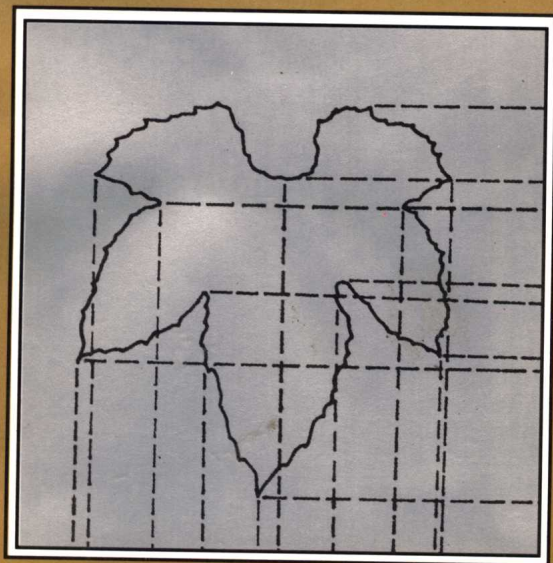


欧拉
著
张延伦
译

无穷分析引论

(下)



山西教育出版社

欧拉
著
张延伦
译

无穷分析 引论

(下)

山西教育出版社

社 长 任兆文
总 编 辑 左执中
责任编辑 王玉成
装帧设计 王俊彦

无 穷 分 析 引 论

欧 拉 著 张延伦 译

*

山西教育出版社出版发行(太原并州北路 69 号)

太原市新华胶印厂印刷

*

开本:850×1168 1/32 印张:27 字数:671千字

1997年1月第1版 1997年1月山西第1次印刷

印数:1—1000册

*

ISBN 7—5440—0960—2

G·961 定价:(上、下)28.40元

英译者序(摘译)

17 48年版时,这套书的序言只印在上册,为方便读者,英译本将原序中与下册有关的部分摘印于下册.

上册英译本受到的欢迎使笔者加紧了下册的翻译,本人很荣幸能够效力于这部著名教科书英译本的出版,希望欧拉的思想在数学界深受喜爱、广为传播.

作者序

接触到的学生，他们学习无穷分析之所以遇到困难，往往是由于初等代数准备不足。虽然无穷分析并不要求初等代数的全部知识和技能，但有些必备的东西，初等代数或者完全没讲，或者讲得不够详细。本书力求把这类东西讲得既充分又清楚，求得完全弥补初等代数对无穷分析的不足。书中把相当多的难点化易，使得读者逐步地、不知不觉地掌握到无穷这一思想，有很多通常归无穷分析处理的问题，本书使用了代数方法，这清楚地表明了分析与代数两种方法之间的关系。

本书分上、下两册，上册讲纯分析，下册讲必要的几何知识，这是因为无穷分析的讲解常常伴以对几何的应用。别的书中都讲的一般知识本书上、下册都不讲。本书所讲的是别处不讲，或讲得太粗的，或虽讲但所用方法完全不同的。

.....

下册讨论的问题，一般地说都属于高等几何。一般教科书讲这一部分时都从圆锥曲线开始，本书先讲曲线的一般理论，再讲圆锥曲线，为的是能够应用曲线理论去研究任何一种曲线。本书利用描述曲线的方程，而且只用这种方程来研究曲线，曲线的形状和基本性质都从方程推出。我觉得这种处理方法的优越性，在圆锥曲线上表现得最突出。此前人们用几何或分析方法进行处理，都显生硬，不自然。我们先从二阶曲线的通用方程推出了二阶曲线的一般性

质,接下去根据有无伸向无穷的分支,也即是否界于某个有限区域之中,对二阶线进行了分类.对于无穷分支,我们进一步考虑分支的条数,并考虑各条分支有无渐近线.这样我们得到了通常的三种圆锥曲线.第一种是椭圆,它位于一个有限区域之中;第二种是双曲线,它有四条伸向无穷的分支,趋向两条渐近线;第三种是抛物线,有两条伸向无穷的分支,没有渐近线.

