高等学校教材

机械优化设计

濮良贵等 编著

西北工业大学出版社

内 容 提 要

本书共五章，包括：优化设计总论、一元函数的优化方法、机械优化设计中常用的无约束优化方法、机械优化设计中常用的约束优化方法、机械优化设计实例。另有附录：常用优化方法源程序。

本书主要用作高等工科院校机械类专业高年级学生学习机械优化设计课程的教材，约需讲授40学时左右，亦可供其它专业的师生及工程技术人员参考。

高等学校教材
机械优化设计
主　编　濮良贵
责任编辑　雷　鹏
责任校对　钱伟峰
*
西北工业大学出版社出版
(西安市友谊西路127号)
陕西省新华书店发行
陕西省富平县印刷厂印装
ISBN 7-5612-0291-1／TH·14(课)
*
开本 787×1092 毫米 1／16　9.5 印张　229 千字
1991 年 6 月第 1 版　1991 年 6 月第 1 次印刷
印数 1—3800 册　定价 2.55 元

序

随着科学技术的发展，现代设计方法已被日益广泛地采用。而优化设计是现代设计方法的重要组成部分，科技发达的国家已将优化技术列为科技人员的基本职业训练项目。为了便于高等学校学生学习机械优化设计及推广优化方法在机械设计中的应用，我们编写了《机械优化设计》一书。本书共五章，包括优化设计总论、一元函数的优化方法、机械优化设计中常用的无约束优化方法及约束优化方法、机械优化法设计实例等。另有附录：常用优化方法源程序。

本书主要用作高等工科院校机械类专业高年级学生学习机械优化设计课程的教材，约需讲授40学时左右，亦可供其它专业师生及工程技术人员参考。

本书主要介绍优化设计的基本概念和基本方法，重点讨论优化方法在机械设计中的应用，略去数学理论方面的推导和论证。为了便于学生运用计算机试作各章的习题，附录中编入了常用优化方法源程序。

本书的编写力求通俗易懂，学以致用。书中采用我国法定计量标准规定的单位、名称及符号，优化方法中则采用国际惯用的术语、符号及表示方法。

本书承西安交通大学芈振南教授审阅全稿，并提出许多宝贵的改进意见，在此表示衷心的感谢！同时向本书引用的参考文献的著者们致以谢意！

参加本书编写工作的有濮良贵（第一、二章第五章一部分）、王三民（第四章全部和第五章、附录的一部分）和周鸿（第三章全部和第五章、附录的一部分），由濮良贵担任主编。由于我们的水平及时间所限，误漏不当之处，敬希读者随时批评指正。

编　者

1989年9月

目　　录

第一章　优化设计总论

§1-1 概　述

一、优化的含义

优化的含义，就是在处理各种事物的一切可能的方案中，寻求最优的方案。绝对的最优，只有在某些理论性计算中才可以达到。例如求函数 $f(\mathbf{X})=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2$ 的最小值，显然只有 $\mathbf{X}^*=[2,\ 3]^T$ 为其最优点，此时的最小值 $f^*=0$。但在实际事物中，没有不受客观条件限制的情况，因而实用中的优化问题，都是在给定的条件下，从一切可行的方案中寻求最适当的方案。从这个意义上说，对于实际的事物，所谓最优化，无不带有一定的客观性和相对性。

二、优化方法发展简介

人类在发展的进程中，很早以前就有了最简单的优化意向，但是科学地表达出优化的概念，还是从 17 世纪时随着数学的发展而开始的。古典的优化方法，主要是应用微分法和变分法。直到本世纪 40 年代初，由于军事上的需要，优化技术才开始应用于解决实际问题。例如当时的轰炸机在轰炸一个目标时，并没有精确的瞄准装置，而是采取"俯冲轰炸"。这就需要研究出一个既有效而又安全的飞行轨迹，于是就根据飞机本身的飞行性能、当时的高射炮射程及炮弹飞行轨迹（抛物线）的包络线，设计出一条最佳的俯冲轰炸飞行轨迹。到了本世纪 50 年代，线性规划已开始应用到工业建设、交通运输、物资调配、生产管理等很多领域中，显示出了初步的效能。特别是 60 年代，随着电子计算机的诞生和应用数学的发展，优化理论和方法已形成了专门的学科，并在各行各业中得到了日益广泛的应用。近 20 年来，优化技术已在工业、农业、交通、运输、能源、军事等各条战线上发挥着重要的作用。

