大专教材

GAODENG SHUXUE

高等数学

白红　刘锐　主编

哈尔滨工业大学出版社

高等数学

大 专 教 材

高等数学

主 编 白 红 刘 锐

副主编 王兴涛 王 勇

哈尔滨工业大学出版社

内 容 简 介

本书是为工科大学专科生编写的教材。全书共分十一章，主要内容有：函数、极限与连续、导数与微分、中值定理及其应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程、级数、空间解析几何、多元函数、傅立叶级数，并配有大量基本类型的习题，供100±20学时使用。

大专教材
高 等 数 学
Gaodeng Shuxue
白红　刘锐　主编

哈尔滨工业大学出版社出版发行
肇东粮食印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 10.75 字数 280 千字
1997年6月第1版 1997年6月第1次印刷
印数 1—6 000

ISBN 7-5603-1215-2/O・86 定价：14.00元

前　　言

多年来，专科所用的高等数学教材的编写工作一直处在摸索的过程中。由于没有一个统一的专科分类大纲，以往的教材都有着各自的弊端。比如，内容不适用，结构不合理，内容与习题不配套，针对性较差等问题。本书编者参照近年来的专科升本科考试，自学成材考试，以及现有各类教材的内容，尽可能使内容精炼、简洁、好理解，根据需要便于取舍，既适合于自学，又适合于讲解。

本书共分十一章，包括函数，极限与连续，导数与微分，中值定理及其应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程，级数，空间解析几何，多元函数，傅立叶级数，书中＊号章节可根据专业需要进行取舍。

特别地，张宗达、唐余勇两位教授对本书提出了宝贵的意见和建议，编者在此表示诚挚的谢意。

由于编者的水平有限，难免存有疏漏，希读者及使用的教师批评指导。

编　者

目　　录

第一章 函　　数

高等数学的研究对象是函数，以后各章将更加深入研究函数的各种性质、各种运算及其应用。本章将对中学里学过的函数做一总结性讨论。

§1.1 函　　数

一、常量与变量

在现实生活和工程技术中，经常遇到各种不同的量，其中有些量在某一变化过程中始终取同一数值，称为常量；有些量在某一变化过程中可以取不同的数值，称为变量。

习惯上用 $a,b,c,\cdots$ 表示常量，用 $x,y,z,\cdots$ 表示变量。为研究问题方便，可以把常量看成是取同一值的变量。

当变量的取值范围是介于某两个不相同的实数之间的全体实数时，就把介于这两个实数之间的全体实数称为区间，那两个实数称为区间的端点。区间的表示如下表：

变量 x 的取值范围	区间符号	区间名称	统称
$a<x<b$	(a,b)	开区间	有限区间
$a\leqslant x\leqslant b$	$[a,b]$	闭区间	
$a<x\leqslant b$	$(a,b]$	半开(左开右闭)区间	
$a\leqslant x<b$	$[a,b)$	半开(左闭右开)区间	

注：符号∞读作无穷。

变量 x 的取值范围	区 间 符 号	统 称
全 体 实 数	$(-\infty, +\infty)$	无限区间
$a<x$	$(a, +\infty)$	
$a\leqslant x$	$[a, +\infty)$	
$x<b$	$(-\infty, b)$	
$x\leqslant b$	$(-\infty, b]$	

特别地对于正数 δ 及实数 x_o，称开区间 $(x_o-\delta, x_o+\delta)$ 为以 x_o 为中心，δ 为半径的邻域，简称 x_o 的 δ 邻域，而称 $(x_o-\delta, x_o)\cup(x_o, x_o+\delta)$ 为 x_o 的去心 δ 邻域。

二、函数的定义

函数是实际问题中常见的变量与变量之间的一种关系。

例如：半径为 r 的圆的面积 S 为

$$S=\pi r^2$$

当 r 取定某一正实数时，按上式有唯一的一个实数 S 与之对应，这样我们把 S 与 r 的这种对应关系称圆面积 S 是半径 r 的函数。

通过研究上面的例子，可以给出一般的函数定义。

定义 设有两个变量 x 和 y，如果当变量 x 在某一范围内任意取定一个值时，变量 y 按照一定的规律总有唯一确定的值与之对应，就称 y 是 x 的函数。记作

$$y=f(x)$$

x 称为自变量，y 称为因变量，f 表示 x 与 y 之间的对应规律。x 的取值范围称为函数的定义域，y 的变化范围称为函数的值域。

函数的定义域、自变量与函数的对应规律和函数的值域是函数的三个要素。给出两个函数，只要它们的三个要素相同，则这两个函数就是同一个函数。

用符号 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_o)$ 表示函数 $y=f(x)$ 在自变量取 $x=x_o$

的函数值。

例如：当半径 $r=3$ 的圆面积为

$$S|_{r=3}=\pi r^2|_{r=3}=\pi 3^2=9\pi.$$

三、函数的定义域

求函数的定义域有如下的原则：

1° 若函数式含有分式，则分母不为零。

2° 若函数式含有偶次根式，则根号里的整个式子必定是非负的。

3° 若函数式含有对数式，则真数必为正。

4° 若函数式含有正切记号，则在正切记号下的式子的值不能为 $k\pi+\frac{\pi}{2}$，若函数式含有余切记号，则在余切记号下的式子的值不能为 $k\pi$（其中 k 为整数）。

5° 若函数式含有的反正弦或反余弦记号，在反正弦或反余弦符号下的式子的绝对值要小于等于 1。

6° 若函数的表达式由若干项组成，则定义域是各项定义域的公共部分。

7° 函数式具有实际意义时，除了考虑上述要求外，还要按问题的实际意义来确定其定义域。如函数 $y=\pi x^2$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$，而圆面积公式 $S=\pi r^2$ 的定义域是$(0,+\infty)$.