接下去,对三阶线用类似的方法,阐述了其一般性质,并将它分为 16 类,事实上是把牛顿的 72 种划分成了 16 类.对这一方法我们的描述是充分的,不难用它对更高阶曲线进行分类.书中用它对四阶曲线进行了分类.

在分阶进行考察之后,我们转向了寻求曲线的共同性质,讲了曲线的切线和法线,也讲了用密切圆半径表示的曲率.这些问题现在一般都用微积分来解决,但本书只在通常代数的基础上对它们进行讨论,为的是使读者能够比较容易地从有穷分析过渡到无穷分析.我们也对曲线的拐点、尖点、二重点和多重点进行了讨论,讲了如何从方程求出这些点,求法都不难,但我不否认用微分学的方法来求更容易.我们也讲到了关于二阶尖点这个有争论的问题.二阶尖点,即有同朝向的两段弧收敛于它的尖点.我们讨论的深入程度不超出看法一致的范围.

我加写了几章,用来讨论具有某些性质的曲线的求法,最后给出了与圆有关的几个问题的解.

作为学习分析的必备知识,我们添上了一个关于曲面的附录,讲了如何用三元方程表达曲面的性质,然后照曲线那样,根据方程的阶将曲面分了类,并证明了只有一阶曲面才是平面.根据伸向无穷的部分将二阶曲面分成了六类,对更高阶的曲面也可以用类似的方法进行分类,我们通过对方程对两个曲面的交线进行了讨论,交线多数都不在一个平面上.

这里申明一点,书中很多东西是别人已经得到了的,恕我没有

一一指出.本书力求简短,如果加上关于问题历史的说明,那将突破本书的篇幅限制.作者可聊以自慰的是,本书对别人已经得到了的东西,其中很多是用另一种方法进行讨论的.很希望广大读者从方法新和全新的东西中,特别是从全新的东西中得到益处.

目 录

英译者序(摘译)	(1)
作者序	(2)
第一章 曲线概述	(1)
第二章 坐标变换	(11)
第三章 代数曲线的阶	(27)
第四章 各阶线的基本性质	(36)
第五章 二阶线	(45)
第六章 二阶线分类	(79)
第七章 伸向无穷的分支	(104)
第八章 关于渐近线	(123)
第九章 三阶线的分类	(141)
第十章 三阶线的基本性质	(156)
第十一章 四阶线	(171)
第十二章 曲线的形状	(181)
第十三章 曲线的性质	(190)
第十四章 曲线的曲率	(201)
第十五章 有一条或几条直径的曲线	(220)
第十六章 依据纵标性质求曲线	(236)
第十七章 依据其他性质求曲线	(256)

第十八章	曲线的相似性和仿射性	(284)
第十九章	曲线的交点	(298)
第二十章	列方程	(320)
第二十一章	超越曲线	(336)
第二十二章	关于圆的几个问题的解	(360)

附录 关于曲面

第一章	物体的表面	(381)
第二章	曲面与平面的交线	(396)
第三章	柱面、锥面、球面的截线	(409)
第四章	坐标变换	(434)
第五章	二阶面	(442)
第六章	曲面与曲面的交线	(457)

第一章

曲线概述

§ 1

通常视变量为可以取一切值的量,因而几何上用无穷直线(这

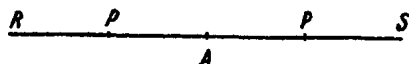


图 1

里记为 RS , 见图 1) 表示变量. 在无穷直线 RS 上取定一个点 A , 拿 A 作为 RS 上一切量的起始点, 则线段 AP 的长度就是变量的一个确定的值, 不同的 AP 表示变量的不同的值, 整个的 RS 表示变量的一切值.

§ 2

设无穷直线 RS 表示的变量为 x , 那么 RS 上的线段就可以表示 x 的每一个确定的值. 例如, 取点 A 作 P , 则这长度为零的线段 AP 就表示 $x=0$ 这个值, 点 P 离点 A 越远, 线段 AP 表示的 x 值越

大.

