 曲面的曲率          | 100 | 四、齿廓法线法求刀具切削刃廓形      | 120 |
| 一、曲面的第二基本形式          | 100 | 五、用啮合线法求刀具切削刃廓形      | 124 |
| 二、曲面曲线的法曲率           | 101 | 六、平面啮合中的两类界限点        | 129 |
| 三、默尼埃定理              | 102 | § 6-2 空间啮合时包络原理在刀具廓形 |     |
| 四、主曲率与主方向            | 104 | 设计中的应用               | 132 |
| 五、欧拉公式               | 108 | 一、基本概念               | 132 |
| § 5-4 可展曲面           | 111 | 二、曲面族的特征方程和包络面       | 133 |
| 一、直纹面                | 111 | 三、相对运动和相对运动速度        | 136 |
| 二、可展曲面               | 112 | 四、用运动学法求共轭曲面         | 138 |
| 第六章 包络原理及其在刀具设计中的    |     | 五、用空间媒介齿条法求滚刀的       |     |
| 应用                   | 114 | 基本蜗杆                 | 145 |
| § 6-1 平面啮合时包络原理在刀具廓形 |     | 六、用旋转型刀具加工螺旋面时刀具的    |     |
| 设计中的应用               | 114 | 廓形设计                 | 149 |
| 一、基本概念               | 114 | 七、空间啮合中的几个特殊问题       | 151 |

### 第三篇 常用的计算方法

|                      |     |                       |     |
|----------------------|-----|-----------------------|-----|
| 第七章 函数方程求根           | 155 | § 8-2 主元素消去法          | 168 |
| § 7-1 根的搜索与二分法       | 155 | 一、消去法的基本思想            | 168 |
| 一、逐步搜索法              | 155 | 二、三阶线性方程组的消去法求解公式     | 169 |
| 二、二分法                | 156 | 三、 $n$ 阶线性方程组的消去法基本求解 |     |
| 三、二分法的应用及其程序         | 157 | 公式与分析                 | 170 |
| § 7-2 迭代法            | 159 | 四、主元素消去法的形成           | 172 |
| 一、迭代法与迭代过程的收敛性       | 159 | 五、列主元素消去法的算法与程序       | 173 |
| 二、迭代过程的发散及收敛条件       | 160 | § 8-3 高斯—塞德尔迭代法       | 175 |
| 三、迭代法的计算步骤及应用程序      | 161 | 一、迭代法的基本思想            | 175 |
| § 7-3 牛顿法            | 162 | 二、高斯—塞德尔迭代法           | 176 |
| 一、牛顿公式               | 162 | 三、用矩阵形式分析迭代法及其收敛      |     |
| 二、牛顿法的收敛性与收敛速度       | 162 | 条件                    | 177 |
| 三、牛顿法的计算步骤与程序        | 163 | 四、高斯—塞德尔迭代法的程序与算法     |     |
| § 7-4 函数方程求根方法在刀具设计中 |     | 说明                    | 179 |
| 的应用举例                | 164 | 第九章 曲线拟合的最小二乘法        | 180 |
| 一、求两个变位齿轮作无侧隙啮合时的    |     | § 9-1 最小二乘法           | 180 |
| 啮合角                  | 164 | § 9-2 线性拟合            | 182 |
| 二、设计插齿刀时, 根据插齿刀齿顶变   |     | § 9-3 圆弧拟合            | 182 |
| 尖极限求最大变位系数 $x_0$     | 165 | § 9-4 椭圆拟合            | 184 |
| 三、设计插齿刀时, 根据被加工齿轮副   |     | § 9-5 曲线拟合的程序示例       | 186 |
| 不发生过渡曲线干涉、求最大变位      |     | § 9-6 曲线拟合在刀具设计中应用的实  |     |
| 系数 $x_0$             | 166 | 例                     | 187 |
| 第八章 线性方程组解法          | 167 | 一、用最小二乘法求矩形花键轴滚刀齿     |     |
| § 8-1 线性方程组解法简介      | 167 | 形的取代圆弧                | 187 |

