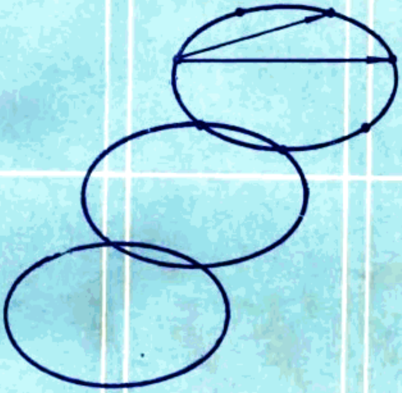
龙述尧 刘腾喜 蔡松柏 译
陈祥福 王 磊 李家宝 校



边界单元法的理论和工程应用

国防工业出版社

内 容 简 介

边界元法和有限元法一样，是另一种重要的数值计算方法，它是解决大型、复杂结构问题，特别是复杂边界条件的问题的一种有效的计算方法，目前正得到日益广泛的应用。

本书在简要地介绍有关数值计算的理论基础之后，系统而全面地介绍了各种工程问题的边界元解法。其主要内容有：近似方法，位势问题，插值函数，扩散问题，弹性静力学问题，非弹性问题，弹塑性问题，非线性材料问题，板的弯曲，波的传播问题，振动问题，流体力学问题，与其它数值计算方法耦合问题等。同时还给出了二维弹性静力学问题的计算机程序。每章均有很多的例题供读者参考。

本书可作为高等院校有关专业的教材，也可供从事结构设计、强度计算等专业的工程技术人员学习使用。

Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering

C. A. Brebbia J. C. F. Telles L. C. Wrobel

Springer-Verlag 1984

边界单元法的理论和工程应用

〔英〕 C. A. 布瑞比亚
〔巴西〕 J.C.F. 泰勒斯 著
L.C. 诺贝尔
龙述尧 刘腾喜 蔡松柏 译
陈祥福 王磊 李家宝 校

☆

国防工业出版社出版 发行

(北京市车公庄西路老虎庙七号)

湖南大学印刷厂印装

☆

850×1168 1/32 印张18.75 461千字

1988年11月第一版 1988年11月第一次印刷 印数：00,001—2,070册

ISBN 7-118-00468-5/TB18 定价：10.50元

前　言

作者曾经两次打算为本书写一个满意的前言，但都未能简洁地写出其主要内容。其主要原因是作者对名不符实的所谓前言十分厌恶。因此，这里只有将我们有关写本书前言的两次会谈情况如实地记录下来作为前言。

第一次会谈

（作者开始讨论撰写该书的前言。地点是在里约热内卢(Rio de Janeiro)的一个游泳池旁边。我们采用苏格拉底(Socrates)、柏拉图(Plato)和亚里士多德(Aristotle)的假名来区别，作者并不是出于虚荣而是因为这些杰出的哲学家具有各自不同的观点。）

苏格拉底：我一直在阅读最近发表的一些关于积分方程和边界元的文献，而感到最不畅快的是缺乏一本综合性的书。

柏拉图：对，我恰好也在看一本匆忙写就的书。我猜测作者是在利用当前人们对于这个课题的兴趣，并且没有理解该方法的基本原理。

亚里士多德：这是因为他们缺乏有关研究课题的直接经验就忙于写书。我总是认为，你必须全面研究问题并围绕该问题建立起你的理论！

柏拉图：嗯，好吧！亚里。有时候，这也许是一种原因吧！但你必须记住：对任何方法，基本的数学概念都是必不可少的。

苏格拉底：我觉得这样的讨论根本不会得出什么结果。我提议：根据我们的研究经验和基本近似方法的基础知识来写一

本书，并设法把我们过去的有限元背景与新方法融为一体。我想我们应该马上确定目录和前言。

柏拉图和亚里士多德：说得对！说得对！

苏格拉底：我想我们应该强调：我们采用适合于工程师和其他科学家们简单明了的方法，只写我们直接经历的事情并且不用太多的数学推导。为了使我们的书会被广泛地传播，应该以正直和诚实的态度来写，在应该给出参考的地方给出其他作者的名字，但是避免提到每一个人。这里首要的是，该书应该是条理清楚而且实用的。