例 1 求函数 $y=\frac{1}{\lg(2-x)}+\arcsin\frac{x}{2}+\sqrt{1-x^2}$的定义域。

解 要使函数有意义，必须有

$$\begin{cases}2-x>0\\2-x\neq1\\\left|\frac{x}{2}\right|\leqslant1\\1-x^2\geqslant0\end{cases}\text{推出}\begin{cases}x>2\\x\neq1\\|x|\leqslant2\\|x|\leqslant1\end{cases}\text{取公共部分得}-1\leqslant x<1,$$

所以函数的定义域为$[-1,1)$.

四、函数的表示法

1° 解析法

用式子来表示两个变量之间的函数关系的方法称为解析法，所用的式子称解析表达式。如：定义域为$(-\infty,+\infty)$的函数

$$y=f(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant -1\\ x^2, & -1<x\leqslant 1\\ x, & x>1\end{cases}$$

不是用解析表达式来表示的。

上面这个函数是用几个式子来表示的，这种函数称为分段函数。

函数的解析表达法便于理论研究和运算。

2° 表格法

用表格来表示两个变量之间的函数关系的方法称为表格法。所列出的表格便于查阅。如数学用表里的三角函数表等都是表格法。

3° 图象法

用坐标内的几何曲线表示函数的方法称为图象法。这种表示方法比较直观。

习题 §1.1

1° 用区间表示适合下列不等式的变量 x 的范围。

(1) $|x|<5$　　(2) $|x-2|\leqslant 0.2$

(3) $x^2<9$　　(4) $0<|x-1|<0.01$

(5) $|x|>x$　　(6) $\left|\dfrac{x}{1+x}\right|>\dfrac{x}{1+x}$

(7) $|x^2-3x+2|>x^2-3x+2$

2° 求下列各函数的函数值

(1) 若 $f(x)=\dfrac{|x+2|}{1+x}$，求 $f(2)$、$f(-2)$、$f(a)$、$f(a+b)$，其

中 $a\neq-1, a+b\neq-1$.

(2) 设 $\varphi(x)=x^3+1$，求 $\varphi(x^2)$，$[\varphi(x)]^2$.

(3) 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，求 $f(x+\Delta x)-f(x)$.

(4) 设 $f(x)=\lg x$，求 $f(x)+f(x+1)$.

(5) 设 $f(x)=\arccos(\lg x)$，求 $f(0.1)$，$f(1)$，$f(10)$.

(6) 设 $f(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<1\\ 0, & |x|\geqslant 1\end{cases}$，求 $f(1)$，$f(-\dfrac{\pi}{4})$，$f(-2)$.

3° 若 $g(x)=a^x$ 证明：(1) $g(-x)g(x)=1$

(2) $g(x)g(y)=g(x+y)$.

4° 若 $F(t)=\operatorname{tg} t$ 证明：$F(a+b)=\dfrac{F(a)+F(b)}{1-F(a)F(b)}$.

5° 设 $f(x)=2x^2+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{5}{x}+5x$ 证明：$f(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

6° 求下列函数的定义域。

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$ (2) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$

(3) $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$ (4) $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

(5) $y=\dfrac{1}{\lg(1-x)}$ (6) $y=\sqrt{\sin x-1}$

(7) $y=\dfrac{1}{|x|-x}$ (8) $y=\arcsin(\lg\dfrac{x}{10})$

(9) $y=\lg[\cos(\lg x)]$ (10) $y=\sqrt{3-x}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$

(11) $y=\arccos\sqrt{2x}$ (12) $y=\arcsin\dfrac{x-3}{2}$

(13) $y=\arcsin(2+3^x)$

7° 下列函数是否相等？说明理由。

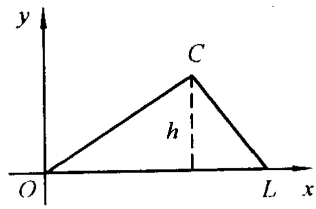
(1) $f(x)=1, g(x)=\dfrac{x}{x}$ (2) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$