|                                |     |                                  |     |
|--------------------------------|-----|----------------------------------|-----|
| 二、用最小二乘法求刃磨蜗轮滚刀砂轮廓形的取代椭圆 ..... | 188 | 一、基本思想 .....                     | 205 |
| 第十章 最优化方法简介 .....              | 189 | 二、最速下降法的收敛速度 .....               | 206 |
| § 10-1 最优化方法概述 .....           | 189 | 三、最速下降法在非线性方程组求根方面的应用及计算步骤 ..... | 207 |
| 一、最优化问题的术语和一般形式 .....          | 189 | 四、用最速下降法对非线性方程组求根的程序 .....       | 208 |
| 二、近代最优化方法的由来 .....             | 190 | § 10-5 牛顿方向法及变尺度法 .....          | 209 |
| 三、最优化问题最优解的几何解释 .....          | 191 | 一、牛顿方向法 .....                    | 209 |
| 四、无约束最优化问题最优解存在的条件 .....       | 192 | 二、变尺度法 .....                     | 210 |
| 五、目标函数值的最速下降方向 .....           | 194 | 三、变尺度法的计算步骤与计算例 .....            | 210 |
| § 10-2 一维搜索的 0.618 法 .....     | 195 | 四、DFP 变尺度法的程序 .....              | 212 |
| 一、0.618 法的基本思想 .....           | 195 | 附录 计算方法的 BASIC 程序及其应用例题 .....    | 215 |
| 二、0.618 法的计算步骤与程序 .....        | 196 | 附录一 二分法 .....                    | 215 |
| § 10-3 多维搜索的单纯形法 .....         | 197 | 附录二 牛顿法 .....                    | 216 |
| 一、单纯形法的形成与基本思想 .....           | 198 | 附录三 全主元素消去法 .....                | 217 |
| 二、单纯形法计算的具体步骤 .....            | 199 | 附录四 高斯—塞德尔迭代法 .....              | 219 |
| 三、应用单纯形法时的几点说明与计算实例 .....      | 200 | 附录五 最小二乘多项式拟合 .....              | 220 |
| 四、单纯形法的程序 .....                | 201 | 附录六 下降法解非线性方程组 .....             | 223 |
| 五、单纯形法在刀具设计中的应用举例 .....        | 204 | 附录七 0.618 法 .....                | 225 |
| § 10-4 最速下降法 .....             | 205 | 参考文献 .....                       | 226 |

# 第一篇 矢 量 与 矩 阵

## 第一章 矢量、矩阵的基本知识

### § 1-1 行 列 式

#### 一、二阶行列式

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

这里  $b_1$ 、 $b_2$  是常数项,  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2; j = 1, 2$ ) 叫做未知数  $x_j$  的系数。利用消元法解得

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}$$

记

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - a_{21} b_1$$

如果将以上这种排列和计算方法统一用符号  $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$  表示, 则

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = a d - b c$$

就叫做二阶行列式。等号左边为二阶行列式的记号, 其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  称为行列式的元素。横排元素称行列式的行; 竖排元素称行列式的列。例如元素  $a$ 、 $c$  构成第一行,  $b$ 、 $d$  构成第二行;  $a$ 、 $b$  构成第一列,  $c$ 、 $d$  构成第二列。二阶行列式有二行二列, 有  $2^2$  个元素。

上式右边是行列式的展开式, 即实线上两元素之积减去虚线上两元素之积(见下图)。

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

这样，二元线性方程组的解又可写为

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad (\Delta \neq 0) \quad (1-1)$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad (1-2)$$

## 二、三阶行列式

设三元线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

其解为

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} \quad (\Delta \neq 0) \quad (1-3)$$

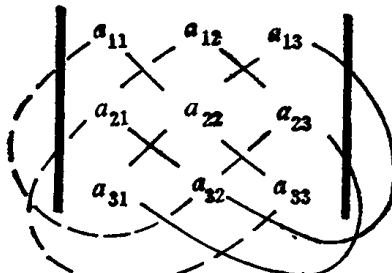
其中

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

它们都称为三阶行列式。含有三行和三列，共有  $3^2$  个元素。 $\Delta$  称为系数行列式。 $\Delta_{x_1}$ 、 $\Delta_{x_2}$ 、 $\Delta_{x_3}$  是将常数项  $b_1$ 、 $b_2$ 、 $b_3$  分别替换  $\Delta$  中的第 1、2、3 列得到的三阶行列式。

三阶行列式的展开式以  $\Delta$  为例有



$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \quad (1-4)$$

三阶行列式的展开法则如等号右边所示，是 6 个项的代数和。即实线上三个元素的乘积构成的三项取正号；虚线上三个元素的乘积构成的三项取负号。称这种展开方法为对角线法。

## 三、n阶行列式

设有  $n$  元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

如果它的系数行列式  $\Delta \neq 0$ ，那么它有唯一解，即

$$x_1 = \frac{\Delta_{x1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x2}}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_{xn}}{\Delta} \quad (1-5)$$