柏拉图：我觉得我们应该在书中包括基本思想的详细讨论，积分方程是怎样形成的，并指出它们类似于三维物体的二维投影，…

苏格拉底：不要说了！请记住你不是“那个”柏拉图！

柏拉图：很抱歉，我离题了。

亚里士多德：我认为该书应该给出许多应用实例，以便读者看了这些实例后可以学会怎样使用这种方法。

苏格拉底：我赞成。而且我们应该注意：在一本书中，为了掩饰贫乏的内容，塞进许多图表和例题是容易的。在我们的书中，所有的实例都应该是恰当的。

亚里士多德：我们在本书中还应该包含一个完整的计算机程序，给那些希望有计算机程序的读者从事这种方法提供工作经验。

苏格拉底：这是一个好主意，假若对程序作出充分的解释并和理论结合起来的话，现今任何人都会在一本书中附加一个计算机程序。但是这需要有把程序和理论适当结合起来的工作经验。

柏拉图：我不知道我们是否会写出这样的书，似乎不太可能。

苏格拉底：不，有可能的。不可能吗？好吧，我要去游泳了。

第二次会谈

（底稿已经完成了。作者正坐在底稿的周围。现在的地点是在南安普顿（Southampton），四月柔和的阳光透过窗口照射进来，作者正在聚精会神地看底稿。）

柏拉图：我简直不相信，真的写出来了！

苏格拉底：噢，还没有彻底完成呢！你将会看到出版公司要我们怎样删改它。原则上，他们总是要这样做的。我想会删去20～25%吧！

亚里士多德：真遗憾！我们从头至尾已对底稿修改了三次，已经完美无缺了！

柏拉图：我们虽然已达到了目的，但还不是尽善尽美，不过仍然是一本好书。

苏格拉底：对的。我们应该继续为此而奋斗，直到出版公司出版了整部著作。我们也有某些权利不作修改（看了一会儿合同并且决定）。不，我们不作删改！但是我们可以试一试…

亚里士多德：假若一旦书出版了，我们还必须向同事们解释这是一本精心撰写的书，一本具有许多应用实例的著作。应该特别强调：（i）该著作具有一个完整的体系；（ii）深入研究了很多课题；（iii）它由一直运用该方法的科学工作者撰写；（iv）该书写得认真并且条理清楚。

柏拉图：那么我们怎样做到这一点呢？

亚里士多德：（眼睛向下看）我不知道…

苏格拉底：我知道！我们应该写一个前言（每一个人都同意）。好吧，让我们开始："在边界单元领域中的最新最近进展和发展…等等。"

亚里士多德和柏拉图：别再说了！！

关于本书内容

本书的目的是提出一个新颖的综合处理边界元法的方法。

本书的重点放在非线性和与时间有关问题的应用以及一系列可以用边界元法来求解的新问题上。

作者所遵循的方法是：以工程师容易理解的方式将边界元法作为有限元法的一种分枝来叙述。数学方法总是满足其应用的需要。这里，读者将会发现在这本权威的专著中，成功地处理了从基础到计算机应用的各个专题，包括一个可运行的完整计算机程序。

作者

目　　录

第一章　近 似 方 法

1.1　引　　言

近几年来，工程师和应用科学家们已非常熟悉数值方法，这些方法是建立在所描述物理问题的方程或一组方程近似解的基础上。第一个广泛为人们所熟悉的近似方法是有限差分法，它利用对变量的局部展开，一般用截断的泰勒（Taylor）级数来逼近问题的控制方程。其方法也可以看作为加权残值法的一种特殊情况，如同在1.8节中所阐述的。

有限元法吸引分析科学家的注意主要在于，它既具有把介质划分为一系列单元的特点，也能够与问题的物理意义联系起来。有关有限元的现存文献目前已经相当广泛，它包括结构[1]和流体流动[2]以及其他各类问题。这种方法是建立在变分原理的基础上，但更一般地说是建立在加权残值法的基础上。在60年代初期，有限元法引起人们极大的注意有两个重要原因：（1）它推动了在计算技术方面大量的研究，并编写出了有效的工程软件；（2）它反过来又促进了变分法和加权残值法这些基本物理原理的深入研究。

