

信号理论与应用

林茂庸 编著

电子工业出版社

出版说明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定,我部承担了全国高等学校、中等专业学校工科电子类专业教材的编审、出版的组织工作。由于各有关院校及参与编审工作的广大教师共同努力,有关出版社的紧密配合,从1978年至1985年,已编审、出版了两轮教材,正在陆续供给高等学校和中等专业学校教学使用。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应“三个面向”的需要,贯彻“努力提高教材质量,逐步实现教材多样化,增加不同品种、不同层次、不同学术观点、不同风格、不同改革试验的教材”的精神,我部所属的七个高等学校教材编审委员会和两个中等专业学校教材编审委员会,在总结前两轮教材工作的基础上,结合教育形势的发展和教学改革的需要,制订了1986~1990年的“七五”(第三轮)教材编审出版规划。列入规划的教材、实验教材、教学参考书等近400种选题。这批教材的评选推荐和编写工作由各编委会直接组织进行。

这批教材的书稿,是从通过教学实践、师生反映较好的讲义中经院校推荐,由编审委员会(小组)评选择优产生出来的。广大编审者、各编审委员会和有关出版社为保证教材的出版和提高教材的质量,作出了不懈的努力。

限于水平和经验,这批教材的编审、出版工作还会有缺点和不足之处,希望使用教材的单位,广大教师和同学积极提出批评建议,共同为不断提高工科电子类专业教材的质量而努力。

电子工业部教材办公室

前 言

本教材系按电子工业部工科电子类专业教材 1986~1990 年编审出版规划,由无线电技术与信息系统教材编审委员会电子系统编审小组征稿、推荐出版。责编委刘永坦。

本教材由北京理工大学林茂庸编著,华东工学院刘国岁和电子科技大学向敬成担任主审。

本课程的参考学时为 40~60 学时,其主要内容可概括为五个部分:1. 信号空间概念;信号的复数表示和矢量表示(第 1~3 章)。2. 希伯特空间线性算子理论;线性算子的表示方法(第 4 章)。3. 信号的时频分析;WD(Wigner Distribution)和模糊函数(第 6~7 章)。4. 扩谱和脉压的概念;典型大时宽-带宽信号分析(第 8~10 章)。5. 波形优化和信号空间理论在信号最优处理中的应用(第 5、11 章)。本书取材是根据从事广义通信系统(含通信、雷达、导航、智能化仪器、模式识别、语音信号处理和图象处理等系统)中有关信号处理和波形设计的要求确定的,力求用信号空间概念和泛函分析方法统一全书。

使用本教材时应注意本书立足于读者已有“信号与系统”、“高等代数”、“随机过程”和“实变函数与泛函分析”的基础。本书比较侧重基本理论、基本概念和基本方法的叙述,并注意与实际应用结合,各章都有一定数量的例题和习题,有利于读者加深理解所学内容。章末有参考文献目录,便于读者对有关问题进行深入钻研。章首有简短的概述,章末有简单的小结,承上启下,便于读者抓住要点,掌握各部分内容的有机联系,也有利于启发式教学。

本教材由林茂庸统编全稿。参加审阅工作的戴树荪、丁子明、冯一云和朱德君等同志,都为本书提出许多宝贵意见,这里表示诚挚的感谢。由于编者水平有限,书中难免还存在一些缺点和错误,殷切希望广大读者批评指正。

编者 1989 年 4 月

目 录

绪论	I
第一章 复信号分析基础	2
§ 1.1 概述	2
§ 1.2 实信号的复数表示法	4
§ 1.3 高频窄带信号通过带通线性系统的复数描述	10
§ 1.4 随机信号的复数表示	13
§ 1.5 波形参量	15
小结	21
习题	21
参考文献	22
第二章 信号空间	23
§ 2.1 概述	23
§ 2.2 信号集合	23
§ 2.3 映射与泛函	26
§ 2.4 距离空间	29
§ 2.5 完备的距离空间	30
§ 2.6 线性空间	33
§ 2.7 赋范线性空间	34
§ 2.8 内积空间	35
§ 2.9 信号空间的不等式和正交关系	38
小结	38
习题	39
参考文献	39
第三章 信号的矢量表示	40
§ 3.1 概述	40
§ 3.2 线性独立、基底和维数	40
§ 3.3 L^2 空间信号的最佳逼近与投影定理	42
§ 3.4 葛兰姆-施密特归一正交化步骤	45
§ 3.5 常用的正交函数集合	46
§ 3.6 随机信号的正交展开	50
小结	52
习题	52
参考文献	52
第四章 信号空间的线性算子	53
§ 4.1 概述	53
§ 4.2 信号的积分变换与连续表示	54

