最新版 九年义务教育教科书同步辅导

名师指导

MINGSHI ZHIDAO

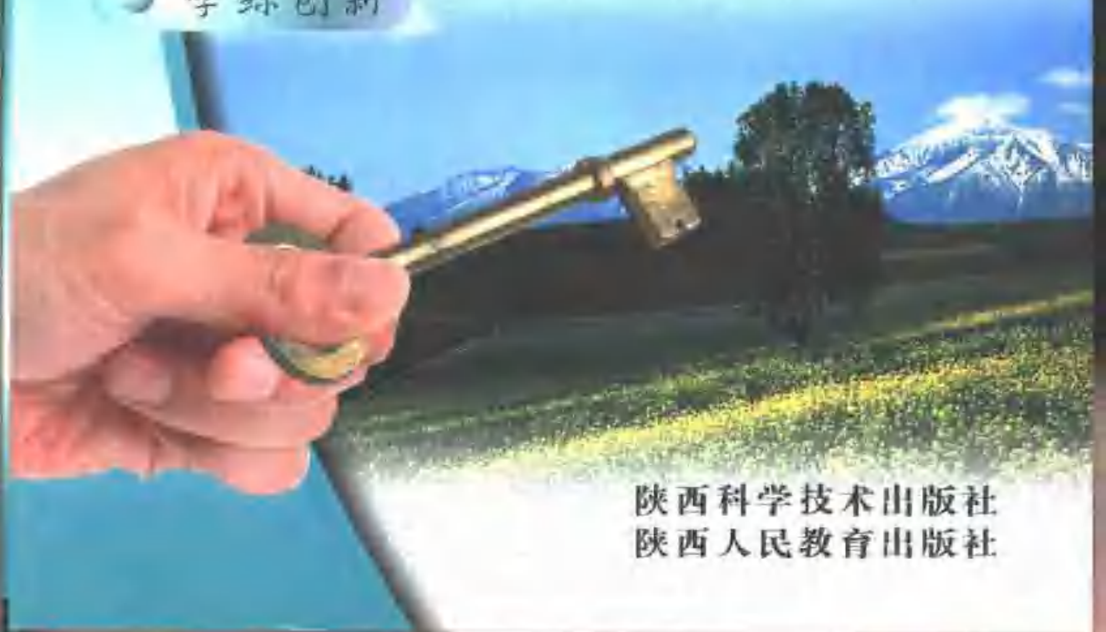
黄冈学法

黄冈市《黄冈学法》课题组 编

数学

（初三全一册）

- 学法宝典
- 黄冈真经
- 设计优化
- 学练创新



陕西科学技术出版社
陕西人民教育出版社

名师指导
MINGSHI ZHIDAO

黄冈学法

数学

初三 全一册

总 主 编 方水清 程金辉 何 郁
本册主编 贺立勇 舒志方

本册编委(排名不分先后)
贺国民 方朝红 张光君 袁爱喜
杨旺涛 郑单新 贺立勇 舒志方
汪多松 漆水章 舒志春 邵艳生
熊桂宏 倪春武 张胜春 武玉桂
龙建平 于剑乔

陕西科学技术出版社
陕西人民教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

名师指导·黄冈学法.数学.初中二年级.全一册/《黄冈学法》课题组编.—西安:陕西科学技术出版社,2002.6

ISBN 7-5369-3519-6

Ⅰ.名… Ⅱ.黄… Ⅲ.数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 040279 号

名师指导·黄冈学法

总主编 方水清 程金辉 何 郁

书 名 数学·初二全一册

主 编 贺立勇 舒志方

出版者 陕西科学技术出版社

陕西人民教育出版社

西安北大街 131 号 邮编 710003

电话(029)7211894 传真(029)7218236

http://www.snstp.com

发行者 陕西科学技术出版社

电话(029)7212206 7260001

传真(029)7257895

印 刷 西安建筑科技大学印刷厂

规 格 880mm×1230mm 32 开本

印 张 12

字 数 450 千字

版 次 2002 年 7 月第 1 版

2002 年 7 月第 1 次印刷

定 价 12.00 元

前 言

解读黄冈神话 奉献学法精髓

湖北黄冈，山青水秀，人杰地灵，自古有“惟楚有才，尽在黄冈”的美誉。如今的黄冈教育更是星光灿烂，成绩非凡——连续10年高考成绩居全国之首；在国际奥林匹克数、理、化竞赛中获5金、3银、1铜9枚奖牌。这些成绩源之于科研兴校，得之于素质教育。

