概率与统计学习指导书

徐信之 高尚华 编

★ 高等教育出版社

★ GAODENG JIAOYU CHUBANSHE

概率与统计学习指导书

徐信之 高尚华 编

高等教育出版社

内容提要

本书是与北京大学刘婉如、徐信之编《概率与统计》配套的学习指导书。本书各章与教材相对应。每章包括学习要求，内容提要，重点指导，例题选讲和自测试题。本书有助于读者加深对教材内容的理解，更好地掌握概率与统计的知识。

本书可供卫星电视教育、教育学院、函授学院的学员学习参考。

概率与统计学习指导书

徐信之　高尚华 编

*

高等教育出版社 出版

新华书店北京发行所发行

商务印书馆上海印刷厂印装

*

开本 850×1168　1/32　印张 4.75　字数 113,000

1990 年 3 月第 1 版　1990 年 3 月第 1 次印刷

印数 0001—17,090

ISBN 7-04-002851-4/O·910

定价　1.20 元

前　言

本书是与北京大学刘婉如、徐信之编《概率与统计》(中学教师培训教材)配套的学习指导书.

针对卫星电视远距离教育的情况,根据成年人学习的特点,我们编写了这本学习指导书.本书内容和教材《概率与统计》是吻合的,主要阐明概率统计的基本理论和基本方法,剖析教材的重点、难点,帮助读者提高分析问题与解决问题的能力.

本书可以独立阅读.各章由五个部分组成:学习要求,内容提要,重点指导,例题选讲,自测试题;书末附有自测试题答案.

北京大学刘婉如、汪仁官老师和青岛海洋大学林鸿洲老师对本书的结构与细节提出过许多宝贵意见,我们借此表示衷心的谢意.

编者

1989年5月

目　　录

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第一章　随机事件与概率

学 习 要 求

一、牢固掌握事件、概率的概念，事件之间的关系及其概率之间的关系；会利用这些关系计算概率．

二、掌握古典概型、条件概率、概率的加法公式、概率的乘法公式、独立性、独立试验序列概型、全概公式、逆概公式的含义，会根据具体问题灵活运用这些知识计算事件的概率．

三、了解集合与事件的关系．

内 容 提 要

1．排列与组合

从 n 个不同的东西中，无放回地任取出 $m(1\leqslant m\leqslant n)$ 个排成有次序的一列，称为从 n 个东西中取 m 个的(非重复)排列，这样作出的不同排列种数记作 P_n^m，

$$P_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1) \tag{1.1}$$

特别当 $m=n$ 时称其为 n 个东西的全排列，有

$$P_n^n=n(n-1)\cdots2\cdot1=n! \tag{1.2}$$

从 n 个不同的东西中，有放回地任取出 m 个排成一列，称为从 n 个东西中取 m 个的可重复排列，这样作出的不同排列种数为

$$\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{m\text{个}}=n^m \tag{1.3}$$

从 n 个不同的东西中任取出 $m(1\leqslant m\leqslant n)$ 个合成一组，称为从 n 个东西中取 m 个的组合，这样作出的不同组合总数记作 C_n^m，

(1.4) $$C_n^m=\frac{P_n^m}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

组合总数 C_n^m 满足

(1.5) $$C_n^m=C_n^{n-m}$$

设在 n 个东西中，有某 n_1 个彼此相同，另 n_2 个彼此相同，……，另 n_r 个彼此相同，且 $n_1+n_2+\cdots+n_r=n$，则这样 n 个东西的全排列种数为

(1.6) $$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

2. 当条件组 S 实现时可能发生也可能不发生的事件称为随机事件，一般用大写英文字母表示；不可能发生的事件称为不可能事件，记作 V 或 $\varnothing$；必定发生的事件称为必然事件，记作 U. 刻划事件 A 在一次试验中发生的可能性大小的数值称为事件 A 的概率，记作 $P(A)$，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$. $P(U)=1$，$P(V)=0$.

概率的统计定义　在条件组 S 下，重复作 n 次试验，设事件 A 发生了 μ 次. 当 n 很大时，A 发生的频率 μ/n 稳定地在某一数值 p 的附近摆动；并且随着 n 的增大，摆动的幅度越来越小，则有

(1.7) $$P(A)=p$$

3. 古典概型的概率计算公式　当条件组 S 实现时，如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 发生的可能性相同，并且其中至少有一个发生，也至多有一个发生，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是一个等可能完备事件组，其中的任一事件 $A_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 称为基本事件. 现设事件 A 由 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中的 m 个基本事件组成，则

(1.8) $$P(A)=\frac{m}{n}$$

4. 事件之间的关系与运算　设 $A, A_1, \cdots, A_n, B, C$ 是事件.