§ 4.3 线性变换及其主要性质	57
§ 4.4 有限维内积空间中线性变换的表示	59
§ 4.5 $L^2(T)$ 空间线性算子的表示	61
§ 4.6 算子分类	63
§ 4.7 $L^2(T)$ 空间算子的近似表示	66
§ 4.8 算子的谱表示	69
§ 4.9 随机矢量的线性变换	73
小结	73
习题	74
参考文献	74
第五章 信号空间理论的应用	75
§ 5.1 概述	75
§ 5.2 线性泛函	75
§ 5.3 双线性泛函与二次泛函	76
§ 5.4 信号优化中常用的二次泛函	79
§ 5.5 典型信号空间及信号矢量表示举例	80
§ 5.6 应用信号空间概念阐述 MAP (最大后验概率) 检测原理	83
§ 5.7 线性均方估计与正交原理	87
§ 5.8 横向滤波器的算子谱表示	91
§ 5.9 相关矩阵的特征值和特征矢量表示	91
小结	93
习题	93
参考文献	93
第六章 信号的时-频表示	94
§ 6.1 概述	94
§ 6.2 连续信号的 WD 及其主要性质	94
§ 6.3 信号的时宽、带宽限制对 WD 的影响	98
§ 6.4 典型信号的 WD (举例)	99
§ 6.5 信号处理算子对 WD 的影响	101
§ 6.6 WD 的全局和局部矩	102
§ 6.7 离散信号的 WD	106
§ 6.8 随机信号的 WD 与“进展谱”	114
§ 6.9 WD 与其他时-频表示的关系	115
小结	116
习题	117
参考文献	117
第七章 模糊函数	118
§ 7.1 概述	118
§ 7.2 “点目标”回波的数学模型	118
§ 7.3 模糊函数的定义及其物理意义	120
§ 7.4 模糊函数的形式	123
§ 7.5 单载频脉冲信号的模糊函数	125
§ 7.6 模糊函数的性质	128

§ 7.7 模糊函数的推广	135
小结	135
习题	136
参考文献	136
第八章 分辨理论、脉冲压缩与扩谱概念	138
§ 8.1 概述	138
§ 8.2 分辨的理论基础	138
§ 8.3 距离分辨力与时延分辨常数	139
§ 8.4 速度分辨力与多普勒分辨常数	143
§ 8.5 距离-速度联合分辨	145
§ 8.6 脉冲压缩概念和大时宽-带宽信号	146
§ 8.7 扩谱概念和扩谱调制形式	149
小结	152
习题	152
参考文献	153
第九章 调频脉冲信号	155
§ 9.1 概述	155
§ 9.2 线性调频脉冲信号的频谱	155
§ 9.3 线性调频脉冲信号的模糊函数	157
§ 9.4 匹配滤波器特性及脉冲压缩性能估计	159
§ 9.5 线性调频脉冲压缩信号的距离旁瓣抑制方法	164
§ 9.6 线性调频脉冲压缩系统失真分析——“成对回波理论”的应用	166
§ 9.7 Chirp 信号的 WD	168
小结	169
习题	169
参考文献	170
第十章 相位编码脉冲信号	171
§ 10.1 概述	171
§ 10.2 二相编码信号分析	171
§ 10.3 二元伪随机序列	179
§ 10.4 二元伪随机序列的相关特性	186
§ 10.5 多相编码信号	191
小结	193
习题	193
参考文献	193
第十一章 波形设计	195
§ 11.1 概述	195
§ 11.2 变分问题	195
§ 11.3 信号优化举例	198
§ 11.4 按照给定的 $\chi(\tau, 0)$ 设计波形	200
§ 11.5 按照给定的自相关和互相关特性要求选择最佳二元序列	205
§ 11.6 抑制杂波波形设计	208

