

大专教材

GAODENG SHUXUE

高等数学

白红 刘锐 主编

哈尔滨工业大学出版社

大学教材

UNIVERSITY TEXTBOOKS

高等数学

第三版 上册

清华大学出版社

大 专 教 材

高 等 数 学

主 编 白 红 刘 锐

副主编 王兴涛 王 勇

哈尔滨工业大学出版社

内 容 简 介

本书是为工科大学专科生编写的教材。全书共分十一章,主要内容有:函数、极限与连续、导数与微分、中值定理及其应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程、级数、空间解析几何、多元函数、傅立叶级数,并配有大量基本类型的习题,供 100 ± 20 学时使用。

大专教材
高 等 数 学
Gaodeng Shuxue
白红 刘锐 主编

哈尔滨工业大学出版社出版发行
黑龙江粮食印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 10.75 字数 280 千字
1997 年 6 月第 1 版 1997 年 6 月第 1 次印刷
印数 1—6 000

ISBN 7-5603-1215-2/O · 86 定价: 14.00 元

前 言

多年来,专科所用的高等数学教材的编写工作一直处在探索的过程中。由于没有一个统一的专科分类大纲,以往的教材都有着各自的弊端。比如,内容不适用,结构不合理,内容与习题不配套,针对性较差等问题。本书编者参照近年来的专科升本科考试,自学成材考试,以及现有各类教材的内容,尽可能使内容精炼、简洁、好理解,根据需要便于取舍,既适合于自学,又适合于讲解。

本书共分十一章,包括函数,极限与连续,导数与微分,中值定理及其应用,不定积分,定积分及其应用,常微分方程,级数,空间解析几何,多元函数,傅立叶级数,书中*号章节可根据专业需要进行取舍。

特别地,张宗达、唐余勇两位教授对本书提出了宝贵的意见和建议,编者在此表示诚挚的谢意。

由于编者的水平有限,难免存有疏漏,希读者及使用的教师批评指导。

编 者

目 录

第一章 函数	(1)
§ 1.1 函数	(1)
§ 1.2 函数的性质	(6)
§ 1.3 常用函数	(9)
第二章 极限与连续	(14)
§ 2.1 极限的概念	(14)
§ 2.2 极限的性质与运算	(18)
§ 2.3 两个重要极限	(23)
§ 2.4 无穷大量与无穷小量	(28)
§ 2.5 函数的连续性	(31)
第三章 导数与微分	(37)
§ 3.1 导数的概念	(37)
§ 3.2 导数的基本公式与四则运算求导法则	(44)
§ 3.3 复合函数求导法及其它	(49)
§ 3.4 高阶导数	(57)
§ 3.5 函数的微分	(61)
第四章 导数的应用	(65)
§ 4.1 中值定理	(65)
§ 4.2 洛比达法则	(70)
§ 4.3 函数的单调性	(75)
§ 4.4 函数的极值及其最大(小)值	(77)
§ 4.5 曲线的凹向、拐点、渐近线及函数的作图	(84)

* § 4.6 微分学在经济中的应用——边际分析与弹性分析	(92)
第五章 不定积分	(101)
§ 5.1 原函数与不定积分	(101)
§ 5.2 不定积分的性质与基本积分公式	(103)
§ 5.3 换元积分法	(107)
§ 5.4 分部积分法	(113)
* § 5.5 有理函数的积分	(116)
第六章 定积分	(124)
§ 6.1 定积分的概念与性质	(124)
§ 6.2 微积分基本定理	(129)
§ 6.3 定积分的换元积分法与分部积分法	(134)
§ 6.4 定积分的应用	(140)
§ 6.5 广义积分	(147)
第七章 微分方程	(150)
§ 7.1 微分方程的基本概念	(150)
§ 7.2 可分离变量的方程	(154)
§ 7.3 齐次方程	(157)
§ 7.4 一阶线性微分方程	(160)
§ 7.5 伯努利方程	(163)
§ 7.6 几种可积的二阶微分方程	(164)
§ 7.7 二阶常系数线性微分方程	(166)
第八章 无穷级数	(172)
§ 8.1 常数项级数的概念与性质	(172)
§ 8.2 正项级数审敛法	(178)
§ 8.3 任意项级数	(184)
§ 8.4 幂级数	(186)
§ 8.5 函数展开成幂级数	(192)
第九章 空间解析几何	(197)