线段 AP 的长为横标,横标表示变量 x 的确定的值.

§ 3

由于无穷直线 RS 从点 A 向左向右都伸向无穷远,所以 x 的正值负值它都可以表示. 如果取右侧的 x 为正,那么左侧的线段 AP 就表示负的 x . 事实上,点 P 离开 A 右移时线段 AP 增长,它所表示的 x 值增大,反之,点 P 左移,则 x 值减小;当点 P 与 A 重合时, x 值为零;点 P 继续左移时, x 值将小于零,为负,也即,取 A 点右侧的 AP 为正,则左侧的 AP 为负,也可以取左侧为正,那么右侧就为负.

§ 4

我们来看看,用无穷直线表示变量 x 的时候,几何上 x 的函

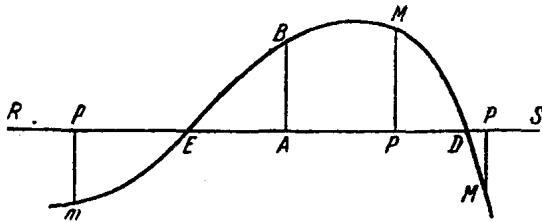


图 2

数怎样表示. 设 y 是 x 的一个函数,那么当 x 为一个确定值时,我们得到一个确定的 y 值. 用无穷直线 RAS (见图 2)表示 x 值,并假定 RS 上方的 y 值为正, RS 上的 y 值为零, RS 下方的 y 值为负,那么,对 AP 确定的每一个 x ,我们引 RS 的垂线 MP ,使线段 MP 等于

对应的 y , 当 y 值为正时, 垂线 MP 在 RS 上方, y 值为负时, PM 在 RS 下方.

§ 5

图 2 所表示的这个函数, $x=0$ 时, $y=AB$, $x=AP$ 时, $y=PM$, $x=AD$ 时, $y=0$. $x=AP$ 时, 如果 y 的值为负, 则垂线 PM 在直线 RS 下方, x 为负值时类似, y 值为正, 则用 RS 上方的垂线表示它, y 值为负, 则用 RS 下方的垂线, 例如 P_m 表示它. 如果对某个 x 值, 例如 $x=AE$, 函数 $y=0$, 则垂线长为零.

§ 6

上述方法使 RS 上的每一个点 P 都有一个对应点 M , AP 为一个 x 值, PM 垂直于 RS , 且 PM 的长等于 AP 所表示的那个 x 所对应的 y 值. 点 M 的位置: y 为正时, 在 RS 上方; y 为负时, 在 RS 下方; y 为零时, 在 RS 上, 即 P 、 M 重合, 图 2 上, 点 D 和 E 处, P 和 M 是重合的. 点 M 全体构成一条直线或曲线, 这直线或曲线由函数 y 决定. x 的任何一个函数 y , 我们都可以用这样的方法把它变成几何上的一条直线或曲线, 这线的性质由函数决定.

§ 7

由函数 y 我们可以确定对应曲线上的每一点, 从而确定整个曲线. 曲线上对应于 P 的点 M 随 PM 的确定而确定. 我们可以这样确定曲线上的每一点. 反之, 对于曲线上的每一点 M , 直线 RS 上都有一个点 P 与它对应. 过曲线上点 M 引纵标, 记垂足为 P , 这 P 就是 M 的对应点, 这线段 AP 的长就是 x , 纵标 PM 的长就是 y

的值,即曲线上的点都由函数 y 确定.

§ 8

让一个点机械地连续运动,可以画出很多不同的线.每做一次这样的运动都得到一条完整的具体的曲线.但我们主要考虑由函数产生的曲线,这种曲线更适于解析处理,更适于微积分. x 的任何一个函数都给出一条线,直线或曲线.反之,每条线也都决定一个函数.可见,我们研究的任何一条曲线,其性质都由这样的一个函数确定:从曲线上任意一点 M 向直线 RS 引纵标 MP ,则数值等于线段 AP 之长的 x 所对应的函数值 y 应该为纵标 MP 的长.