$\Delta, \Delta_{x1}, \dots, \Delta_{xn}$  都是  $n$  阶行列式，它们由  $n^2$  个元素组成。其中

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1-6)$$

而  $\Delta_{x1}, \Delta_{x2}, \dots, \Delta_{xn}$ ，则分别是以  $n$  阶线性方程组右端常数项  $b_1, b_2, \dots, b_n$  代换  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的系数得到的行列式。

以上解  $n$  阶线性方程组的方法称为克莱姆 (Cramer) 法则。

三阶以上的行列式不能用对角线法展开，因此，这里介绍更一般的展开方法。

在  $n$  阶行列式 (1-6) 中，划去某元素  $a_{ij}$  (它表示第  $i$  行第  $j$  列交叉处的元素) 所在  $i$  行和  $j$  列，剩下的元素构成的行列式称为元素  $a_{ij}$  的子行列式。子行列式乘上  $(-1)^{i+j}$  所得到的式子称为元素  $a_{ij}$  的代数余子式，记为  $A_{ij}$ 。

$n$  阶行列式可用它的任一行 (或列) 中的所有元素和它们对应的代数余子式之积的和来表示，这就是  $n$  阶行列式的展开法。

把式 (1-6) 按  $i$  行元素展开，则有

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

例如，三阶行列式按第一行展开有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

再将其二阶行列式展开，即得到它的展开式。这和用对角线法得到的结果是一样的。

#### 四、行列式的性质

1. 行列式的行与列互换，其值不变。例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (1-7)$$

行列式的行与列互换后，成为它的转置行列式。

2. 交换行列式的两行 (或两列)，行列式变号，但绝对值不变。例如，交换第一行与第二行得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (1-8)$$

3. 把行列式的某一行(或列)同乘以数  $k$ , 等于以数  $k$  乘以该行列式。例如

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (1-9)$$

4. 行列式某行(或列)各元素如果是两数之和, 则这个行列式可以化为两个行列式之和。例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + a'_{21} & a_{22} + a'_{22} & a_{23} + a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (1-10)$$

5. 把行列式的某行(或列)各元素乘以  $\lambda$  后加到另一行(或列)的对应元素, 行列式的值不变。例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + \lambda a_{11} & a_{22} + \lambda a_{12} & a_{23} + \lambda a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (1-11)$$

6. 行列式满足下列条件之一, 则行列式为零。

- (1) 行列式中的两行(或列)对应元素相等。
- (2) 行列式中有一行(或列)的元素全为零。
- (3) 行列式中有两行(或列)对应元素成比例。

## § 1-2 矢 量 代 数

### 一、矢量

仅由数值大小即可表示的量称为数量(或标量), 如时间、温度、体积和功等。既有数值大小又有方向的量称为矢量(或向量), 如力、切削速度和刀具的切削力等。

矢量可用带有箭头的一定长度的线段来表示, 线段的长度表示矢量的大小, 箭头的指向表示矢量的方向。如图 1-1 a 所示, 矢量的起点为  $A$ , 终点为  $B$ , 该矢量记作  $\overrightarrow{AB}$  或  $\mathbf{a}$ 。

如果一个矢量的起点在空间的位置可以自由确定, 则称它为自由矢量(简称矢量); 如果矢量的起点为坐标系的原点, 则称它为矢径。当然矢径也是矢量。

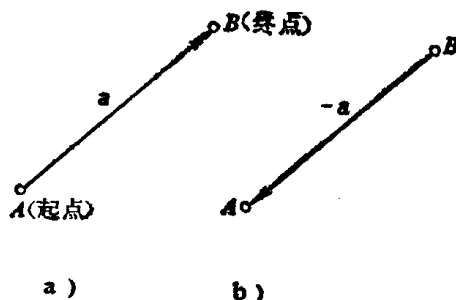


图1-1 矢量

两个矢量大小相等、方向相同时, 称这两个矢量相等。由此可见, 自由矢量在空间平移至各位置时, 矢量都是相等的, 平移并不改变矢量的性质。

与矢量  $\mathbf{a}$  大小相等、方向相反的矢量, 称为矢量  $\mathbf{a}$  的负矢量, 如图 1-1 b 所示。可见某矢量  $\mathbf{a}$  的起点和终点的位置对调, 就得到了矢量  $\mathbf{a}$  的负矢量, 记作  $-\mathbf{a}$ 。

起点和终点重合的矢量称为零矢量, 零矢量的方向是不确定的。

矢量  $\mathbf{a}$  的长短称为矢量的模, 矢量  $\mathbf{a}$  的模记为  $|\mathbf{a}|$ 。模等于 1 的矢量称为么矢。矢量  $\mathbf{a}$  的