上述第一点是新的、强大的计算机出现的必然结果。这时的计算机是第二代机器，它能够解算包含大量数据储存和运算的工程问题。当时，由于计算机技术的不断发展（包括开发第三代机器）分散了科学家们对发展数学方法及其基本原理的注意力，这就是上述的第二点。这些数学方法可追溯到计算机以前的时期[3,4]，并已用不同的方法去求解问题的控制方程，如

伽辽金（Galerkin）法、配点法、最小二乘法、直线法，矩阵级数法或变换法，以及不同方法的组合等。值得庆幸的是这些方法没有被人们所遗忘，并在有限元的文献中重新得到应用，只是有时候名称有点不同而已，例如伽辽金有限元法、有限条法、某些时间积分方法等等。近似分析方法的另一个重要进展是混合原理的研究，而且发现要逼近的物理问题方程，我们可以有许多方法来求解。这些近似方法对于各种数值计算机的实施是十分重要的。混合法可以追溯到赖斯纳（Reissner）[5]的论文，更确切地说，有限元混合法是卞（Pian）[6]首先提出的，结构力学中的混合法是鹫津一郎（Washizu）[7]在其书中作了精辟的阐述。

至今，积分方程法被认为是与近似方法关系不大的另一类型的分析方法。在欧洲，这种方法为人们所知的是许多俄国学者的工作，例如穆斯海里什维里(Muskhelishvili)[8]、米赫林（Mikhlin）[9]、库帕特拉兹（Kupradze）[10]和斯米尔洛夫（Smirnov）[11]。但他们并不为工程师们所接受。开洛克（Kellogg）[12]是积分方程法的先驱，他应用积分方程求解拉普拉斯（Laplace）型问题。积分方程法主要用在流体力学和一般位势问题中，并叫做“源”法。它是一种“间接”分析方法，即未知量不是物理问题的变量。在60和70年代里，由于贾斯旺（Jaswon）[13]、西姆（Symm）[14]、马索内特（Massonet）[15]、赫斯（Hess）[16]和许多其他科学家的开拓性工作，使这个方法不断得到发展。

很难确切地说是谁首先提出“直接”分析方法。在库帕特拉兹的书[10]中，这种方法以不同的形式出现。然而，从工程观点来看，这个方法应源于克诺斯(Cruse)和里佐（Rizzo）[17]在弹性静力学方面的工作似乎是公正的。在本书中主要采用直接方法，因为它更为工程师和应用科学家们所喜爱。

自60年代初期以来，在南安 普顿(Southampton)大学专门成立了一个研究小组致力于积分方程的应用，主要求解应力分析问题。很不幸，问题的描述方法、定义适当的格林 (Green) 函数遇到了困难，以及有限元法的同时出现等都使得其重要性大大地减小。在70年代初期，当时有限元的发展已开始采用边界积分方程来寻找其出路，并重点研究一般的曲线单元。但是，怎样把边界积分方程和其它近似方法有机地结合起来仍然没有解决。这个工作是由布瑞比亚 (Brebbia) 完成的。在70年代中他就致力于研究各种近似方法之间的关系。1978年，他以“边界单元”为名的第一本书[18]标志着研究工作达到了高潮。最近，他的研究工作推广到包含与时间有关的问题和非线性问题[19]。在1978、1980和1982年，在南安普顿大学举行了三次重要国际会议，而1981年在加里佛尼亚 (California) 举行了另一次国际会议。这些会议的论文集是至今关于这个主题仅有的、直到现在也是常用的参考文献[20~23]。

本章将阐述各种主要方法的共同基础，特别是有关边界单元法的。这里最重要的是：当利用这些方法时，要理解其近似方法的意义并能够把边界单元法和其它数值方法结合起来。

1.2 基本定义

在本书中，我们主要关注的是某些特殊物理问题的微分方程求解。这些方程可能是椭圆、抛物线和双曲线型的。这里只考虑椭圆方程，假定用算子$\mathscr{L}$表示它们，即

$$\mathscr{L}(u)=b \quad \text{在}\Omega\text{内}. \tag{1.1}$$

算子$\mathscr{L}$定义为一种运算，当它作用于函数u时，导致另一函数b。Ω表示空间区域，通常用坐标$x_i(i=1, 2, 3)$表示。在一维问题中，只用x表示。