小结	225
习题	225
参考文献	225
附录	227
附录 I 傅立叶变换规则及典型函数傅立叶变换对表	227
附录 II 编码的代数基础	228
参考文献	234
附录 III DFP 变尺度法和 Fletcher 新变尺度法	234
参考文献	236

绪 论

信号一词来自拉丁语 *signum*, 意为信息矢量 (Information Vector), 它携带并传送一个物理系统的状态信息给受讯者, 例如雷达回波信号载荷着有关目标和环境的信息。雷达和通讯系统一样, 都是一个信息传输和处理的系统, 它区别于通讯系统之处, 在于信息的调制过程发生在目标散射之时, 而通讯系统传送的信息则是在发送端就调制上去的。信号有多种多样, 按照信息传感器不同, 有电信号、光信号、声信号、机械振动信号、生物医学信号之分。信号可以用图形表示, 更方便的是用函数表示, 函数的变量可以是时间 t , 坐标 (x, y) ... 等等, 为不失一般性, 今后将主要研究用时间函数表示的电信号。

信号理论研究信号分析、信号处理和信号综合问题。其主要内容包括: 信号表示方法; 主要性质和数字特征; 不同信号处理器的信号变换性质、处理算子的表示方法, 以及按照各种性能要求的波形综合方法等。信号理论的应用范围很广, 从广义通讯系统 (含通讯、雷达、导航、智能化仪器、模式识别、语音、图象处理系统等) 到大气物理、地质物理、生物医学工程等不同学科领域, 都涉及信号提取和处理的任务。显然, 各类电子系统中信息传输过程会受到各种外界 (自然和人为的) 干扰和内部噪声干扰。信号理论的形成与发展目的在于提高干扰下信息传输的可靠性和有效性, 雷达和无线电通信的发展促进了信息论和信号理论的发展。

近代信号处理设备大多可以直接进行复数运算, 通信与电子系统中广泛应用的窄带信号的复数表示, 将大大简化信号和系统分析。此外, 在讨论信号分析与处理时, 如能对各种不同信号的表示、变换、处理提供一个统一的工具, 将使问题得到进一步简化。信号空间的概念和泛函分析的方法就是这样一种工具。在这里, 信号看作是信号空间的点, 信号的变换就是信号空间的映射。应用信号空间的概念和泛函分析的算子理论会使信号理论中一些比较抽象、难以理解的问题变得更直观、易于理解了。信号的矢量表示和信号处理算子的矩阵表示将使大家所熟悉的矢量分析方法和矩阵运算方法在信号分析和处理中得到应用。

非平稳信号, 由于不同时刻有不同的频率成分。单纯的时域表示或频域表示都不足以表征信号。Wigner 分布 (W. D) 是一种时-频混合的信号表示, 它具有许多有用性质, 将在信号分析、信号处理和信号重构中得到实际应用。

在信号检测理论、分辨理论发展的过程中 Woodward 定义了模糊函数, 并首次提出距离分辨力和测量精度取决于信号的带宽而非时宽的论断, 大大推动了信号理论的发展。在此基础上发展起来的扩谱技术和脉冲压缩技术促进了大时宽-带宽信号的研究。信号设计、波形优化是对整个系统进行最优综合的重要方面, 也是信号理论主要研究内容之一。当然信号理论涉及面很广, 内容十分丰富, 本书只是个导论性的书籍, 为读者进一步掌握近代信号理论提供必要的理论基础。

第一章 复信号分析基础

§ 1.1 概 述

(一) 实信号

信号是广义通信系统中的信息矢量,它以一定方式运载有关物理系统状态的信息。信号可用函数 $x(\cdot)$ 表示,函数的变量可以是时间 t ,也可以是空间坐标 (x, y) 或其他变量。不失一般性,今后将采用时间函数表示信号。信号有确定信号和随机信号之分,可以用时间的实函数 $x(t)$ 表示确定信号或随机信号的样本函数,称为实信号,其特点是具有有限的能量或有限的功率。如果把信号 $x(t)$ 理解为单位电阻上的电压或通过其中的电流,则