§ 9

从上面对曲线的描述看得出,可将曲线分为连续的和连续的.不连续的也称为混合的,连续曲线可以用 x 的一个确定的函数表示.如果曲线的不同部分,如 BM , MD , DM 等由不同的函数确定,比如 BM 部分由一个函数确定,而 MD 部分由另一个函数确定,等等,则称它为不连续的,或者混合的,或者不规则的.不连续曲线不由一个单一的规律构成,而是由几个连续部分合成.

§ 10

几何主要讲连续曲线.后面我们将证明:依某种不变规则机械地运动,这样画出的曲线都可用一个函数表示,也即都是连续曲线.设 $mEBMDM$ 是可以由 x 的函数 y 表示的连续曲线,那么在直线 RS 上取定了 AP 表示的 x ,则 y 的值就等于纵标 PM 的长.

§ 11

在曲线的这样的定义之下,曲线方程中极常用的几个术语都可继续使用,首先称表示 x 的直线为轴或笛卡尔直线.

称 x 值的起始点为原点,称轴上表示 x 确定值的那一部分,即 AP 为横标.从横标端点 P 垂直于轴画到曲线的直线 DM 叫纵标,也称纵标为直角线,因为它与轴成直角.也可以取纵标与轴成斜角,那时的纵标也称为斜角线.只要不特别声明,我们都采用直角纵标.

§ 12

这样,记横标 AP 为 x ,即 $AP = x$,则函数 y 告诉我们纵标 PM 的大小,即 $PM = y$.连续曲线的性状都由一个函数 y 表示,即都由 y 、 x 和常数的一个关系式表示.轴 RS 上的 AS 部分表示正横标, AR 部分表示负横标, RS 上方为正纵标区域, RS 下方为负纵标区域.

§ 13

由 x 的任何一个函数我们也都得到一条连续曲线,事实上,先让 x 取从 0 到 ∞ 的所有正值,求出对应于每一个 x 的 y 值,并用纵标表示出来. y 为正时纵标在轴的上方,为负时在轴的下方.这样我们就得到了曲线的 BMM 部分.然后让 x 取从 0 到 $-\infty$ 的所有负值,则对应的 y 值确定曲线的 BE_m 部分.两部分合起来就是函数描述的整个曲线.

§ 14

由 y 是 x 的函数知,或 y 为 x 的显函数,或 y 与 x 由一个方程相联系.总之,每条曲线都可以由变量 x 和 y 所构成的方程表示. x 是轴上的横标,从原点 A 算起, y 是垂直于轴的纵标.纵标横标总称为直角坐标.因而可以说曲线的性质由坐标方程决定.

§ 15

这样我们就把对曲线的研究归结成了对函数的研究.因而可以根据函数对曲线进行分类.曲线也首先分为代数的和超越的,纵标 y 是横标 x 的代数函数时,曲线是代数的,也即曲线的性质由坐标 x 和 y 的代数方程表示的时候,称它为代数曲线. x 和 y 构成超越方程,或者 y 是 x 的超越函数,这时的曲线叫超越曲线.这样我们就把曲线分成了代数的和超越的两大类.

§ 16

从 x 得 y ,从 y 得曲线,因而为了考察曲线,我们应该考虑这函数是单值的还是多值的.先假定 y 是 x 的单值函数,也即 $y = P$, P 是 x 的某个单值函数.这样对每一个确定的 x 值我们都得到一个确定的 y 值,也即每一个横标都对应于一个纵标.从而得到曲线的形状是:对轴 RS 上的任意一点 P ,过 P 垂直于 RS 的直线 PM 都与曲线相交,并且只交于一点 M .这样一来,轴上的每一点都对应曲线上一点,而轴两面伸向无穷,所以曲线也两面伸向无穷.换句话说,从单值函数得到的曲线,随 x 轴两面无间断地伸向无穷,图 2 所示曲线 $EBMDM$ 就是两面无间断地伸向无穷的.