《名师指导·黄冈学法》融汇黄冈多年的教研成果，解读黄冈教学神话，她围绕一个“学”字做文章：以学生为主体，以学法为核心，以学练为手段，以会学和学会为目的。

《名师指导·黄冈学法》由黄冈市著名特级教师、高级教师担纲，按人教社最新修订版教材编写，是小学一年级到高中三年级的同步辅导、训练读物。每课(每单元)开设以下窗口：

学点聚焦 阐明学习目的和要求，三言两语，学得明白。

学法指导 指明学习方法。【重点剖析】抓住知识主干，从知识的广度和深度分析问题。【疑难解析】针对学习中的疑点、难

点进行解析，帮助学生扫除学习障碍。

学解习题 教学解题方法【导析】点拨解题思路。【解答】进行解题示范。【解后反思】总结解题规律。

学习误区 关注解题过程中带有普遍性、倾向性的失误。【错解】暴露错误思维。【错因】分析错误原因，防止学习失误。

学练结合 夯实基础，提高能力。为了更好地落实“分层教学，分类指导”的教学理念，特别区分基础、方法、能力三种题型。用题落实基础，用题掌握方法，用题提高能力。在学中练，在练中学。

学生小结 教师提示，学生小结。帮助学生梳理知识，培养学生良好的学习习惯。

单元达标和期中、期末测试 检验学习情况，帮助学生轻松过关。

虽然我们进行了大量的探索和努力，以审慎的态度和高度的责任感编写本套丛书，但错漏之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

本丛书在编写过程中，得到了教育界有关专家和许多同仁的热情关心和支持，在此一并表示衷心的感谢！

黄冈市《黄冈学法》课题组

2002年6月18日

目 录

代数部分

几何部分

代数部分

第十二章 一元二次方程

12.1 用公式解一元二次方程

学点聚焦

1. 理解整式方程和一元二次方程的概念.

2. 知道一元二次方程的一般表达式,会把一元二次方程化成一般形式.

3. 初步掌握用直接开平方法解一元二次方程,会用直接开平方法解形如$(x-a)^2=b(b\geqslant0)$的方程.

4. 初步掌握用配方法解一元二次方程,会用配方法解数字系数的一元二次方程.

5. 掌握一元二次方程求根公式的推导,熟练运用求根公式解一元二次方程.

学法指导

重点剖析

1. 一元二次方程的概念.

(1)只含有一个未知数,并且未知数的最高次数是2的整式方程,叫做一元二次方程.即一元二次方程必须满足以下三个条件:①方程是一个整式方程;②它只含一个未知数;③未知数的最高次数是2.

(2)方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$称为一元二次方程的一般形式,任何一个一元二次方程都可以化成这种形式.

2. 一元二次方程的解法.

解一元二次方程的基本思想是通过"降次",将它转化为两个一元一次方程.本节学习如下三种方法:

(1)直接开平方法. 直接开平方法是利用平方根的定义直接开平方,求出一元二次方程的根. 它是最基本的解法,对形如$(ax+b)^2=c(a\neq0)$的方程可以用它求解. 当$c\geqslant0$时,由平方根的定义,可得$ax+b=\pm\sqrt{c}$,$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{c}}{a}$;当$c<0$时,由负数没有平方根可知方程此时没有实数根.

(2)配方法. 配方法是一种重要的数学思想方法,在数学领域中有着广泛的应用,也是导出求根公式的关键,应熟练掌握.

用配方法解一元二次方程,是以配方为手段,以完全平方公式为理论依据,将方程变形为$(x+m)^2=n$的形式,再利用开平方求出方程的根. 用它解一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的一般步骤是:

①当二次项系数$a\neq1$时,先在方程两边都除以a,把二次项系数化为1;

②将常数项单独移到等式一边;

③根据完全平方公式配方,即在方程两边都加上一次项系数一半的平方. 此时,原方程就可变形为$(x+m)^2=n$的形式;

④在$n\geqslant0$的情况下,用直接开平方法解变形后的方程.