国外如 Bell 飞机公司对大型机翼用 138 个变量进行优化设计，使质量减小了约 1／3；大型运输舰用 10 个变量进行优化设计，使造价降低约 10%。其它的实例还很多，甚至对长跑运动员的条件，也从运动学和动力学的角度进行了优化研究[17]①。所以，优化技术的应用几乎达到"无孔不入"的程度。在科技发达的国家，已将优化技术列入科技人员的基本职业训练项目。

我国对优化理论及方法的研究虽然起步较晚，但经过科研部门、高等学校及生产建设单位的多方努力，也取得了较快的进展和可观的经济效益。例如：轨距 24m、起重量 5.5MN（≈550t）的桥式起重机的主梁，优化后的质量平均减小 14%；矿山用单级圆柱齿轮减速器，优化后的质量减小了 12%；摆线针轮减速器则减小了 15%，由此可见，优化技术在四化建设中的作用是很巨大的。

现代优化方法主要以数学规划为核心，以高速电子计算机为工具，向着多变量、多目

① 本书用带有方括号的数字代表书末参考文献的序号。

标、高效率、高精度方向发展，成为科技研究、经济开发、产品创新等工作中强有力的助手，并在各行各业的革新与竞争中日益显示其威力。

三、机械优化设计的内容和目的

机械优化设计是把优化技术应用到机械设计中去，通过对机械零件、机构、部件乃至整个机械系统和机器的优化设计，确定出它们的最佳参数和结构尺寸（取代过去长期使用的可行性设计方法），从而提高各种机械产品及技术装备的设计水平，为我国的社会主义经济建设服务。

§1-2 优化设计的数学模型

优化设计的数学模型，就是描述优化问题的设计内容、变量关系、有关条件和优化意图的数学表达式。对于机械优化设计问题，它的数学模型是通过对设计问题的全面分析研究，根据设计对象的机理、设计准则、计算方法、各量间的依存条件及优化目标等，抽象出一组数学表达式来反映的。数学模型是优化设计的基础。数学模型能否严密而准确地反映优化问题的实质，是优化设计成败的关键。有了正确的数学模型，才能对照选择适当的优化方法来求解模型中的数学问题，得出优化设计的方案，经过检查与评定，最后获得满意的优化结果。

优化设计的数学模型包含三个要素，即设计变量、目标函数和约束条件。

一、设计变量

一个优化设计方案是用一组设计参数的最优组合来表示的。这些设计参数可概括地划分为两类：一类是可以根据客观规律、具体条件、已有数据等预先给定的参数，称为设计常量，如材料的机械性能、机械的工作情况系数等（这类参数实质上都不是常量，但作为常量处理时一般不会带来严重的误差）；另一类是在优化过程中经过逐步调整，最后达到最优值的独立参数，称为设计变量。优化设计的目的就是使各个设计变量达到最优的组合。

设计变量的个数就是优化问题的维数。例如有 n 个设计变量 x_1，x_2，…，x_n 的优化问题，就是在 n 维空间求优，设计空间里以 n 个变量为坐标的点 $\mathbf{X}$ 就代表一个设计方案。以矢量表示时，可记为

$$\mathbf{X}=[\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\ ]^{\mathrm{T}} \text{ 或 } \mathbf{X}\in E^n$$

式中 E^n 代表 n 维欧几里德空间(欧氏空间)。此时，$\mathbf{X}$ 即为从 n 个坐标轴的原点起到以 n 个变量为坐标的 $\mathbf{X}$ 点止的一个 n 维矢量。当 $n>3$ 时，$\mathbf{X}$ 即为一个超空间矢量。

当变量为连续量时，称为连续变量，如拉杆的长度、轴的转速、四杆机构的传动角等；当变量只能在离散量中取值时，称为离散变量，如齿轮的模数、滚动轴承的直径、V 带的根数、蜗轮的齿数等，其中 V 带的根数、蜗轮的齿数只能取为整数，也称为整数变量。