§ 17

设 y 为 x 的二值函数, 或者 P, Q 表示 x 的单值函数, $y^2 = 2Py - Q$, 从而 $y = \pm\sqrt{P^2 - Q}$, 那么每一个横标 x 将对应两个纵标 y . 这两个纵标, 或者同为实数, 或者同为虚数. $P^2 > Q$ 时同为实数, $P^2 < Q$ 时同为虚数, 因而当两个 y 值都为实数时, 横标 AP 对应两个纵标 PM, PM , 也即过 P 点与轴垂直的直线交曲线于 M 和 M' 两点. 如果 $P^2 < Q$, 则没有纵标与横标对应, 也即过点 P 垂直于横轴

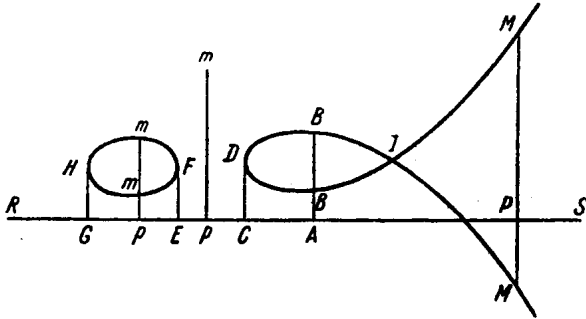


图 3

的直线同曲线不相交. 图 3 上点 P 处就是这样. 由于从 $P^2 > Q$ 不能越过实与虚的衔接点 $P^2 = Q$ 变为 $P^2 < Q$, 因而在实纵标结束点处, 如 C 和 G , 必 $y = P \pm 0$, 也即两个纵标相等, 曲线向相反的两个方向弯曲.

§ 18

从图 3 上我们看到, 当负的横标 $-x$ 在 AC 和 AE 之间时, 纵标是虚的, 此时 $P^2 < Q$. 如果 E 点继续左移, 纵标将重新变为实数

(但不能越过使 $Q^2 = P$ 的点 E , 点 E 处两个纵标相等), 又重新是横标 AP 对应两个纵标 Pm 和 Pm , 到 G 又两个纵标相等, 过 G 纵标再次变为虚数. 可见这种曲线是由彼此分离的两部分, 如 $MB-DBM$ 和 $FmHm$ 或更多部分组成. 但是应该认为作为总体来研究的这几部分共同构成一条连续的或规则的曲线, 因为不同部分产生于同一个函数. 可见这种曲线具有如下的性质: 过横轴上一点引垂直于横轴的直线 MM , 则 MM 与曲线或者不相交, 或者相交于两点, 两点重合处, 如 D, F, H 和 I 处例外.

§ 19

如果 y 是 x 的三值函数, 也即如果 y 由状如

$$y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$$

的方程决定, 其中 P, Q, R 是 x 的单值函数, 那么对每一个横标 x , 纵标 y 将有三个值. 这三个值或者全实, 或者一实两虚. 因此这纵标线与曲线必定或者相交于三点, 或者只相交于一点, 两点重合处例外. 可见每一个横标至少对应于一个实纵标, 这意味着曲线随 x 轴一起向两面无穷延伸, 因而这曲线或者由一根连续曲线构成, 如图 4, 或者由分离的两部分构成, 如图 5, 或者由更多部分构成.

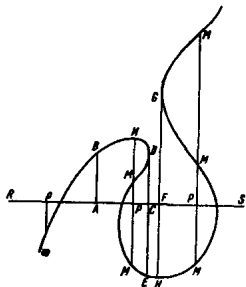


图 4

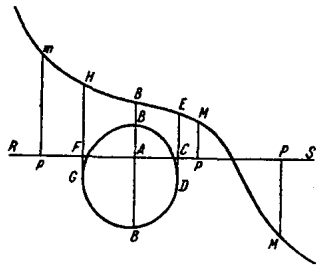


图 5