(3)公式法. 公式法也称求根公式法,它是解一元二次方程的通用方法,其中求根公式是由配方法解一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$推导出来的,求根公式为$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}(b^2-4ac\geqslant0)$. 它揭示了一元二次方程的根是由方程的各项系数确定的,因此,只要确定出一元二次方程的各项系数的值,并在$b^2-4ac\geqslant0$的情况下,代入求根公式,便可求出方程的根.

注意 ①只有在明确方程是一元二次方程时,才能运用求根公式求解;

②运用求根公式解一元二次方程,需先把方程化成一般形式.

疑难解析

1. 一元二次方程的二次项系数$a\neq0$.

二次项系数$a\neq0$是一元二次方程一般形式的一个重要组成部分,如果$a=0$,则方程$ax^2+bx+c=0$就不是一元二次方程;若方程$ax^2+bx+c=0$是一元二次方程,即隐含了$a\neq0$的条件.

2. 用配方法解一元二次方程应注意的问题.

用配方法解一元二次方程关键的一步是:二次项系数化为1之后,在方程两边都加上一次项系数一半的平方,为什么?其原因是方程此时左边要配成一个完全平方式. 若把完全平方式$a^2\pm2ab+b^2$中的a当作x,b当作已知数,那么常数

项正好是等于一次项系数一半的平方，即 $b^2=\left(\frac{\pm 2b}{2}\right)^2$. 故只有在方程两边同时加上一次项系数一半的平方，才能达到配方的目的，从而使原方程变形为 $(x+m)^2=n$ 的形式.

3. 怎样选择适当的方法解一元二次方程.

一元二次方程的三种解法各有特点，在具体解方程时，要依据方程的特征，合理选择. 一般地，形如 $(ax+b)^2=c(a\neq 0, c\geqslant 0)$ 的方程，应选用直接开平方法；若不行，再考虑公式法. 用配方法解方程比较麻烦，所以一般不常用.

总之，在选择解法时应遵循先特殊，后一般的原则，即：直接开平方法→公式法.

学解习题

例 1 若方程 $(m-1)x^{|m|+1}-2x=3$ 是关于 x 的一元二次方程，则 $m=$ ______.

导析 已知方程为关于 x 的一元二次方程，则需满足两个条件：未知数的最高次数等于 2；二次项系数不为零.

解 由题意可得 $\begin{cases}|m|+1=2\\ m-1\neq 0\end{cases}$ 解之，得 $m=-1$.

解后反思 本题的关键是正确理解一元二次方程的概念，特别要注意一个方程若是一元二次方程，那么二次项系数一定不能为零.

例 2 (1)用直接开平方法解方程：$(3x+1)^2-4=0$；

(2)用配方法解方程：$2x^2-4=7x$；

(3)用公式法解方程：$\frac{3}{2}y^2+4y=1$.

(1)导析 可先将方程变形为 $(ax+b)^2=c(c\geqslant 0)$ 的形式，根据平方根的定义求解.

解 移项，得 $(3x+1)^2=4$

$\therefore\ 3x+1=\pm 2$ 即 $3x+1=2$ 或 $3x+1=-2$

$\therefore\ x_1=\frac{1}{3}, x_2=-1$

解后反思 用直接开平方法解一元二次方程，方程必须一边是一个含未知数的一次式的平方，另一边是一个非负数.

(2)导析 将二次项系数化为 1 后，再配方.

解 移项，得 $2x^2-7x=4$

方程两边都除以 2，得 $x^2-\frac{7}{2}x=2$

配方，得 $x^2-\frac{7}{2}x+\left(-\frac{7}{4}\right)^2=2+\left(-\frac{7}{4}\right)^2$ 即 $\left(x-\frac{7}{4}\right)^2=\frac{81}{16}$

$\therefore\ x-\frac{7}{4}=\pm\frac{9}{4}$ $\quad\therefore\ x_1=4, x_2=-\frac{1}{2}$.

解后反思 熟练地掌握完全平方公式是用配方法解题的基础."在方程两边都加上一次项系数一半的平方"是运用配方法解方程的关键，而"将二次项系数化为 1"是实现这一关键步骤的前提.

(3)导析 需将方程整理成一般形式.