二、目标函数

目标函数是反映设计变量间相互关系的数学表达式。由于目标函数值可以直接用来评价优化方案的好坏，所以又称它为评价函数。

在机械优化设计中，追求的目标有目标函数达到极小值，如减速器的外廓尺寸最小、滑动轴承的功耗最小等；有的则追求极大值，如弹簧的减震能力最大、减速器的输出功率最大等。由于

$$\max f(\mathbf{X}) = -\min[-f(\mathbf{X})] \tag{1-1}$$

在优化问题中为了规范化，把极大化和极小化统一表示为极小化。所以在以后讨论的优化问题中，一律按极小化考虑，即统一表示为

$$\min f(\mathbf{X}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{1-2}$$

如果优化问题只有一个目标函数，称为单目标优化问题。例如优化设计弹簧时，只要求减震能力最大，这时只有一个目标函数，就属于单目标优化问题。当把目标函数值作为变量来看待时，因为单目标优化问题在目标空间只有一个变量，所以又称为标量优化问题。

如果对弹簧的设计除上述要求外，还要求它的压并体积最小，那就得建立两个目标函数 $f_1(X)$ 和 $f_2(X)$，这就属于多目标优化问题了。

多目标优化问题的目标函数通常表示为

$$V-\min F(\mathbf{X}) = [f_1(\mathbf{X}), f_2(\mathbf{X}), \cdots, f_m(\mathbf{X})]^T$$

$$\mathbf{X} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$$

这时的目标函数在目标空间已经是一个 m 维矢量，所以又称为矢量优化问题(一般用 min 加上一个前缀“$V-$”来表示矢量极小化)。

本书只讨论单目标优化问题（多目标优化问题只介绍到这里)。

三、约束条件

约束条件也称约束函数或设计约束，它是设计变量间或设计变量本身应该遵循的限制条件的数学表达式。这在工程实际的优化问题中是不可避免的。例如零件的尺寸和制造成本、V 带的根数等都不可能是小于或等于零的。

约束条件按其表达式可分为不等式约束和等式约束两种，即

$$g_j(\mathbf{X}) \geqslant 0 \qquad j=1, 2, \cdots, p$$

$$h_k(\mathbf{X}) = 0 \qquad k=1, 2, \cdots, q$$

按约束条件的性质又可分为性能约束和边界约束。性能约束是对设计对象的某种性能给出的限制,如零件工作应力的计算式应小于或等于许用应力，轴的挠度的计算式应小于或等于许用挠度等。边界约束是对某些变量的取值范围的限制，可能只给出上限或下限，也可能同时给出上、下限，即

$$a_i \leqslant x_i \leqslant b_i \qquad i=1, 2, \cdots, n$$

例如斜齿圆柱齿轮的螺旋角常限制为 8°—15° 等。对于这类约束，显然可化为

$$x_i - a_i \geqslant 0$$

$$b_i - x_i \geqslant 0$$

式中 a_i、b_i 为常量，所以也称常量约束。

按约束条件的作用还可划分为起作用的约束（紧约束、有效约束）和不起作用的约束(松约束、消极约束)。等式约束相当于设计空间里一条曲线（曲面或超曲面），设计点必须

为该曲线（曲面或超曲面）上的一点，因而总是紧约束。有一个独立的等式约束，就可用代入法消去一个设计变量，使优化问题降低一维。因此，数学模型中独立的等式约束的数目应小于设计变量的数目；如果相等，就不是一个待定优化系统，而成为没有优化余地的既定系统了。不等式约束通常是以其边界 $g(\mathbf{X})=0$[或 $g(\mathbf{X})\approx 0$]表现出约束作用的，它只限制设计点必须落在允许的区域内（包括边界上），称为可行域（可行域以外均为非可行域），因而不等式约束的数目与设计变量的数目无关。

不带约束条件的优化问题称为无约束优化问题；带有约束条件时则称为约束优化问题。如前所述，工程实际中的优化问题均属于后者，因而设计点 $\mathbf{X}$ 需落在由一些紧约束围成的可行域 D 内，而 D 为包含于 n 维欧几里德实空间的一个子集，即 $\mathbf{X}\in D\subset E^n$。