(1) 如果 A 发生一定导致 B 发生，则称 B 包含 A，记作 $B\supset A$ 或 $A\subset B$.

(2) 如果 $A\supset B$,并且 $B\supset A$,则称 A 与 B 相等,记作 $A=B$.

(3) 事件"A 或 B"称为 A 与 B 的和,记作 $A+B$ 或 $A\cup B$. 这样,$A+B$ 发生意味着 A, B 中至少有一个发生. 推广之,事件

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i=A_1+A_2+\cdots+A_n$$

发生意味着 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 中至少有一个发生.

(4) 事件"A 且 B"称为 A 与 B 的积,记作 AB 或 $A\cap B$.这样,AB 发生意味着 A, B 同时发生.推广之,事件

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i=A_1A_2\cdots A_n$$

发生意味着 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 同时发生.

(5) 如果 A 与 B 不能同时发生,即 $AB=V$,则称 A与 B 是互不相容的事件.

对于 n 个事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n,如果它们是两两互不相容的,则称 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 互不相容.

(6) 事件"非 A"称为 A 的对立事件,记作 $\overline{A}$. 就是说,A 与 $\overline{A}$ 满足

$$A\overline{A}=V,\ A+\overline{A}=U$$

(7) A 与 B 的差记作 $A-B$, 事件 $A-B$ 发生意味着 A 发生而 B 不发生.

(8) 事件的和与积满足下列规律:

交换律　$A+B=B+A,\ AB=BA$

结合律　$(A+B)+C=A+(B+C),\ (AB)C=A(BC)$

分配律　$A(B+C)=AB+AC,\ A+BC=(A+B)(A+C)$

德摩根律(亦称反演律)

$$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B},\ \overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$$

5．概率的加法公式

(1) 如果事件 A, B 互不相容，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{1.9}$$

(2) 如果事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 互不相容，则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n) \tag{1.10}$$

(3) 对于任意两事件 A, B 有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1.11}$$

概率的加法公式可以推广到一列事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n, $\cdots$上去．为此，要把事件的和的概念推广到一列无穷个事件上(如何推广，读者可回忆一下)．设 A_1, A_2, $\cdots$, A_n, $\cdots$为一列两两互不相容的事件，则有

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \tag{1.12}$$

公式(1.12)称为概率的完全可加性，以后有用．

6．条件概率、概率的乘法公式

设 A, B 是条件组 S 下的两个事件，$P(A)\neq 0$, 称在 A 发生的前提下 B 发生的概率为条件概率，记作 $P(B|A)$．这时，有概率的乘法公式

$$P(AB)=P(A)P(B|A) \tag{1.13}$$

7．独立性　对于两事件 A, B, 如果

$$P(AB)=P(A)P(B) \tag{1.14}$$

则称事件 A 与 B 是相互独立的．

独立性概念可以推广到多个事件上去．特别，当事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 相互独立时，有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n) \tag{1.15}$$

8．独立试验序列概型的概率计算公式　设事件 A 在单次试验中发生的概率为 $p(0<p<1)$，则在 n 次重复试验中

(1.16) $$P(A\text{ 发生 }k\text{ 次})=C_n^k p^k q^{n-k}$$
$$(q=1-p;\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

9．全概公式 如果事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足

(1) $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容，并且 $P(A_i)>0(i=1, 2, \cdots, n)$；

(2) $A_1+A_2+\cdots+A_n=U$，

则 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 称为完备事件组．对于完备事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 与任一事件 B，下列全概公式成立：

(1.17) $$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

10．逆概公式 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是一完备事件组，则对于任一概率不等于 0 的事件 B，下列逆概公式成立：

(1.18) $$P(A_j|B)=\frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}$$
$$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

重 点 指 导

1．在学习本章内容时，为了计算概率，常常需要数一数试验的各种可能情况，这实际上是以随机游戏为主体的经典概率论的重要内容．排列与组合的方法可以很好地帮助我们进行计数，它们是学习概率统计必不可少的预备知识．

由于在中学的数学课程中已包含了排列与组合的内容，所以作为预备知识，这里不讨论加法原理、乘法原理等排列组合原理，而只要求读者能熟练地运用公式(1.1)—(1.6)计算排列或组合的种数．但是，排列组合问题的思考方式跟诸如解线性方程组、求某一函数的导数、求连接两点的直线方程等的思考方式是有很大区

别的. 不少读者往往习惯于后者，而对前者感到陌生. 在教材《概率与统计》中专门编排了这方面内容，并选配了十道习题(习题一). 读者不应轻视排列组合知识，一定要掌握它们的方法，并做一些习题.