么矢记为  $\alpha^0$ ,  $|\alpha^0| = 1$ 。

## 二、矢量的加减法

两个矢量  $a$  与  $b$ , 它们的和是以这两矢量为邻边的平行四边形的对角线矢量  $c$  (图 1-2)。记作

$$c = a + b \quad (1-12)$$

这就是二矢量合成的平行四边形法则。

不在同一平面内的三矢量  $a$ 、 $b$ 、 $c$  之和, 为这三矢量为边的平行六面体的对角线矢量  $d$  (图 1-3)。记为

$$d = a + b + c \quad (1-13)$$

矢量相加也可以用三角形法则, 即在第一个矢量  $a$  的终点引第二个矢量  $b$ , 则矢量  $a$  和  $b$  的封闭边就是它们的和矢量  $c$ 。  $c$  起于  $a$  的起点, 止于  $b$  的终点 (图 1-4)。

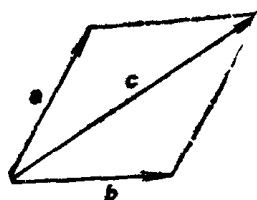


图 1-2 平行四边形法则

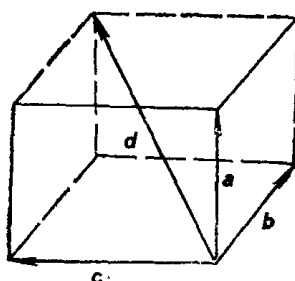


图 1-3 三矢量之和

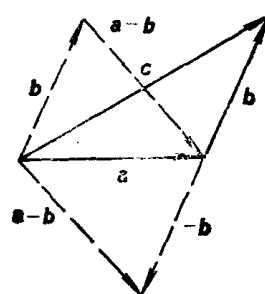


图 1-4 三角形法则

求两个以上的矢量的和矢量, 其作法是: 第一个矢量的终点为第二个矢量的起点, 依次连接, 则封闭边就是它们的和矢量, 以  $m$  表示。  $m$  的起点为第一个矢量  $a$  的起点,  $m$  的终点为最后一个矢量  $k$  的终点 (图 1-5)。记为

$$m = a + b + c + \dots + k \quad (1-14)$$

若矢量  $k$  的终点与矢量  $a$  的起点重合, 则和矢量为零 (图 1-6)。

矢量加法满足交换律及结合律, 即

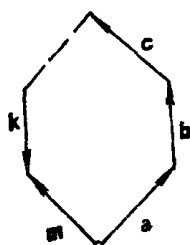


图 1-5 多个矢量的和矢量

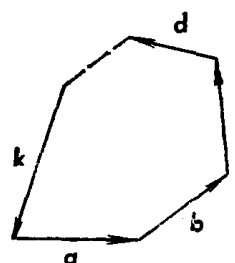


图 1-6 几个矢量的封闭图形

$$a + b = b + a \quad (1-15)$$

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c) \quad (1-16)$$

求矢量  $a$  与  $b$  的差, 可求  $a$  与  $-b$  之和, 记作

$$a - b = a + (-b) \quad (1-17)$$

其作法如图 1-4 的虚线所示。也可将矢量  $a$ 、 $b$  的起点置于同一点, 连接它们终点的矢量就是它们的差  $a - b$ , 它的起点为减矢量  $b$  的终点, 它的终点是被减矢量  $a$  的终点 (图 1-4)。

## 三、矢量与数量的乘法

矢量  $a$  与数量  $m$  之积记为  $ma$ , 它是一个矢量。该矢量的模为  $|m||a|$ , 其方向: 当  $m > 0$  时, 与  $a$  同向; 当  $m < 0$  时, 与  $a$  反向。

矢量与数量之积满足结合律与分配律。设  $m$  与  $n$  为两个数量, 则

$$m(n\mathbf{a}) = n(m\mathbf{a}) = (mn)\mathbf{a} \quad (1-18)$$

$$(m+n)\mathbf{a} = m\mathbf{a} + n\mathbf{a} \quad (1-19)$$

$$m(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = m\mathbf{a} + m\mathbf{b} \quad (1-20)$$

若幺矢  $\mathbf{a}^\circ$  与矢量  $\mathbf{a}$  方向相同, 则根据上述乘法关系有

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\mathbf{a}^\circ \quad (1-21)$$

或写为

$$\mathbf{a}^\circ = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \quad (1-22)$$