§ 9.1	空间直角坐标系	(197)
§ 9.2	矢量及其线性运算	(200)
§ 9.3	矢量的乘积	(205)
§ 9.4	平面与直线的方程	(211)
§ 9.5	点、直线、平面间的关系	(215)
§ 9.6	二次曲面	(219)
第十章	多元函数	(224)
§ 10.1	多元函数的基本概念	(224)
§ 10.2	偏导数与全微分	(225)
§ 10.3	多元复合函数的求导法	(232)
§ 10.4	隐函数微分法	(234)
§ 10.5	二元函数的极值	(237)
§ 10.6	二重积分	(239)
*第十一章	傅立叶级数	(248)
§ 11.1	三角级数、三角函数系的正交性	(248)
§ 11.2	周期为 2π 的周期函数展开为傅氏级数	(252)
§ 11.3	奇函数和偶函数的傅氏级数	(256)
§ 11.4	周期为 $2l$ 的周期函数的傅氏级数	(259)
附录		(263)
习题答案		(292)

第一章 函 数

高等数学的研究对象是函数,以后各章将更加深入研究函数的各种性质、各种运算及其应用。本章将对中学里学过的函数做一总结性讨论。

§ 1.1 函 数

一、常量与变量

在现实生活和工程技术中,经常遇到各种不同的量,其中有些量在某一变化过程中始终取同一数值,称为常量;有些量在某一变化过程中可以取不同的数值,称为变量。

习惯上用 $a, b, c, \dots$ 表示常量,用 $x, y, z, \dots$ 表示变量。为研究问题方便,可以把常量看成是取同一值的变量。

当变量的取值范围是介于某两个不相同的实数之间的全体实数时,就把介于这两个实数之间的全体实数称为区间,那两个实数称为区间的端点。区间的表示如下表:

变量 x 的取值范围	区间符号	区 间 名 称	统 称
$a < x < b$	(a, b)	开 区 间	有限区间
$a \leq x \leq b$	$[a, b]$	闭 区 间	
$a < x \leq b$	$(a, b]$	半开(左开右闭)区间	
$a \leq x < b$	$[a, b)$	半开(左闭右开)区间	

注:符号 ∞ 读作无穷。

变量 x 的取值范围	区 间 符 号	统 称
全 体 实 数	$(-\infty, +\infty)$	无限区间
$a < x$	$(a, +\infty)$	
$a \leq x$	$[a, +\infty)$	
$x < b$	$(-\infty, b)$	
$x \leq b$	$(-\infty, b]$	

特别地对于正数 δ 及实数 x_0 , 称开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 为以 x_0 为中心, δ 为半径的邻域, 简称 x_0 的 δ 邻域, 而称 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 为 x_0 的去心 δ 邻域。

二、函数的定义

函数是实际问题中常见的变量与变量之间的一种关系。

例如: 半径为 r 的圆的面积 S 为

$$S = \pi r^2$$

当 r 取定某一正实数时, 按上式有唯一的一个实数 S 与之对应, 这样我们把 S 与 r 的这种对应关系称圆面积 S 是半径 r 的函数。

通过研究上面的例子, 可以给出一般的函数定义。

定义 设有两个变量 x 和 y , 如果当变量 x 在某一范围内任意取定一个值时, 变量 y 按照一定的规律总有唯一确定的值与之对应, 就称 y 是 x 的函数。记作

$$y = f(x)$$

x 称为自变量, y 称为因变量, f 表示 x 与 y 之间的对应规律。 x 的取值范围称为函数的定义域, y 的变化范围称为函数的值域。

函数的定义域、自变量与函数的对应规律和函数的值域是函数的三个要素。给出两个函数, 只要它们的三个要素相同, 则这两个函数就是同一个函数。

用符号 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$ 表示函数 $y = f(x)$ 在自变量取 $x = x_0$ 。

的函数值。

例如：当半径 $r=3$ 的圆面积为

$$S|_{r=3} = \pi r^2|_{r=3} = \pi 3^2 = 9\pi.$$

三、函数的定义域

求函数的定义域有如下的原则：

- 1° 若函数式含有分式，则分母不为零。
- 2° 若函数式含有偶次根式，则根号里的整个式子必定是非负的。
- 3° 若函数式含有对数式，则真数必为正。
- 4° 若函数式含有正切记号，则在正切记号下的式子的值不能为 $k\pi + \frac{\pi}{2}$ ，若函数式含有余切记号，则在余切记号下的式子的值不能为 $k\pi$ （其中 k 为整数）。
- 5° 若函数式含有的反正弦或反余弦记号，在反正弦或反余弦符号下的式子的绝对值要小于等于 1。
- 6° 若函数的表达式由若干项组成，则定义域是各项定义域的公共部分。
- 7° 函数式具有实际意义时，除了考虑上述要求外，还要按问题的实际意义来确定其定义域。如函数 $y = \pi x^2$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$ ，而圆面积公式 $S = \pi r^2$ 的定义域是 $(0, +\infty)$ 。

例 1 求函数 $y = \frac{1}{\lg(2-x)} + \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{1-x^2}$ 的定义域。