排列与组合的本质差别在于前者跟次序有关，后者跟次序无关. 这里举一个生活中的例子，现考虑在京杭铁路线上的五个城市：北京、天津、南京、上海、杭州之间坐直快客车旅行，试问有几种客车车票？又有几种客车票价？

当考虑客车车票时，很明显，“北京到上海”与“上海到北京”应是两张不同的车票，就是说车票与两城市间的次序有关. 所以每种车票可以看作是从5个城市中无放回地取出2个城市的一个排列，客车车票种数可以由计算排列的公式(1.1)来计算，答案为20种.

当考虑客车票价时，由于这些城市两两之间的路程都不相等，而票价只跟路程有关，跟始发站、终点站是哪一城市无关，即票价跟两城市间的次序无关，所以票价问题应是组合问题. 我们可以用计算组合的公式(1.4)得出共有10种票价.

现在假定这五个城市间有两段路程是相等的，那么该如何计算呢？读者不妨自己做一做看.

再看一个例子，某旅馆的底层有12个房间要粉刷，其中3个刷绿色，2个刷蓝色，2个刷黄色，5个刷白色. 问有多少种不同的粉刷方法？

也可以这样提问：把12个小球(3个绿的、2个蓝的、2个黄的、5个白的)排成一列，问有多少种排法？这里颜色一样的小球看作是彼此相同的，就不应使用公式(1.1)或(1.2)了，因为这两个公式所考虑的对象是n个“不同”的东西. 公式(1.6)可以解决我们的问题，所以旅馆底层12个房间不同的粉刷方法种数为

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\frac{12!}{3!2!2!5!}=166320$$

这里注意:用小球提问比用房间提问容易被初学者接受,其实问题的实质是一样的. 这就启发我们,当做题觉得困难时,可以试一试用别的形式来作类比,或许能开阔自己的思路.

2. 概率论这门数学学科主要是研究随机事件的规律,所谓概率,也是针对事件来说的. 在实践中,有些事件很简单,有些事件很复杂.如何通过对于较简单事件规律的研究,进而掌握较复杂事件的规律,是概率论的一个重要研究课题. 因此,讨论事件之间的关系和运算是学习本章知识的一个重点部分. 只有先弄清了所讨论的事件之间的关系,才有可能弄清这些事件的概率之间的关系.

当我们做一次试验时,或者说当一组条件实现时,一般会出现很多事件,其中有的事件可以通过别的事件表示出来. 例如某工厂的检验员从一批混有次品的产品中任意抽出四件作检验,假定字母 A 表示事件"至少有一件次品",字母 B 表示"次品数不少于两件",那么 $\overline{A}$, $\overline{B}$, AB, $A+B$, $\overline{A}B$ 等就都表示了一定的含意,它们是与这次检验有关的一些事件.

由于"至少有一件次品"是指"有一件或两件或三件或四件次品",其对立事件是没有次品,所以 $\overline{A}=$"没有次品".

B 是指"有两件或三件或四件次品",非 B 应是没有次品或有一件次品,也可以说,$\overline{B}=$"次品数少于两件".

A, B 至少有一个发生是指"有一件或两件或三件或四件次品",即 A 发生,于是 $A+B=A$. 注意,对于这次检验有 $B\subset A$.

进行类似的分析,本题中 A, B 同时发生即 B发生,所以 $AB=B$.

"没有次品"与"有两件或三件或四件次品"不可能同时发生,这两个事件是互不相容的,它们的积是不可能事件.即 $\overline{A}B=V$.