(3) $f(x)=\ln x^2, g(x)=2\ln x$

(4) $f(x)=x, \varphi(x)=(\sqrt{x})^2$

(5) $f(x)=|x|, g(x)=\sqrt{x^2}$

(6) $f(x)=\sin(\arcsin x), g(x)=\arcsin(\sin x)$



8° 已知圆锥的体积为 V，试将圆锥的底半径表示为其高的函数，并且求此函数的定义域。

9° 长为 L 的弦，两端固定，在 C 点外将弦提高 h 后呈图中形状。设提高时弦上各点仅沿着垂直于两端点连线方向移动。以 x 表示弦上点的位置，y 表示 x 点处升高的高度，试建立 y 与 x 的函数关系。

§1.2 函数的性质

一、单调性

定义 若函数 $y=f(x)$ 对区间 (a,b) 内任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数在 (a,b) 内是单调增加的；当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数在 (a,b) 内是单调减少的。

单调增加、单调减少的函数都可以称为单调函数。

如 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加函数。

$y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单增函数，但在 $(-\infty,0)$ 内单调减少，在 $(0,+\infty)$ 内单调增加。

二、周期性

定义 对于函数 $y=f(x)$，若存在一个非零常数 T 对定义域里的任何 x，都使

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，则称该函数是周期函数。

如果存在满足这个等式的最小正数 T，则称 T 为周期函数 $f(x)$ 的周期。

如 $y=\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数，每隔周期 2π 图形重复出现一次。

三、奇偶性

定义 设对于函数 $f(x)$ 的定义域 X 里任意 x 都有 $-x\in X$，如果

$$f(-x)=-f(x)$$

则称 $f(x)$ 是奇函数，如果

$$f(-x)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 是偶函数。

例 1 设 $y=f(x)$ 的定义域为 $[-a,a]$（其中 $a>0$），求证

$F(x)=f(x)-f(-x)$ 是奇函数，$G(x)=f(x)+f(-x)$ 是偶函数。

证 因为

$$\begin{aligned}F(-x)&=f(-x)-f[-(-x)]=f(-x)-f(x)\\&=-[f(x)-f(-x)]=-F(x)\end{aligned}$$

所以 $F(x)$ 是奇函数。而

$$G(-x)=f(-x)+f[-(-x)]=f(-x)+f(x)=G(x)$$

所以 $G(x)$ 是偶函数。

从上面列子可以推出，如果一个函数的定义域是 $[-a,a]$（其中 $a>0$），则可以表示为奇函数与偶函数之和，即

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)].$$

四、有界性

定义 设 $f(x)$ 的定义域是 X，如果存在常数 $M>0$，对任何 $x\in X$，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称 $f(x)$ 在 X 上有界。否则称 $f(x)$ 在 X 上无界。

如 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上无界。$y=\sin\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上有界。

习题 § 1.2

1° 讨论下列函数的奇偶性

(1) $y=x^6+2x^3-4$ (2) $y=\cos x$

(3) $y=x^3\sin x$ (4) $y=2^x$

(5) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$ (6) $y=\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$

(7) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ (8) $y=xe^{\cos x}\sin x$

2° 证明：两个偶函数的和为偶函数。两个奇函数的和为奇函数。

3° 证明：两个偶函数的积为偶函数。两个奇函数的积为偶函数。一个偶函数与一个奇函数的积为奇函数。

4° 讨论下列函数哪些具有周期性，并指出周期。

(1) $y=\sin^2 x$ (2) $y=\sin x^2$

(3) $y=x\sin x$ (4) $y=2$

(5) $y=1+\cos(\frac{\pi}{2}x)$ (6) $y=\sin(x+1)$

(7) $y=\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}x)$ (8) $y=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数}\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$

5° 求下列函数的单调增减区间

(1) $y=x^2-3x+2$ (2) $y=\cos x\quad(0\leqslant x\leqslant\pi)$

(3) $y=x+\lg x$

6° 验证下列函数在$(0,+\infty)$内是单调增加的。

(1) $y=3x-6$　　(2) $y=2^{x-1}$

7° 指出下列函数在所给区间是否有界？为什么？

(1) $y=\frac{1}{x}[\varepsilon,+\infty),(\varepsilon>0)$　　(2) $y=2^{x^2},[1,4]$

(3) $y=\sin x+2,(-\infty,+\infty)$　　(4) $y=\ln x,[1,e)$

(5) $y=\frac{1}{x^2},(1,2)$　　(6) $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2},(-\pi,\pi)$

§1.3 常用函数

一、整标函数

如果任意给定一个自然数都有一个实数与之对应，则称该函数为整标函数。

如：$f(n)=\frac{1}{n},n=1,2,\cdots\cdots$ 和 $g(n)=(-1)^n\frac{1}{n},n=1,2,\cdots\cdots$ 都是整标函数。

二、隐函数

函数 $y=f(x)$有时也称为显函数，而由方程 $F(x,y)=0$ 确定 y 是 x 的函数称为 y 是 x 的隐函数。

如单位圆的方程

$$x^2+y^2-1=0$$

当确定 y 是 x 的隐函数时，可以解出显函数

$$y=\sqrt{1-x^2} \text{ 或 } y=-\sqrt{1-x^3}.$$

有些方程确定的隐函数是无法解出来显函数的。

如：方程 $x+y+e^{xy}=0$ 确定 y 是 x 的隐函数，就不能解出显函数。