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$$

即为单位电阻上所消耗的能量。信号能量有限即

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty$$

也就是说函数 $x(t)$ 是平方可积的。我们称能量有限信号为能量型信号。随机信号及周期信号的特点是具有有限的功率而能量无限,故称为功率型信号。

(二) 频谱

一般来说,信号用时间函数表示,其形式是比较复杂的,直接对它本身进行分析和处理都是比较困难的。为了克服这种困难,常将一般的复杂信号展开成各种类型的基本信号之和或积分,基本信号除了必须满足一定的数学条件外,其主要的特点在于其简单性——或者实现起来简单,或者分析起来简单,或者二者兼而有之。在无线电技术领域,最常采用作为基本信号的是正弦信号,其复数型式称为复正弦信号。此外,还有 δ 函数, sinc 函数, walsh 函数和 z 变换函数等。这里着重介绍用正弦型基本信号对信号进行分析,即信号的频谱分析。

用具有 ω 参量的复正弦信号作为基本信号,则任何复杂调制信号都可写成

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

其中

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

对于平方可积,也就是能量有限信号,则函数 $X(\omega)$ 总是存在的,而且 $X(\omega)$ 也总是平方可积的。若以 f 为参量,以上式子还可写成具有对称的形式

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad (1.1)$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (1.2)$$

通常把 $X(f)$ 叫做信号的谱密度,或简称为频谱。一般 $X(f)$ 为 f 的复函数

$$X(f) = |X(f)| e^{j\theta(f)} \quad (1.3)$$

式中 $|X(f)|$ 为信号的振幅频谱, $\theta(f)$ 为相位频谱。

信号 $x(t)$ 与其频谱 $X(f)$ 之间的关系是一一对应的关系。换句话说,信号 $x(t)$ 给定后,信号 $X(f)$ 便是确定的,反之亦然。因此,信号既可以用时间函数 $x(t)$ 来描述,也可以用它的频谱 $X(f)$ 来描述。

式(1.2)称为信号 $x(t)$ 的傅立叶变换,而式(1.1)称为 $X(f)$ 的傅立叶反变换。信号 $x(t)$ 及其频谱 $X(f)$ 组成一组傅立叶变换对,记作

$$x(t) \rightleftharpoons X(f)$$

对实信号来说, $x(t)$ 为实函数,即 $x(t) = x^*(t)$, 于是信号频谱的复共轭为

$$X^*(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(-f)t} dt = X(-f)$$

这就是实信号频谱的对称性质:

$$X^*(f) = X(-f) \quad (1.4)$$

$$|X(f)| = |X(-f)| \quad (1.5)$$

$$\theta(f) = -\theta(-f) \quad (1.6)$$

也就是说,实信号的振幅频谱为偶函数,相位频谱为奇函数。

信号的傅立叶变换具有一些重要性质(参见附录 I),灵活运用这些性质可以较快地求出许多复杂信号的频谱^[1,2]。

一般实信号的频谱是分布在整个频率轴 ($-\infty < f < \infty$) 上的,尤其是持续时间有限的信号更是如此,也就是说,实信号具有双边频谱。式(1.4)说明,实信号频谱的正负频率两半边之间有着完全确定的关系,由一个半边频谱可推导出另一个半边频谱。

(三) 窄带信号

通信系统中信号常是这样一类信号,其频谱主要成分集中于载频附近某一频带 Δf 内,且一般总能满足 $\Delta f \ll f_0$, 两个边带频谱互不重叠,此时用一个边带频谱就可决定信号波形。这类信号称为窄带信号,其数学表达式常可写成

$$x(t) = a(t) \cos [2\pi f_0 t + \theta(t)] \quad (1.7)$$

其中 $a(t)$ 和 $\theta(t)$ 与 $\cos 2\pi f_0 t$ 相比,是时间的慢变化函数,称 $a(t)$ 为载波 $\cos 2\pi f_0 t$ 的包络函数, $\theta(t)$ 为相位调制函数。

为了简化信号和系统分析,广泛采用具有单边频谱的复信号,关于实信号用复函数表示,我们将在 § 1.2 中讨论。将介绍两种信号的复函数表示方法:希伯特变换表示法和指数函数表示法。对窄带信号来说,用指数形式的复信号代替复解析信号是完全允许的。将在 § 1.3 中介绍带通系统的复数描述以及窄带信号通过带通系统的复包络运算法。关于窄带过程(随机信号)的复函数描述将在 § 1.4 中讨论。本章最后还将介绍信号的波形参数。在学习了信号空间理论之后,我们将会看到这些信号的数字特征可视为信号空间到数集的映射。例如信号的时宽、带宽定义式就是一个二次泛函。前后对照学习,可以更深理解其物理意义。