四、数学模型及有关说明

综上所述，数学模型的基本表达式为：

对无约束优化问题

$$\min f(\mathbf{X}) \qquad \mathbf{X}\in E^n \tag{1-3}$$

对约束优化问题

$$\left.\begin{aligned} &\min f(\mathbf{X}) && \mathbf{X}\in E^n \\ &\text{s.t. } g_j(\mathbf{X})\geqslant 0 && j=1,\ 2,\ \cdots,\ p \\ &h_k(\mathbf{X})=0 && k=1,\ 2,\ \cdots,\ q \end{aligned}\right\} \tag{1-4}$$

式中“s.t.”为 Subject to 的缩写，意即“满足于”或“受限于”。上式也可写为

$$\left.\begin{aligned} &\min_{\mathbf{X}\in D\subset E^n} f(\mathbf{X}) \\ &D=\left\{\mathbf{X}|g_j(\mathbf{X})\geqslant 0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ p;\ h_k(\mathbf{X})=0,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ q\right\} \end{aligned}\right\} \tag{1-4'}$$

利用某种优化方法求解上式后，即可得到优化的一组设计变量或一个优化设计方案

$$\mathbf{X}^*=[x_1^*,\ x_2^*,\ \cdots,\ x_n^*]^T$$

称为优化问题的最优点；对应的目标函数值 $f^*=f(\mathbf{X}^*)$称为最优值；$\mathbf{X}^*$ 与 f^* 合称为最优解。

前已说明，数学模型是优化设计的基础，建模工作的好坏，是优化设计成败的关键。虽然在机械优化设计中，大多的数学模型是可以根据设计对象的机理、设计准则、计算方法和有关资料建立的，但应明确，一个数学模型建成后，不一定就能直接用来编程和求优，而是通常需要进行全面的分析检查，并做好必要的简化、调整、加工等工作。

(1) 在不影响或影响甚小的原则下，应尽可能地减少设计变量及约束条件，或将某些数学式改用允许的近似表达式，使数学模型尽可能简化。

(2) 当数学模型中某些变量间的数量级悬殊较大时，应适当调整它们的单位（即尺度变换），以改善函数的形态。例如 $f(\mathbf{X})=0.01x_1^2+100x_2^2-x_1x_2$，它的等值线形状显然是非常瘦长的椭圆族，将使数值迭代时难于收敛和计算误差增大，如对变量的单位适当调整，令 $x_1'=x_1/10$，$x_2'=10x_2$，该式将变为 $f(\mathbf{X})=x_1'^2+x_2'^2-x_1'x_2'$，这时的迭代求优就会方

便得多。

(3) 计算式中的某些参数可能只有表格、曲线、公式等资料，需要进行回归处理或曲线拟合，方能利于计算或编程。例如圆柱形圆丝扭转螺旋弹簧的曲度系数 $K=(4C-1)/(4C-4)$，C 为弹簧指数（旋绕比），在优化设计时应通过回归计算改为 $K=1.425/C^{0.115}$。

(4) 必要时还应对数学模型中的函数进行数学特性分析，如凹凸性、光滑性、振荡性等。

当然，对于较为复杂的优化问题，建模工作可能要经过几次反复，才能使数学模型达到合理的程度。

§1-3 优化设计的几何描述

为了进一步阐明优化设计的概念，现举两例用几何图形来直观地描述优化设计的原理。

(1) 设有二维约束优化问题的数学模型为

$$\min f(\mathbf{X})=x_1^2+x_2 \qquad \mathbf{X}\in E^2$$
$$\text{s.t.}\ g_1(\mathbf{X})=-(x_1^2+x_2^2)+9\geqslant 0$$
$$g_2(\mathbf{X})=-x_1-x_2+1\geqslant 0$$