就是说, 一个矢量 (不为零矢量) 除以它的模, 是一个同方向的幺矢。

#### 四、在直角坐标系中的矢量

如图 1-7 所示, 为直角坐标系  $o-xyz$  中的一个自由矢量,  $\mathbf{a} = M_1M_2$ , 它以  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  为起点, 以  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  为终点。过  $M_1$  和  $M_2$  各作垂直于三个坐标轴的平面, 这六个平面围成一个以线段  $M_1M_2$  为对角线的长方体。由图看出

$$M_1M_2 = M_1P + M_1Q + M_1R$$

但是  $M_1P = P_1P_2, M_1Q = Q_1Q_2,$

$$M_1R = R_1R_2$$

所以  $M_1M_2 = P_1P_2 + Q_1Q_2 + R_1R_2$

矢量  $P_1P_2$ 、 $Q_1Q_2$  和  $R_1R_2$  分别为矢量  $M_1M_2$  在  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴上的分矢量。

以  $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{j}$ 、 $\mathbf{k}$  分别表示沿  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴正向的幺矢, 并称其为坐标系的基本幺矢(下同), 那么, 由式(1-21)有

$$P_1P_2 = a_x\mathbf{i} = (x_2 - x_1)\mathbf{i}$$

$$Q_1Q_2 = a_y\mathbf{j} = (y_2 - y_1)\mathbf{j}$$

$$R_1R_2 = a_z\mathbf{k} = (z_2 - z_1)\mathbf{k}$$

因此

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \quad (1-23)$$

或者

$$M_1M_2 = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$$

式中  $a_x$ 、 $a_y$ 、 $a_z$  为矢量  $\mathbf{a}$  在三个坐标轴上的分量(投影), 叫做矢量  $\mathbf{a}$  的坐标。并把表达式

$$\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$$

称为矢量  $\mathbf{a}$  的坐标表达式。

应该注意的是: 矢量在三个坐标轴上的分矢量与矢量在三个坐标轴上的分量(投影或矢量的坐标)有本质区别。前者是三个矢量:  $a_x\mathbf{i}$ 、 $a_y\mathbf{j}$ 、 $a_z\mathbf{k}$ ; 而后者是三个数值:  $a_x$ 、 $a_y$ 、 $a_z$ 。

起点为  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  而终点为  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  的矢量为

$$M_1M_2 = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

起点为坐标原点  $O$  而终点为  $M(x, y, z)$  的矢径为

$$OM = \{x, y, z\}$$

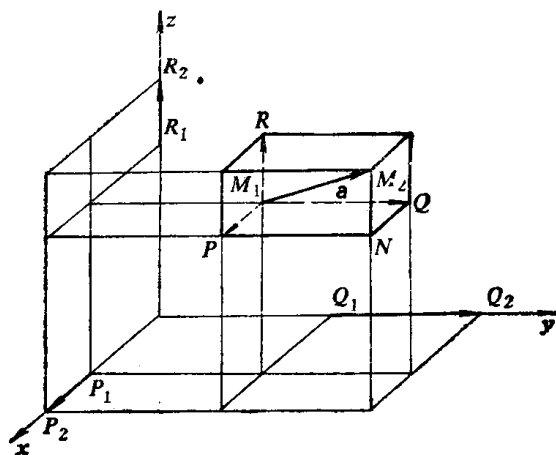


图1-7 矢量的坐标

就是说, 起点为坐标原点的矢量(矢径), 其矢量的坐标与它的终点的坐标是一致的。

在本书中, 矢量常表示为列阵或行阵的形式, 即列阵有

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad (1-24)$$

行阵有

$$\mathbf{a} = [a_x \quad a_y \quad a_z] \quad (1-25)$$

关于矩阵知识将在下节介绍, 这里只要求明确方括弧代表矩阵, 数组  $a_x$ 、 $a_y$ 、 $a_z$  仍为矢量依次在三个坐标轴上的分量。这种表示方法便于运算。

矢量用坐标表示时, 可以把它们的和、差以及与数量的乘积化成代数运算的形式。

设有两矢量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$$

则

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{bmatrix}$$

或记为

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_x \pm b_x)\mathbf{i} + (a_y \pm b_y)\mathbf{j} + (a_z \pm b_z)\mathbf{k}$$

又

$$m\mathbf{a} = m[a_x \quad a_y \quad a_z] = [ma_x \quad ma_y \quad ma_z]$$

## 五、矢量的标积

两矢量的标积为两矢量的模的乘积再乘以此两矢量夹角的余弦, 标积的结果为一数量。

矢量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的夹角以  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq \pi$ ) 表示, 其标积记为