解 原方程化为一般形式，并在方程两边同时乘以 2，得 $3y^2+8y-2=0$

$\because\ a=3, b=8, c=-2$ $\quad b^2-4ac=8^2-4\times3\times(-2)=88>0$

$\therefore\ y=\frac{-8\pm\sqrt{88}}{2\times3}=\frac{-4\pm\sqrt{22}}{3}$

$\therefore\ y_1=\frac{-4+\sqrt{22}}{3}, y_2=\frac{-4-\sqrt{22}}{3}$.

解后反思 正确确定方程的各项系数和常数项，是保证求根公式正确解题的关键.注意：求出的根要化成最简形式，而这里的未知数 y 不要习惯性写成 x.

例 3 选用适当方法解下列方程.

(1)$(x+\sqrt{2})^2=(1-\sqrt{2})^2$ $\quad$ (2)$x^2-6x+1=0$ $\quad$ (3)$x^2-2x=224$

导析 根据各方程的特点，选择比较简便的解法：(1)用直接开平方法比较简捷；(2)宜选用公式法；(3)用配方法比较简便.

解 (1)方程两边开平方，得 $x+\sqrt{2}=\pm(\sqrt{2}-1)$

$\therefore\ x_1=-1, x_2=-2\sqrt{2}+1$.

(2)$\because\ a=1, b=-6, c=1$

$b^2-4ac=(-6)^2-4\times1\times1=32>0$

$\therefore\ x=\frac{6\pm\sqrt{32}}{2}=3\pm2\sqrt{2}$

$\therefore\ x_1=3+2\sqrt{2}, \quad x_2=3-2\sqrt{2}$.

(3)方程两边同时加 1，得 $x^2-2x+1=224+1$，即 $(x-1)^2=225$

$\therefore\ x-1=\pm15$ $\quad\therefore\ x_1=16, x_2=-14$.

解后反思 从上述解法可看出，在解一元二次方程时，要从方程的形式入手，选择适当的方法，其基本原则是使求解过程简捷.

例 4 若 $3x^2-x=1$，求多项式 $6x^3+7x^2-5x+1999$ 的值.

导析 若直接求出 x 的值，再代入多项式求值，则较复杂.由已知条件 $3x^2-x=1$ 知多项式里 x 的值是一元二次方程 $3x^2-x-1=0$ 的实数根.可考虑把多项式进行变形，利用整体代入求值.

解 由已知得 $3x^2-x-1=0$

$\therefore\ 6x^3+7x^2-5x+1999=2x(3x^2-x-1)+3(3x^2-x-1)+2002$

$=2x\cdot 0+3\cdot 0+2002=2002.$

解后反思 上例体现了整体代换的思想. 用常规思路解题思维受阻时,可变换角度,寻求新的解法. 如能坚持如此,你的思维能力将会得到提高.

学习误区

本节中易出现错误的有:(1)判断二次项含字母系数的方程是否是一元二次方程时,忽略了"$a\neq 0$"的条件;(2)确定一元二次方程的各项系数或利用求根公式解一元二次方程时,没有把方程化成一般形式;(3)利用配方法解一元二次方程没有化二次项系数为1,就在方程两边都加上一次项系数一半的平方;(4)用配方法将代数式变形时与解一元二次方程相混淆.

例5 写出方程 $8x^2=4\sqrt{3}x+1$ 的二次项系数、一次项系数和常数项.

错解 二次项系数是8,一次项系数是 $4\sqrt{3}$,常数项是1.

错因 确定一元二次方程的各项系数和常数项时,必须先把方程化成一般形式,这是因为方程的二次项系数、一次项系数和常数项都是在方程为一般形式的前提下定义的,而本题导致错解的原因是没有把方程化成一般形式.

正解 把原方程化成一般形式为 $8x^2-4\sqrt{3}x-1=0$,所以该方程的二次项系数是8,一次项系数是 $-4\sqrt{3}$,常数项是 -1.

例6 试证明:代数式 $2x^2-4x+3$ 的值恒大于0.

错解 $2x^2-4x+3=x^2-2x+\dfrac{3}{2}=(x-1)^2+\dfrac{1}{2}$

$\because\ (x-1)^2\geqslant 0\quad \therefore\ (x-1)^2+\dfrac{1}{2}>0$

$\therefore$ 代数式 $2x^2-4x+3$ 的值恒大于0.