解 要使函数有意义，必须有

$$\begin{cases} 2-x > 0 \\ 2-x \neq 1 \\ \left| \frac{x}{2} \right| \leq 1 \\ 1-x^2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{推出} \quad \begin{cases} x > 2 \\ x \neq 1 \\ |x| \leq 2 \\ |x| \leq 1 \end{cases} \quad \text{取公共部分得 } -1 \leq x < 1,$$

所以函数的定义域为 $[-1, 1)$ 。

四、函数的表示法

1° 解析法

用式子来表示两个变量之间的函数关系的方法称为解析法，所用的式子称解析表达式。如：定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的函数

$$y=f(x)=\begin{cases} 1, & x \leq -1 \\ x^2, & -1 < x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$$

不是用解析表达式来表示的。

上面这个函数是用几个式子来表示的，这种函数称为分段函数。

函数的解析表达法便于理论研究和运算。

2° 表格法

用表格来表示两个变量之间的函数关系的方法称为表格法。所列出的表格便于查阅。如数学用表里的三角函数表等都是表格法。

3° 图象法

用坐标内的几何曲线表示函数的方法称为图象法。这种表示方法比较直观。

习题 § 1.1

1° 用区间表示适合下列不等式的变量 x 的范围。

(1) $|x| < 5$

(2) $|x-2| \leq 0.2$

(3) $x^2 < 9$

(4) $0 < |x-1| < 0.01$

(5) $|x| > x$

(6) $\left| \frac{x}{1+x} \right| > \frac{x}{1+x}$

(7) $|x^2 - 3x + 2| > x^2 - 3x + 2$

2° 求下列各函数的函数值

(1) 若 $f(x) = \frac{|x+2|}{1+x}$, 求 $f(2)$ 、 $f(-2)$ 、 $f(a)$ 、 $f(a+b)$, 其

中 $a \neq -1, a+b \neq -1$.

(2) 设 $\varphi(x) = x^3 + 1$, 求 $\varphi(x^2), [\varphi(x)]^2$.

(3) 设 $f(x) = \frac{1}{x}$, 求 $f(x+\Delta x) - f(x)$.

(4) 设 $f(x) = \lg x$, 求 $f(x) + f(x+1)$.

(5) 设 $f(x) = \arccos(\lg x)$, 求 $f(0.1), f(1), f(10)$.

(6) 设 $f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$, 求 $f(1), f(-\frac{\pi}{4}), f(-2)$.

3° 若 $g(x) = a^x$ 证明: (1) $g(-x)g(x) = 1$

(2) $g(x)g(y) = g(x+y)$.

4° 若 $F(t) = \operatorname{tg} t$ 证明: $F(a+b) = \frac{F(a)+F(b)}{1-F(a)F(b)}$.

5° 设 $f(x) = 2x^2 + \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x} + 5x$ 证明: $f(x) = f(\frac{1}{x})$.

6° 求下列函数的定义域.

(1) $y = \frac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2}$ (2) $y = \sqrt{x^2-4x+3}$

(3) $y = \frac{2x}{x^2-3x+2}$ (4) $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

(5) $y = \frac{1}{\lg(1-x)}$ (6) $y = \sqrt{\sin x - 1}$

(7) $y = \frac{1}{|x|-x}$ (8) $y = \arcsin(\lg \frac{x}{10})$

(9) $y = \lg[\cos(\lg x)]$ (10) $y = \sqrt{3-x} + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

(11) $y = \arccos \sqrt{2x}$ (12) $y = \arcsin \frac{x-3}{2}$

(13) $y = \arcsin(2+3^x)$

7° 下列函数是否相等? 说明理由.

(1) $f(x) = 1, g(x) = \frac{x}{x}$ (2) $f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2}$

(3) $f(x) = \ln x^2, g(x) = 2 \ln x$

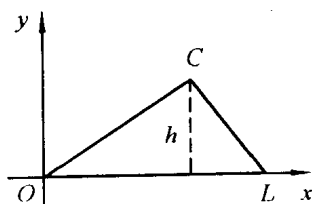
(4) $f(x) = x, \varphi(x) = (\sqrt{x})^2$

$$(5) \quad f(x) = |x|, g(x) = \sqrt{x^2}$$

$$(6) \quad f(x) = \sin(\arcsin x), g(x) = \arcsin(\sin x)$$

8° 已知圆锥的体积为 V , 试将圆锥的底半径表示为其高的函数, 并且求此函数的定义域。

9° 长为 L 的弦, 两端固定, 在 C 点外将弦提高 h 后呈图中形状。设



提高时弦上各点仅沿着垂直于两端点连线方向移动。以 x 表示弦上点的位置, y 表示 x 点处升高的高度, 试建立 y 与 x 的函数关系。

§ 1.2 函数的性质

一、单调性

定义 若函数 $y=f(x)$ 对区间 (a, b) 内任意两点 x_1 和 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数在 (a, b) 内是单调增加的; 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数在 (a, b) 内是单调减少的。