§ 1.2 实信号的复数表示法

在交流电路分析中常采用两个方向相反的旋转矢量表示频率为 f_0 的连续波信号

$$2\cos(2\pi f_0 t) = e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t} \quad (1.8)$$

这两个旋转矢量等效于实信号 $\cos(2\pi f_0 t)$ 的两根谱线: $f = f_0$ 和 $f = -f_0$ 。式(1.8)还可改写成

$$2\cos(2\pi f_0 t) = \operatorname{Re}[2e^{j2\pi f_0 t}] = \operatorname{Re}[2e^{-j2\pi f_0 t}] \quad (1.9)$$

这里实信号 $\cos(2\pi f_0 t)$ 用一个 顺时针(或一个逆时针)旋转矢量的实部表示, 也就是只用一根正频率谱线(或一根负频率谱线)来表达余弦信号, 而与它成复共轭关系的负频率谱线是被人为地省略了, 考虑到实信号频谱的对称性质, 这样做也是完全可以的。

这种信号表示法可推广应用于任意实信号 $x(t)$, 今以 $X(f)$ 表示信号 $x(t)$ 的频谱, 则有

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^0 X(f)e^{j2\pi ft} df + \int_0^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \quad (1.10)$$

其中第一项积分变量 f 用 $-f$ 替换, 并考虑到实信号频谱的对称性质, 即 $X^*(f) = X(-f)$, 式(1.10)可改写成

$$x(t) = \int_0^{\infty} [X^*(f)e^{-j2\pi ft} + X(f)e^{j2\pi ft}] df = \operatorname{Re} \left[\int_0^{\infty} 2X(f)e^{j2\pi ft} df \right] \quad (1.11)$$

同理, 如式(1.10)中第二项积分变量 f 用 $-f$ 替换, 则得

$$x(t) = \int_{-\infty}^0 [X(f)e^{j2\pi ft} + X^*(f)e^{-j2\pi ft}] df = \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^0 2X(f)e^{j2\pi ft} df \right] \quad (1.12)$$

式(1.11)说明, 如果定义一个只包含正频率频谱的复信号 $s(t)$, 其频谱 $S(f)$ 与实信号 $x(t)$ 的频谱 $X(f)$ 保持如下关系

$$S(f) = \begin{cases} 2X(f), & f > 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

则复信号 $s(t)$ 的实部表示实信号 $x(t)$, 即

$$x(t) = \operatorname{Re}[s(t)] \quad (1.14)$$

由于复信号具有单边频谱, 将使信号和滤波器的分析运算大为简化。广泛采用的信号复数表示法有两种: 希伯特变换表示法和指数表示法, 对窄带信号来说两种表示方法近似相同。

(一) 希伯特变换表示法

通常复信号可表示为

$$s(t) = x(t) + jy(t)$$

如果要求复信号具有式(1.13)所示的单边频谱性质, 就对虚部 $y(t)$ 的选择有所限制, 式(1.13)表示把实信号频谱中的负频率边带略去, 正频率边带加倍组成一个复信号的频谱, 这样得到的复信号称为复解析信号^[3-11]或信号的预包络。

如果实信号为 $x(t) \rightleftharpoons X(f)$, 定义其复解析信号为

$$s_s(t) \rightleftharpoons S_s(f) = \begin{cases} 2X(f), & f > 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases}$$

或者表示成

$$s_e(t) \Longleftrightarrow S_e(f) = 2X(f) \cdot 1(f)$$

其中的 $1(f)$ 为频域的阶跃函数。利用傅立叶变换的相乘性质 [见附录 I] 和傅立叶变换对

$$\frac{1}{2} \delta(t) - \frac{1}{j2\pi t} \Longleftrightarrow 1(f)$$

可得

$$\begin{aligned} s_e(t) &= 2 \left[\frac{1}{2} \delta(t) - \frac{1}{j2\pi t} \right] \otimes x(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau + j \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \\ &= x(t) + j\hat{x}(t) \end{aligned} \quad (1.15)$$

其中

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \left[P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \right] \quad (1.16)$$

为 $x(t)$ 的希伯特变换式, 式中符号 P 表示取柯西积分主值, 即

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{t-\epsilon} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau + \int_{t+\epsilon}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \right]$$