错因 上述证明过程好像无懈可击,实际上是将代数式的变形与解一元二次方程相混淆.解方程是一种同解变形,可以将二次项系数化为1,而代数式的变形是恒等变形,不能将二次项系数化为1,本题错误的根源就是将二次项系数化为1,而使代数式的值缩小了一倍,故导致错解.

正解 $2x^2-4x+3=2(x^2-2x)+3=2(x^2-2x+1)+3-2$

$=2(x-1)^2+1$

$\because\ (x-1)^2\geqslant 0\quad \therefore\ 2(x-1)^2+1>0$

$\therefore$ 代数式 $2x^2-4x+3$ 的值恒大于0.

学练结合

一、填空题

1. 方程 $3x^2-5=-2x+3$ 中，二次项系数是______，一次项系数是______，常数项是______.

2. 关于 x 的方程 $(m^2-4)x^2+(m-2)x+3m-1=0$，当 m 为______时，是一元二次方程；当 $m=$______时，是一元一次方程，这时方程的解是______.

3. 方程 $4t^2-4t+1=0$ 的根是______.

4. 方程 $2x^2-x-15=0$ 的两根为 x_1,x_2，且 $x_1>x_2$，则 x_1-2x_2 等于______.

5. 把方程 $x^2-2x-3m=0$ 化成 $(x+h)^2=k$ 的形式时，应是______，当 m______时，方程才有实数根.

6. 如果一元二次方程各项系数和为零，那么方程必有一根是______，如果一元二次方程的一次项系数等于二次项系数与常数项之和，则方程必有一根是______.

7. 已知实数 a、b、c 满足等式 $\sqrt{a-1}+|b+2|+(c+a-b)^2=0$，那么，方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根是______.

8. 如果 $x=2$ 是关于 x 的方程 $2x^2+3ax-2a=0$ 的根，那么关于 y 的方程 $y^2-3=a$ 的解是______.

二、选择题

9. 以下各方程中，是一元二次方程的是(　　).

A. $x^2+y+b=0$　　B. $\dfrac{1}{x^2+3x}=2$

C. $(x-3)^2=1$　　D. $x^2+4x=(x+2)(x-2)$

10. 若方程 $(m-1)x^2+\sqrt{m}x=1$ 是关于 x 的一元二次方程，则 m 的取值范围是(　　).

A. $m\neq1$　　B. $m\geqslant0$

C. $m\geqslant0$ 且 $m\neq1$　　D. m 为任意实数

11. 已知 2 是关于 x 的方程 $\dfrac{3}{2}x^2-2a=0$ 的一个解，则 $2a-1$ 的值是(　　).

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

12. 用配方法解关于 x 的方程 $x^2+px+q=0$ 时，此方程可变形为(　　).

A. $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2-4q}{4}$　　B. $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{4q-p^2}{4}$

C. $\left(x-\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2-4q}{4}$　　D. $\left(x-\frac{p}{2}\right)^2=\frac{4q-p^2}{4}$

13. 已知方程 $x^2+(3m-2)x+m^2-1=0$ 有一个根是0，则 m 的值为(　　).

A. 1　　B. -1　　C. 1或-1　　D. 0

14. 下列命题中，错误的是(　　).

A. 关于 x 的方程 $x^2=k$，必有两个互为相反数的实根

B. 关于 x 的方程 $(x-c)^2=k^2$ 必有两个实根

C. 关于 x 的方程 $ax^2+bx=0$ 必有一根是零

D. 关于 x 的方程 $x^2=1-a^2$ 可能没有实根

三、解答题

15. 用适当的方法解下列关于 x 的方程.

(1) $6x^2+7x-3=0$　　(2) $(3x-2)(3x+2)=12$

(3) $(1-3x)^2-4(2x+3)^2=0$　　(4) $(x+3)(x+1)=6x+4$

(5) $x^2-2mx+m^2-n=0(n>0)$

16. 要使 $4a^{n^2-4n+6}$ 与 $\frac{3}{5}a^n$ 是同类项，则 n 的值为多少?

17. 如果方程 $ax^2-bx-6=0$ 与方程 $ax^2+2bx-15=0$ 有一个公共根是3，试求 a、b 的值，并分别求出两方程的另一个根.

18. 试证明关于 x 的方程 $(a^2-8a+20)x^2+2ax+1=0$，不论 a 取何值，该方程都是一元二次方程.

12.2　用因式分解法解一元二次方程

学点聚焦

1. 理解用因式分解法解一元二次方程的意义.