我们考虑算子$\mathscr{L}$为微分算子，例如

$$\mathscr{L}(\quad)=\frac{d^2()}{dx^2}$$

或

$$\mathscr{L}(\quad)=\frac{d^4()}{dx^4}+\frac{d()}{dx}+(). \qquad (1.2)$$

对二维拉普拉斯方程有

$$\mathscr{L}()=\frac{\partial^2()}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2()}{\partial x_2^2}.$$

当算子作用于函数u时，应该把该函数代入圆括号内。虽然函数u在这里被视为一个标量，但值得注意的是它也可以是一个矢量。正如在固体力学中一样，u可以由矢量$\mathbf{u}$代替，它的分量是三个位移。

我们考虑式（1.1）的齐次形式为

$$\mathscr{L}(u)=0 \quad 在\Omega内. \qquad (1.3)$$

内积可以定义为

$$\int_\Omega \mathscr{L}(u)w\,d\Omega=0. \qquad (1.4)$$

有时候这些乘积可用括号$\langle\mathscr{L}(u),\ w\rangle$来表示，也可能存在与式（1.4）不同的内积定义。但在大多数情况下，我们将采用式（1.4）。对内积式（1.4）进行分部积分直至消除u的所有导数为止。这就导致了内积的“转置”形式且由于分部积分产生了一系列的边界项。一般可以写成

$$\int_\Omega \mathscr{L}(u)w\,d\Omega=\int_\Omega u\mathscr{L}^*(w)\,d\Omega+\int_\Gamma [S^*(w)G(u)-G^*(w)S(u)]\,d\Gamma. \qquad (1.5)$$

Γ是域Ω的外表面，而S和G是由于分部积分而出现的微分算子。由定义，$S^*(w)$包含由于积分的初始阶段产生的带w的

项，而 $S(u)$ 包含对应的带 u 的项。

算子$\mathscr{L}^*$称为$\mathscr{L}$的伴随算子。如果$\mathscr{L}^*=\mathscr{L}$，则$\mathscr{L}$叫做自伴的，此时，$G=G^*$且$S=S^*$。一个算子的自伴性类似于矩阵的对称性。除了确定算子是否自伴以外，分部积分还产生两种不同类型的边界条件。具有给定值$S(u)$的，称为本质边界条件；而具有给定值$G(u)$的称为非本质或自然边界条件。在区域的表面人们可以随便指定哪一种边界条件。然而本质边界条件必须在某些点上给定以便使解是唯一的。令Γ_1和Γ_2是总表面Γ上互补的两部分，我们可以把自伴问题（$\mathscr{L}^*=\mathscr{L}$）的边界条件表述为

$$\left.\begin{array}{l} G(u)\ \text{在}\ \Gamma_2\ \text{上给定} \\ S(u)\ \text{在}\ \Gamma_1\ \text{上给定} \end{array}\right\}\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2.$$

一个自伴算子是正定的，如果对于所有的u都有

$$\int_{\Omega}(\mathscr{L}(u))u\,d\Omega\geqq 0, \tag{1.6}$$

上式仅在$u\equiv 0$的情形才等于零。为了确定$\mathscr{L}$是否是正定的，我们可以用分部积分的方法来积分内积直至把它化为包含同阶导数的形式为止。这一运算处在把$\mathscr{L}$变换为$\mathscr{L}^*$过程的中点。在建立求解格式以及构造变分表述时，正定性是一个极其有价值的性质。

例1.1 考虑方程

$$\mathscr{L}(u)=\frac{d^2u}{dx^2}-\lambda^2u=0 \qquad 0<x<1. \tag{a}$$

我们可以构成内积

$$\int_0^1\mathscr{L}(u)w\,dx=\int_0^1\left\{\frac{d^2u}{dx^2}-\lambda^2u\right\}w\,dx=0. \tag{b}$$

然后分部积分一次，得