单调增加、单调减少的函数都可以称为单调函数。

如 $y=x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加函数。

$y=x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单增函数, 但在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少, 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加。

二、周期性

定义 对于函数 $y=f(x)$, 若存在一个非零常数 T 对定义域里的任何 x , 都使

$$f(x+T) = f(x)$$

成立,则称该函数是周期函数。

如果存在满足这个等式的最小正数 T ,则称 T 为周期函数 $f(x)$ 的周期。

如 $y=\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数,每隔周期 2π 图形重复出现一次。

三、奇偶性

定义 设对于函数 $f(x)$ 的定义域 X 里任意 x 都有一 $-x \in X$, 如果

$$f(-x) = -f(x)$$

则称 $f(x)$ 是奇函数,如果

$$f(-x) = f(x)$$

则称 $f(x)$ 是偶函数。

例 1 设 $y=f(x)$ 的定义域为 $[-a, a]$ (其中 $a>0$), 求证

$F(x)=f(x)-f(-x)$ 是奇函数, $G(x)=f(x)+f(-x)$ 是偶函数。

证 因为

$$\begin{aligned} F(-x) &= f(-x) - f[-(-x)] = f(-x) - f(x) \\ &= -[f(x) - f(-x)] = -F(x) \end{aligned}$$

所以 $F(x)$ 是奇函数。而

$$G(-x) = f(-x) + f[-(-x)] = f(-x) + f(x) = G(x)$$

所以 $G(x)$ 是偶函数。

从上面例子可以推出,如果一个函数的定义域是 $[-a, a]$ (其中 $a>0$), 则可以表示为奇函数与偶函数之和, 即

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)].$$

四、有界性

定义 设 $f(x)$ 的定义域是 X , 如果存在常数 $M > 0$, 对任何 $x \in X$, 都有

$$|f(x)| \leq M$$

则称 $f(x)$ 在 X 上有界。否则称 $f(x)$ 在 X 上无界。

如 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上无界。 $y = \sin \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上有界。

习题 § 1.2

1° 讨论下列函数的奇偶性

(1) $y = x^6 + 2x^3 - 4$

(2) $y = \cos x$

(3) $y = x^3 \sin x$

(4) $y = 2^x$

(5) $y = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$

(6) $y = \frac{a^x + 1}{a^x - 1}$

(7) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

(8) $y = xe^{\cos x} \sin x$

2° 证明: 两个偶函数的和为偶函数。两个奇函数的和为奇函数。

3° 证明: 两个偶函数的积为偶函数。两个奇函数的积为偶函数。
一个偶函数与一个奇函数的积为奇函数。

4° 讨论下列函数哪些具有周期性, 并指出周期。

(1) $y = \sin^2 x$

(2) $y = \sin x^2$

(3) $y = x \sin x$

(4) $y = 2$

(5) $y = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

(6) $y = \sin(x+1)$

(7) $y = \arctg(\lg x)$

(8) $y = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$

5° 求下列函数的单调增减区间

(1) $y = x^2 - 3x + 2$

(2) $y = \cos x \quad (0 \leq x \leq \pi)$

(3) $y = x + \lg x$

6° 验证下列函数在 $(0, +\infty)$ 内是单调增加的。

(1) $y=3x-6$ (2) $y=2^{x-1}$

7° 指出下列函数在所给区间是否有界？为什么？

(1) $y=\frac{1}{x}[\epsilon, +\infty), (\epsilon>0)$ (2) $y=2^{x^2}, [1, 4]$

(3) $y=\sin x+2, (-\infty, +\infty)$ (4) $y=\ln x, [1, e]$

(5) $y=\frac{1}{x^2}, (1, 2)$ (6) $y=\operatorname{tg} \frac{x}{2}, (-\pi, \pi)$

§ 1.3 常用函数

一、整标函数

如果任意给定一个自然数都有一个实数与之对应，则称该函数为整标函数。

如： $f(n)=\frac{1}{n}, n=1, 2, \dots$ 和 $g(n)=(-1)^n \frac{1}{n}, n=1, 2, \dots$ 都是整标函数。

二、隐函数

函数 $y=f(x)$ 有时也称为显函数，而由方程 $F(x, y)=0$ 确定 y 是 x 的函数称为 y 是 x 的隐函数。

如单位圆的方程

$$x^2+y^2-1=0$$

当确定 y 是 x 的隐函数时，可以解出显函数

$$y=\sqrt{1-x^2} \text{ 或 } y=-\sqrt{1-x^2}.$$

有些方程确定的隐函数是无法解出来显函数的。

如：方程 $x+y+e^{xy}=0$ 确定 y 是 x 的隐函数，就不能解出显函数。