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi \quad (1-26)$$

标积具有交换律、分配律以及与数的乘积的结合律的性质。即

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \quad (1-27)$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \quad (1-28)$$

$$k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = k\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot k\mathbf{b} \quad (1-29)$$

式中  $k$  为一数量。

设有两个矢量

$$\mathbf{a} = [a_x \quad a_y \quad a_z], \quad \mathbf{b} = [b_x \quad b_y \quad b_z]$$

可以证明

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (1-30)$$

即标积为两个矢量的同名分量之积之和。若两矢量相等, 则其标积为

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a})^2 = |\mathbf{a}| |\mathbf{a}| = |\mathbf{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \quad (1-31)$$

由此, 矢量的模可表为

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1-32)$$

设  $\mathbf{a}$  与  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴的夹角分别为  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ , 则

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{a_x}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \\ \cos \beta = \frac{a_y}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \\ \cos \gamma = \frac{a_z}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \end{cases} \quad (1-33)$$

$\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 、 $\cos \gamma$  称为矢量  $\mathbf{a}$  的方向余弦。

而  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$  (1-34)

么矢由式(1-23)、(1-33)可写为

$$\mathbf{a}^0 = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$$

或  $\mathbf{a}^0 = [\cos \alpha \quad \cos \beta \quad \cos \gamma]$  (1-35)

在计算刀具问题时，多采用么矢，并且常以上式的形式出现。

由式(1-26)得两矢量间的夹角为

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \mathbf{a}^0 \cdot \mathbf{b}^0 \quad (1-36)$$

或  $\cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \quad (1-37)$

矢量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  垂直时， $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ，由式(1-26)得

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (1-38)$$

即  $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \quad (1-39)$

这就是两矢量垂直的条件。

## 六、矢量的矢积

矢量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的矢积为一新的矢量  $\mathbf{c}$ 。矢量  $\mathbf{c}$  的大小，为以矢量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  为边的平行四边形的面积； $\mathbf{c}$  的方向为垂直于  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  构成的平面。 $\mathbf{c}$  的指向按右(左)手法则规定(图 1-8)。

两矢量的矢积记为

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \varphi) \mathbf{c}^0 \quad (1-40)$$

式中  $\mathbf{c}$ ——矢量  $\mathbf{c}$  的么矢；

$\varphi$ ——矢量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  之间的正向夹角 ( $0 \leq \varphi \leq \pi$ )。

$\mathbf{c}$  的方向是这样规定的：如图 1-8 所示， $\mathbf{c}$  同时垂直于矢量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  (即垂直于  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  所决定的平面)，而且  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$  构成右(左)手系。即用右(左)手握住矢量  $\mathbf{c}$ ，让四指弯曲的方向表示矢量  $\mathbf{a}$  沿最短路程转向矢量  $\mathbf{b}$  时，和四指垂直的拇指所指的方向即为矢量  $\mathbf{c}$  的方向。把这个方法称为右(左)手法则。坐标轴  $x$ 、 $y$ 、 $z$  按这样的顺序组成的坐标系称为右(左)手坐标系。本书无特别说明时，均采用右手法则，坐标系为右手系。

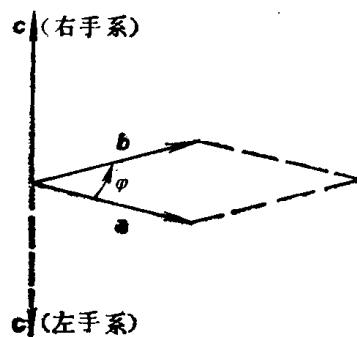


图1-8 矢量的矢积

矢量  $\mathbf{c}$  的模  $|\mathbf{c}|$  即  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ ，等于以矢量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  为邻边的平行四边形的面积。

以后，常用两矢量的矢积求由该二矢量所决定的平面的法矢量。

根据作矢积后得到的新矢量的方向的规定有

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \quad (1-41)$$

即矢积不具有交换律的性质。但矢积具有分配律、矢积与数量相乘具有结合律的性质。即

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \quad (1-42)$$

$$m(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = m\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (m\mathbf{b}) \quad (1-43)$$

$$(m\mathbf{a}) \times (n\mathbf{b}) = mn(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (1-44)$$

若矢量  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ , 则它们的夹角  $\varphi = 0$ , 故