2. 会用因式分解法解一元二次方程.

学法指导

重点剖析

1. 用因式分解法解一元二次方程.

对一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$,左边若能因式分解,变成 $(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)=0$ 的形式,根据几个因式之积为0,则至少有一个因式为0,可得 $a_1x+b_1=0$ 或 $a_2x+b_2=0$,从而求得 $x_1=-\frac{b_1}{a_1}$,$x_2=-\frac{b_2}{a_2}$,x_1、x_2 即是原方程的两个根. 若可将一元二次方程的一边化为0,而另一边可分解为两个一次因式的积,则这个一元二次方程可用因式分解法求解.

2. 用因式分解法解一元二次方程的常用方法.

(1)形如 $ax^2+bx=0(a\neq0)$ 的方程,可用提取公因式法把方程化为:

$$x(ax+b)=0$$

从而求解;

(2)形如 $(ax+m)^2-(bx+n)^2=0(a^2\neq b^2)$ 的方程,可用平方差公式将方程化为:

$$[(a+b)x+(m+n)][(a-b)x+(m-n)]=0$$

从而求解;

(3)形如 $x^2+(a+b)x+ab=0$ 的方程,可利用公式

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

将左边进行因式分解,从而求解.

疑难解析

1. 因式分解法是解一元二次方程的特殊方法.

用因式分解法解一元二次方程是通过因式分解把一元二次方程降次转化为两个一元一次方程求解,它在解符合某些特点的方程时很方便,当不能用因式分解法求解时,还需要利用公式法求解.

2. 用因式分解法解一元二次方程应注意的问题.

(1)有些一元二次方程需要变形后(如移项,去括号、合并同类项等),才能用因式分解法求解;

(2)用因式分解法解一元二次方程时,方程的一边必须为零;

(3)不能在方程的两边同除以含有未知数的整式.

学解习题

例 1 用因式分解法解下列方程.

(1)$4(x-3)^2-x(3-x)=0$

(2)$(x-2)^2=(2x+3)^2$

(3)$(x-1)(x+3)=12$

(1)导析 将方程统一字母排列后,可用提取公因式法进行因式分解求解.

解 原方程变为 $4(x-3)^2+x(x-3)=0$

$(x-3)[4(x-3)+x]=0$ 即 $(x-3)(5x-12)=0$

$\therefore\ x_1=3,x_2=\frac{12}{5}$.

解后反思 注意将方程适当变形,再利用因式分解法求解.

(2)导析 先移项,再用平方差公式分解.

解 移项,得 $(x-2)^2-(2x+3)^2=0$

$[(x-2)+(2x+3)][(x-2)-(2x+3)]=0$

即 $(3x+1)(-x-5)=0$ $\therefore\ x_1=-\frac{1}{3},x_2=-5$.

解后反思 对于上述方程,把方程中的括号展开、整理,然后用公式法求解则较复杂. 解一元二次方程时,观察分析其特点,尽量使用较简便的方法.

(3)导析 先将方程化为一般形式,然后可用因式分解法.

解 原方程可化为 $x^2+2x-15=0$

即 $(x+5)(x-3)=0$ $\therefore\ x_1=-5,\ x_2=3$.

解后反思 不能直接判断一元二次方程适宜用哪种解法时,应先将方程进行整理为一般形式,再考虑其解法.

例 2 用适当的方法解下列方程.

(1)$3y^2+1=2\sqrt{3}y$ (2)$4(x-3)^2-25(x+2)^2=0$

(3)$3(\frac{1}{2}-x)^2-5(x-\frac{1}{2})-2=0$ (4)$(x-2)^2-(3x+1)^2=x^2+2$

导析 方程(1)含有无理系数,适用公式法求解;方程(2)可用平方差公式分解因式;方程(3)中,因$(\frac{1}{2}-x)^2=(x-\frac{1}{2})^2$,故可把$(\frac{1}{2}-x)$看成一个整体,用因式分解法较简便;方程(4)化成一般式不能用因式分解法,因此选择公式法.

解 (1)原方程化为一般形式为 $3y^2-2\sqrt{3}y+1=0$

$\because\ a=3,b=-2\sqrt{3},c=1$ $b^2-4ac=(-2\sqrt{3})^2-4\times3\times1=0$