读者学习本章知识时，一定要认清问题所涉及的事件是什么，一定要善于用文字正确地写出所讨论的事件，并采用适当的大写英文字母来表示之．只有做到了这点，才有可能去考虑概率．

事件的关系及运算中有些式子与数的关系及运算很相似，例如交换律、结合律就是这样；但有些式子不尽相似，如分配律，事件的分配律 $A(B+C)=AB+AC$ 与数的分配律 $a(b+c)=ab+ac$ 很相似，但事件的另一分配律 $A+BC=(A+B)(A+C)$ 在数的运算中却没有对应的规律，因为 $a+bc$ 一般地说不会等于 $(a+b)(a+c)$．初学者可以把事件的运算与数的运算作比较，但绝不能把两者混淆起来，否则就有可能写出诸如 $A+A=2A$ 这类错误的式子．在此我们指出，如果设 A 是一事件，那么写出 $2A$ 是毫无意义的，因为从来没有定义过一个数能与一个事件相乘．实际上 $A+A=A$，这是可以证明的(注意这与数的运算也不同)，我们可以通过证明 $A+A\subset A$ 与 $A+A\supset A$ 做到这一点，证明的依据是事件相等的定义．至于证明的具体步骤并不困难，读者可以自行完成．

读者可能觉得，上述第一个分配律 $A(B+C)=AB+AC$ 很好记，因为它类似于数的分配律，而第二个分配律 $A+BC=(A+B)(A+C)$ 很难记．其实这两个分配律是具有对偶性的，我们把前者写成

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

然后，只需把 $\cap$ 换成 $\cup$，把 $\cup$ 换成 $\cap$，就得到了后者：

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

即

$$A+BC=(A+B)(A+C)$$

根据同样的道理，德摩根律即反演律的两个公式

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

之间也具有对偶性．记住了其中之一，运用对偶性，即可推出另一个．

如果读者具备集合论的一些知识，就会发现集合的关系及运算跟事件的关系及运算十分相象，表 1.1 列出了它们之间的对照．此外，集合论中的文氏(Venn)图也可用来帮助我们理解事件之间的关系．

表 1.1　集合与事件关系对照

集合论术语	概率论术语
全集 Ω	必然事件 U
空集 $\varnothing$	不可能事件 V
元素	基本事件
子集 A, B	事件 A, B
A 的余集 $\bar{A}$	A 的对立事件 $\bar{A}$
$B\supset A$	$B\supset A$
A, B 的并集 $A\cup B$	A, B 的和 $A+B$
A, B 的交集 $A\cap B$	A, B 的积 AB
$A=B$	$A=B$
A, B 不相交	A, B 互不相容
$A-B$	$A-B$

3． 概率的统计定义表明，随机事件在大量重复试验中存在一种客观规律性——频率的稳定性，但这里的“频率稳定于概率”不能用数学分析中的极限概念来理解．此定义是指随着试验次数的增大，频率围绕概率摆动的平均幅度将越来越小，频率与概率之间出现较大偏差也越来越罕见，但绝不是不可能出现，所以不能误认为频率的极限是概率．

在实践中，很多事件的概率往往是个未知数，概率的统计定义给出了一个近似计算随机事件的概率的方法：当试验大量重复时，就可以把随机事件 A 发生的频率 μ/n 当作其概率 $P(A)$ 的近似值．

4. 古典概型曾经是概率论发展史上初期研究的主要对象，占有相当重要的地位. 一方面，它比较简单，概念直观，计算公式容易理解；另一方面，它又概括了不少实际问题，有着广泛的应用. 在本章的知识中，古典概型起着奠基性的作用.

对于古典概型问题，当条件组 S 实现时，关键是找出试验的一个等可能完备事件组. 一般说来，完备性比较容易得到保证，在某些情况下，等可能性往往被忽视，从而得出错误的结果. 这里举一个例子.

从 0, 1, 2, …, 9 这十个数字中有放回地任取两个出来，试求它们之和等于 5 的概率.

很明显，这是个古典概型问题. 但如果读者不加思索地把取出的两个数字之和作为基本事件，从而等可能完备事件组为 $\{0, 1, 2, \cdots, 18\}$，于是所求概率为 1/19，那就错了. 因为对于这 19 个结果来说，尽管每次试验只有一个结果出现（完备性满足），但它们不是等可能的. 例如，"和等于 1"只能有取到 0, 1 与 1, 0 两种情形，"和等于 4"却有取到 0, 4; 1, 3; 2, 2; 3, 1; 4, 0 五种情形，显然，后者比前者发生的可能性大.