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$$

此为两矢量的平行条件。

矢积的坐标表示为

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k} \quad (1-45)$$

根据两矢量的平行条件, 由式(1-45)得

$$a_y b_z - a_z b_y = 0, \quad a_x b_z - a_z b_x = 0, \quad a_x b_y - a_y b_x = 0 \quad (1-46)$$

或

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \quad (1-47)$$

由式(1-40)得两矢量间夹角的正弦为

$$\sin \varphi = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} \quad (1-48)$$

由式(1-36)和式(1-48)得

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} \quad (1-49)$$

## 七、矢量的混合积

混合积也称混积或三重数积。混积结果为一数量。记为

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}) \quad (1-50)$$

它表示以矢量  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$  为边的平行六面体的体积  $V$  (图 1-9)。

混积在直角坐标系的表示为

$$(\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (1-51)$$

这就是说, 三个矢量的混积等于由这三个矢量的分量构成的三阶行列式的值。当  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$  组成右(左)手系、而坐标系也取右(左)手系时,  $(\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c})$  为正, 否则为负。

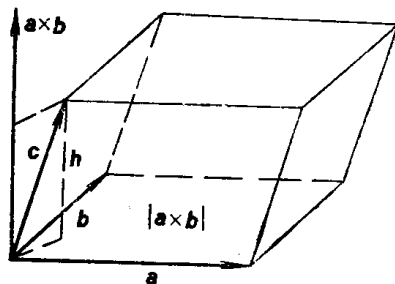


图1-9 矢量的混合积

由行列式的性质可知, 混积有如下性质:

1. 混积中的“ $\times$ ”和“ $\cdot$ ”可以互换, 即

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \quad (1-52)$$

2. 三个矢量依次循环排列其值不变, 即

$$(\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}) = (\mathbf{b} \mathbf{c} \mathbf{a}) = (\mathbf{c} \mathbf{a} \mathbf{b}) \quad (1-53)$$

3. 任意两矢量的位置互换时变号, 即

$$(abc) = -(acb) = -(bac) = -(cba) \quad (1-54)$$

根据上述混积的几何意义可知, 当三矢量  $a$ 、 $b$ 、 $c$  共面时, 混积为零。即

$$(abc) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \quad (1-55)$$

由于上式的右边为零, 故左边的三矢量位置可以任意颠倒。即

$$(abc) = (acb) = (cab) = \dots = 0 \quad (1-56)$$

三矢量共面的条件在解刀具问题时, 有着极其广泛地应用。

### 八、三重矢积、拉格朗日恒等式

若  $a$ 、 $b$ 、 $c$  为任意三个矢量, 则称  $(a \times b) \times c$  为三重矢积, 它的展开式为

$$(a \times b) \times c = b(a \cdot c) - a(b \cdot c) \quad (1-57)$$

证明: 令

$$(a \times b) \times c = [d_x \ d_y \ d_z] = d$$

而

$$(a \times b) \times c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_y & a_z & b_y & b_z & c_x & c_y & c_z \\ b_y & b_z & c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned} d_x &= c_x \begin{vmatrix} a_z & a_y \\ b_z & b_y \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} = (a_z c_x + a_y c_y + a_x c_z) b_x - (b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z) a_x \\ &= (a \cdot c) b_x - (b \cdot c) a_x \end{aligned}$$

同理有

$$d_y = (a \cdot c) b_y - (b \cdot c) a_y$$

$$d_z = (a \cdot c) b_z - (b \cdot c) a_z$$

所以

$$d = (a \cdot c)(b_x i + b_y j + b_z k) - (b \cdot c)(a_x i + a_y j + a_z k)$$

即

$$(a \times b) \times c = b(a \cdot c) - a(b \cdot c)$$

证毕。就是说, 三重矢积等于中间矢量与其余两矢量标积的乘积, 减去括号中另一矢量与其余两矢量标积的乘积。三重矢积的结果为矢量。

将式(1-57)两边与任一矢量  $d$  作标积, 则有

$$[(a \times b) \times c] \cdot d = [b(a \cdot c) - a(b \cdot c)] \cdot d$$

将上式左边  $(a \times b)$  视为一个矢量, 则成为混积形式, 根据其性质 1 有

$$[(a \times b) \times c] \cdot d = (a \times b) \cdot (c \times d)$$

而

$$[b(a \cdot c) - a(b \cdot c)] \cdot d = (a \cdot c)(b \cdot d) - (b \cdot c)(a \cdot d)$$

所以

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (b \cdot c)(a \cdot d) \quad (1-58)$$

或

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = \begin{vmatrix} a \cdot c & a \cdot d \\ b \cdot c & b \cdot d \end{vmatrix}$$