为了简化起见, 今后希伯特变换式将略去符号 P 。

希伯特变换也是一种线性变换, 其反变换式可以写成 (证明见希伯特变换性质 1)

$$x(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (1.17)$$

式 (1.16) 还可写成

$$\hat{x}(t) = x(t) \otimes \frac{1}{\pi t}$$

则利用傅立叶变换相乘性质和傅立叶变换对 $\frac{1}{\pi t} \Longleftrightarrow -j \operatorname{sgn}(f)$ 可得

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) \Longleftrightarrow \hat{X}(f) &= -j \operatorname{sgn}(f) X(f) \\ &= \begin{cases} -jX(f), & f > 0 \\ jX(f), & f < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.18)$$

于是

$$j\hat{x}(t) \Longleftrightarrow \begin{cases} X(f), & f > 0 \\ -X(f), & f < 0 \end{cases}$$

又因

$$x(t) \Longleftrightarrow \begin{cases} X(f), & f > 0 \\ X(f), & f < 0 \end{cases}$$

所以

$$s_e(t) \Longleftrightarrow S_e(f) = \begin{cases} 2X(f), & f > 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases} \quad (1.19)$$

这个结果说明,解析信号实、虚二分量相加的结果使原信号负频率轴上的频谱相抵消,而正频率轴上的频谱则加倍。

原实信号能量为

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

而复解析信号能量为

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s_s(t)|^2 dt = 2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = 2E$$

(二) 希伯特变换的性质

下面介绍几个在信号分析中经常用到的希伯特变换性质^[6]

【性质-1】

$$\hat{x}(t) = -x(t) \quad (1.20)$$

【证明】 由于

$$\begin{aligned} x(t) &\Longleftrightarrow \begin{cases} X(f), & f > 0 \\ X(f), & f < 0 \end{cases} \\ \hat{x}(t) &\Longleftrightarrow \begin{cases} -jX(f), & f > 0 \\ jX(f), & f < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

显然有

$$\hat{\hat{x}}(t) \Longleftrightarrow \begin{cases} -X(f), & f > 0 \\ -X(f), & f < 0 \end{cases}$$

由此得

$$\hat{\hat{x}}(t) = -x(t)$$

由上式即可导出希伯特反变换式为

$$x(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

【性质-2】

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\hat{y}(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(t)y(t)dt \quad (1.21)$$

【证明】 根据希伯特变换公式

$$\hat{y}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\hat{y}(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(\tau)}{t - \tau} d\tau dt$$

改变积分顺序,即得

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\hat{y}(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t)}{t - \tau} dt d\tau \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t)}{\tau - t} dt d\tau \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\hat{x}(\tau)d\tau \end{aligned}$$

上式右端自变量 τ 改为 t , 即得式 (1.21)。

[性质-3]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(t)\dot{y}(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt \quad (1.22)$$

[证明] 由式 (1.20) 和式 (1.21) 直接可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(t)y(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(t)\dot{y}(t)dt$$

当 $x(t) = y(t)$ 时, 上式可改写成

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\dot{x}(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)]^2 dt \quad (1.23)$$

[性质-4]

$$\int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - y(t)]^2 dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |x_e(t) - y_e(t)|^2 dt \quad (1.24)$$

式中

$$x_e(t) = x(t) + j\dot{x}(t)$$

$$y_e(t) = y(t) + j\dot{y}(t)$$

[证明] 利用式 (1.22)、(1.23) 将上式右端展开化简可得

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x_e(t) - y_e(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} |[x(t) - y(t)] + j[\dot{x}(t) - \dot{y}(t)]|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [x^2(t) + y^2(t) - 2x(t)y(t) + \dot{x}^2(t) \\ &\quad + \dot{y}^2(t) - 2\dot{x}(t)\dot{y}(t)] dt \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} [x^2(t) + y^2(t) - 2x(t)y(t)] dt \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - y(t)]^2 dt \end{aligned}$$

由此得

$$\int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - y(t)]^2 dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |x_e(t) - y_e(t)|^2 dt$$

[例 1.1] 作为例子, 我们计算余弦信号的复解析信号。

由于 $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, 因而

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2\pi f_0 \tau)}{t - \tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos[2\pi f_0(t + \tau)]}{-\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{1}{\tau} \cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0 \tau) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\tau} \sin(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_0 \tau) \right] d\tau \end{aligned}$$