正确的解法应该是这样的：运用排列的知识，把基本事件作为从这十个数字中取 2 个的可重复排列，即等可能完备事件组为数对的集合 $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), \cdots, (8, 9), (9, 8), (9, 9)\}$. 由排列公式(1.3)，这里共有 $n=10\times10=100$ 个基本事件. 在一次试验中，每个基本事件发生的可能性都是 1/100.

由古典概型的概率计算公式(1.8)，"取出的两数之和等于 5"由 (0, 5), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1) 以及 (5, 0) 这 6 个基本事件组成，即(1.8)式的 $m=6$. 因此

$$P(\text{取出的两数之和等于 } 5)=\frac{6}{100}=\frac{3}{50}$$

读者应该认识到，古典概型问题实际上是把计算概率转化为数基本事件的个数. 这时，经常要运用排列与组合的知识来进行计数. 有不少古典概型的难题实际上是归结为排列组合的难题而得到解决的.

现在考虑一个扑克游戏中的概率问题：把一副扑克牌(52 张)洗匀,求四张 A 连在一起的概率.

这道问题较难着手,洗匀一副扑克牌的意思是指52张牌的各种各样排列出现的机会都一样，自然可把每一个排列看成一个基本事件. 于是，运用排列公式(1.2)，等可能完备事件组应包含 $n=P_{52}^{52}=52!$ 个基本事件. 下面计数 m 恐怕是最困难的一个步骤了. 实际上，当对 52 张牌依次查看时，找连着的四张 A 只要找到第一张 A 就可以了. 这第一张 A 能在第 1 张牌到第 49 张牌的 49 个位置上出现,注意，不是 52 个位置，因为四张 A 是连在一起的. 其次，四张 A 本身有 4! 个全排列，而 48 张不是 A 的牌有 48!个全排列. 最后,根据(1.8)式,

$$P(\text{四张 A 连在一起})=\frac{49\times4!\times48!}{52!}=\frac{24}{52\times51\times50}$$

$$=\frac{1}{5525}$$

上例充分表明了排列知识的重要性，由于这一古典概型问题的基本事件总数多达 52! 个,如果不使用排列的知识，那简直就没有办法对题意所涉及的基本事件进行计数，也就无法计算概率了.

反过来，如果一个等可能完备事件组包含的基本事件个数很少,那么完全可以把这些基本事件统统都罗列出来,从中挑出所需要的基本事件,进而算出概率. 在此我们强调,在某些情况下，虽然基本事件总数较多,但又不能利用排列组合的计数技巧,那就只

好把所有的基本事件罗列出来，以求得问题的解决. 后面例题选讲中的例 3 说的就是这种情况，读者应领会我们编选这道例题的用意.

5. 条件概率的概念是学习本章内容的一个难点，但它却是概率论的一个重要的基本概念. 在学习条件概率以前，计算事件 B 的概率只是依靠试验本身提供的信息. 但在实际问题中常常可以利用与事件 B 有关的事件 A 的某些信息，为此需要讨论条件概率. 此外，即使没有某些信息可以利用，为了计算较复杂事件的概率，有时可把条件概率当作工具使用，所谓全概公式便是这样.

通常我们都把试验等同于一组条件 S 的实现，现在又要加上新的条件"A 发生"，这自然容易产生混淆. 在条件概率的定义中，"在 A 发生的前提下"这一说法在实际问题中有许多类似的说法，象"事件 A 已经出现的条件下"、"给定……"、"已知……"、"在……的假设下"、"当……发生时"等等. 我们知道，概率统计是一门与实践结合得很紧密的数学学科，在生产和日常生活中，实际问题对条件的提法是五花八门的，要把握其本质的确比较困难，这时读者应注意对具体问题进行具体分析.

这里着重指出，条件概率仍然是事件的概率，它满足概率的所有基本性质. 例如，对任意事件 B，我们有 $0\leqslant P(B|A)\leqslant 1$. 对必然事件 U，我们有 $P(U|A)=1$. 对不可能事件 V 有 $P(V|A)=0$. 如果设 $B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots$ 为一列两两互不相容的事件，则

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} B_i \,\Big|\, A\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A)$$

特别，我们有

$$P(\overline{B}|A)=1-P(B|A)$$

现在考虑有两个子女的家庭，假定生男孩与生女孩是等可能的. 某人任意选择一家，发现这家有一男孩，试问这家还有一男孩

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com