这就是拉格朗日恒等式。由该式可知

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = (\mathbf{a})^2(\mathbf{b})^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \quad (1-59)$$

**例1-1** 如图 1-10 所示, 空间任一平面与坐标系  $o-xyz$  所决定的三个坐标平面交于  $AB$ 、 $CB$ 、 $CA$ , 已知  $CA$  与  $x$  轴夹角为  $\alpha$ ,  $CB$  与  $y$  轴夹角为  $\beta$ 。

1. 求  $AB$  与  $x$  轴夹角  $\rho$

过  $C$  点沿  $CA$  作么矢  $\alpha^\circ$ , 沿  $CB$  作么矢  $\beta^\circ$ , 过点  $A$  沿  $AB$  作么矢  $\rho^\circ$ 。因  $\alpha^\circ$ 、 $\beta^\circ$ 、 $\rho^\circ$  都在平面  $ABC$  上, 故三矢量共面混积为零, 即

$$(\alpha^\circ \beta^\circ \rho^\circ) = 0$$

在  $o-xyz$  内么矢

$$\alpha^\circ = [\cos \alpha \quad 0 \quad -\sin \alpha]$$

$$\beta^\circ = [0 \quad \cos \beta \quad -\sin \beta]$$

$$\rho^\circ = [-\cos \rho \quad \sin \rho \quad 0]$$

则

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ -\cos \rho & \sin \rho & 0 \end{vmatrix} = 0$$

解得

$$\cos \alpha \sin \beta \sin \rho - \sin \alpha \cos \beta \cos \rho = 0$$

则

$$\operatorname{tg} \rho = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \quad (1-60)$$

2. 求  $\alpha^\circ$  与  $\beta^\circ$  的夹角  $\varphi$ 、 $\beta^\circ$  与  $\rho^\circ$  的夹角  $\psi$  由式(1-36)得

$$\cos \varphi = \alpha^\circ \cdot \beta^\circ = \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos \psi = \beta^\circ \cdot \rho^\circ = \cos \beta \sin \rho$$

将式(1-60)代入上式得

$$\cos \psi = \frac{\cos \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta}}$$

3. 过  $z$  轴作一剖面, 与平面  $ABC$  的交线为  $CD$ ,  $\gamma^\circ$  为  $CD$  上过  $C$  点的么矢, 已知角  $\theta$ , 求角  $\gamma$  和  $\theta'$ 。

因  $\gamma^\circ$  与  $\alpha^\circ$ 、 $\beta^\circ$  在同一平面上, 故

$$(\gamma^\circ \alpha^\circ \beta^\circ) = 0 \quad (1-61)$$

在  $o-xyz$  内

$$\begin{aligned} \gamma^\circ &= [\cos \gamma \cos \theta \quad \cos \gamma \sin \theta \quad -\sin \gamma] \\ &= \cos \gamma [\cos \theta \quad \sin \theta \quad -\operatorname{tg} \gamma] \end{aligned}$$

将  $\alpha^\circ$ 、 $\beta^\circ$  和  $\gamma^\circ$  代入式 (1-61) 得

$$\begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta & -\operatorname{tg} \gamma \\ \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \end{vmatrix} = 0$$

解得

$$\cos \theta \sin \alpha \cos \beta + \sin \theta \cos \alpha \sin \beta - \operatorname{tg} \gamma \cos \alpha \cos \beta = 0$$

所以

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cos \theta + \operatorname{tg} \beta \sin \theta$$

而

$$\begin{aligned} \cos \theta' &= \alpha^\circ \cdot \gamma^\circ \\ &= \cos \alpha \cos \gamma \cos \theta + \sin \alpha \sin \gamma \end{aligned}$$

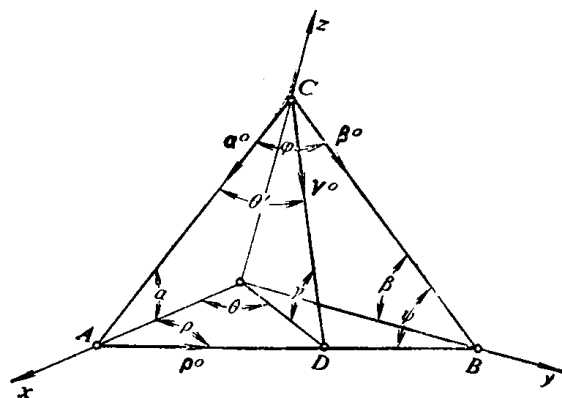


图1-10 空间任一平面