考虑到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau} \cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0 \tau) d\tau = 0$$

最后得

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{\pi} \sin(2\pi f_0 t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau} \sin(2\pi f_0 \tau) d\tau = \sin(2\pi f_0 t)$$

由此得余弦信号的复解析信号为

$$s_c(t) = \cos(2\pi f_0 t) + j \sin(2\pi f_0 t) = e^{j2\pi f_0 t}$$

文献[12]给出大量函数的希伯特变换对,这里摘录一些较常用的,列于表 1.1。

表 1.1 希伯特变换对

$x(t)$	$\hat{x}(t)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\sin(2\pi f_0 t)$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$-\cos(2\pi f_0 t)$
$\exp(j2\pi f_0 t)$	$-j\exp(j2\pi f_0 t)$
$\frac{\sin t}{t}$	$\frac{1 - \cos t}{t}$
$\text{rect}(t)$	$-\frac{1}{\pi} \ln \left \frac{t - \frac{1}{2}}{t + \frac{1}{2}} \right $
$\delta(t)$	$\frac{1}{\pi t}$
$\frac{1}{1+t^2}$	$\frac{t}{1+t^2}$

希伯特变换是一种信号积分变换(参见本书第四章),一个信号的希伯特变换,等效于信号 $x(t)$ 通过一个滤波器,其传输函数为 $H(f) = -j\text{sgn}f$ 或其冲激响应为 $h(t) = \frac{1}{\pi t}$ 。显然,这是一个理想的正交滤波器。不难证明,滤波器输出信号 $\hat{x}(t) = x(t) \otimes \frac{1}{\pi t}$ 与输入信号 $x(t)$ 正交,即

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\hat{x}(t)dt = 0$$

(证明留给读者作为练习)

还需指出,希伯特变换也是一种奇偶函数变换,即

$x(t)$	$\hat{x}(t)$
实、偶函数	实、奇函数
实、奇函数	实、偶函数

例如 $x(t) = \frac{1}{1+t^2}$ 为实偶函数, $\hat{x}(t) = \frac{t}{1+t^2}$ 则为实奇函数。

(三) 信号的指数复数形式

复解析信号在推导信号一般特性时是有效的工具,但在分析具体信号时又往往极不方便,故常采用指数形式的复信号来代替复解析信号。下面将要证明,对窄带信号来说,二者极其近似。

我们用指数形式的复信号 $s_c(t)$ 的实部来表示实信号

$$x(t) = a(t) \cos[2\pi f_0 t + \theta(t)] = \text{Re}[s_c(t)] = \frac{1}{2} [s_c(t) + s_c^*(t)] \quad (1.25)$$

其中

$$s_c(t) = a(t)e^{j[2\pi f_0 t + \theta(t)]} = u(t)e^{j2\pi f_0 t} \quad (1.26)$$

为实信号的指数复数形式,而

$$u(t) = a(t)e^{j\theta(t)} \quad (1.27)$$

为复信号 $s_c(t)$ 的复包络函数。

由于

$$x(t) \rightleftharpoons X(f)$$

$$s_c(t) \rightleftharpoons S_c(f)$$

$$u(t) \rightleftharpoons U(f)$$

根据傅立叶变换的复共轭特性和频移特性可得

$$s_c^*(t) \rightleftharpoons S_c^*(-f) \quad (1.28)$$

$$S_c(f) = U(f - f_0)$$

由式 (1.25) 并应用傅立叶变换线性特性得到

$$X(f) = \frac{1}{2} [S_c(f) + S_c^*(-f)] = \frac{1}{2} [U(f - f_0) + U^*(-f - f_0)]$$

或

$$S_c(f) - U(f - f_0) = 2X(f) - U^*(-f - f_0) \quad (1.29)$$

由式 (1.19) 和式 (1.29) 可得

$$S_c(f) - S_a(f) = \begin{cases} -U^*(-f - f_0), & f > 0 \\ U(f - f_0), & f < 0 \end{cases}$$

由此可见,用指数形式的复信号 $s_c(t)$ 逼近复解析信号 $s_a(t)$, 其逼近误差为

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= s_c(t) - s_a(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [S_c(f) - S_a(f)] e^{j2\pi ft} df \\ &= - \int_0^{\infty} U^*(-f - f_0) e^{j2\pi ft} df + \int_{-\infty}^0 U(f - f_0) e^{j2\pi ft} df \\ &= - \left[\int_{-\infty}^0 U(f - f_0) e^{j2\pi ft} df \right]^* + \int_{-\infty}^0 U(f - f_0) e^{j2\pi ft} df \\ &= 2\text{Im} \left[\int_{-\infty}^0 U(f - f_0) e^{j2\pi ft} df \right] \\ &= 2\text{Im} \left[\int_{-\infty}^{-f_0} U(f) e^{j2\pi(f+f_0)t} df \right] \end{aligned} \quad (1.30)$$

它取决于 $U(f)$ 中 $f < -f_0$ 的尾部所包含的能量。常用的通信和雷达信号多属窄带信号, $U(f)$ 中 $f < -f_0$ 的尾部只包含极少部分能量,逼近误差 $\varepsilon(t)$ 可以忽略不计,所以用指数形式的复信号代替复解析信号是完全允许的^[13]。现将窄带实信号、复信号、复包络函数间的关系归纳如下:

信号

$$x(t) = a(t) \cos [2\pi f_0 t + \theta(t)] = \text{Re}[s(t)]$$

$$s(t) = x(t) + j\hat{x}(t) \approx u(t)e^{j2\pi f_0 t}$$

$$u(t) = a(t)e^{j\theta(t)}$$

频谱

$$X(f) = X^*(-f)$$

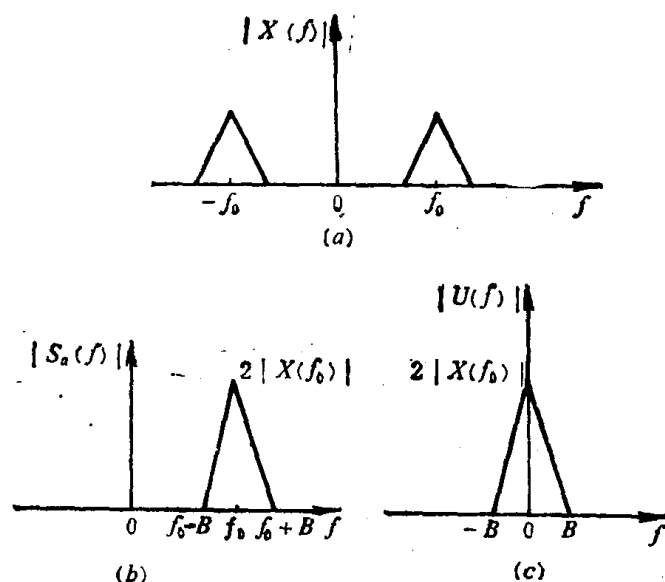
$$S(f) = \begin{cases} 2X(f), & f > 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases}$$

$$S(f) = U(f - f_0)$$

能量

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)]^2 dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt \quad (1.31)$$

窄带信号的振幅频谱 $|X(f)|$ ，其对应的复解析信号的振幅频谱 $|S_a(f)|$ 和信号复包络振幅频谱 $|U(f)|$ 之间的关系示于图 1.1。



(a) 实信号的振幅频谱 $|X(f)|$; (b) 复解析信号的振幅频谱 $|S_a(f)|$;
(c) 复包络振幅频谱 $|U(f)|$ 。

图 1.1 实信号、复解析信号及复包络振幅频谱的关系

§ 1.3 高频窄带信号通过带通线性系统的复数描述

(一) 脉冲响应和频率特性

线性系统分析的任务经常是由已知系统特性及输入信号求其输出信号。一个实际的线性非时变滤波器的特性可以用频率特性 $H(f)$ 或脉冲响应 $h(t)$ 来描述，二者组成一对傅立叶变换

$$h(t) \rightleftharpoons H(f)$$

如果输入信号为

$$x(t) \rightleftharpoons X(f)$$

则输出信号的频谱将是

$$Y(f) = H(f) \cdot X(f) \quad (1.32)$$

对 $Y(f)$ 进行傅立叶反变换，即可求得输出信号

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) X(f) e^{j2\pi ft} df \quad (1.33a)$$

这就是线性系统的频域分析法。