目标函数的等值线及约束函数的图像如图 1-1 所示。

目标函数 $f(\mathbf{X})$的等值线方程可写为

$$x_1^2+x_2=C_i \qquad i=1,\ 2,\ \cdots$$

式中 C 为常数。此式代表以 x_2 轴为对称线的抛物线族。

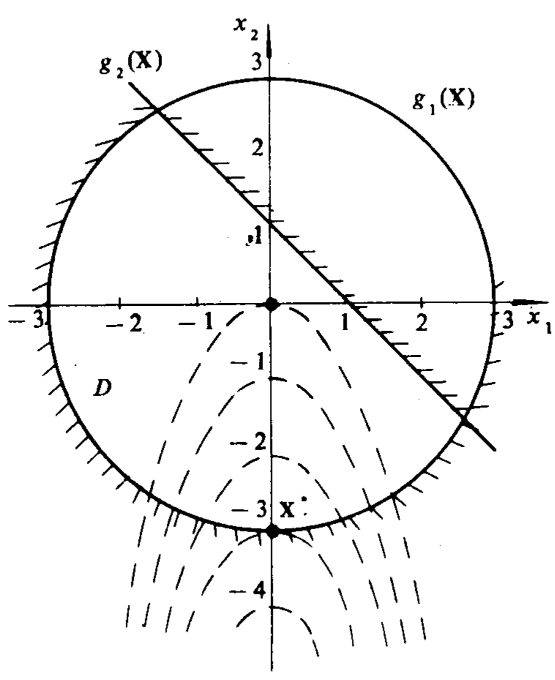


图 1-1 二维约束优化问题的几何描述之一

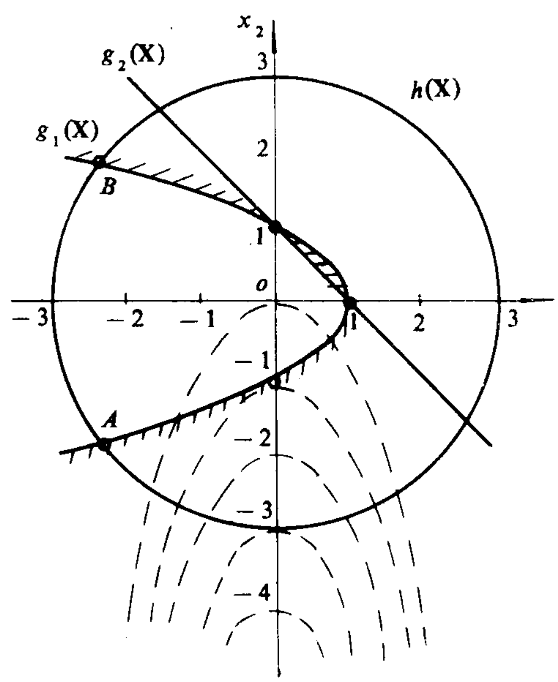


图 1-2 二维约束优化问题的几何描述之二

由 $g_1(\mathbf{X})$，$g_2(\mathbf{X})$围成的可行域 D 即为可行点 $\mathbf{X}$ 的集合，可行域 D 以外的区域均为非可

行域。

由图可以看出，$f(\mathbf{X})$的约束极值点为圆与等值线的切点 $\mathbf{X}^*$，即 $\mathbf{X}^*=[0,\ -3]^T$，$f^*=f(\mathbf{X}^*)=-3$。$g_1(\mathbf{X})$是起作用的约束，而 $g_2(\mathbf{X})$为不起作用的约束。

另外，极易判明，$f(\mathbf{X})$为凸函数，约束域 D 为一凸集，故 $\mathbf{X}^*$即为其全域极小点，f^*即为其全域极小值。

(2) 设有二维约束优化问题的数学模型如下：

$$\min f(\mathbf{X})=x_1^2+x_2 \qquad \mathbf{X}\in E^2$$

$$\text{s.t.}\ g_1(\mathbf{X})=-(x_1+x_2^2)+1>0$$

$$g_2(\mathbf{X})=-(x_1+x_2)+1>0$$

$$h(\mathbf{X})=x_1^2+x_2^2-9=0$$

各式的图像见图 1-2。

本题除不等式约束 $g_1(\mathbf{X})$，$g_2(\mathbf{X})$外，还有一个等式约束 $h(\mathbf{X})$，$f(\mathbf{X})$的等值线如图所示，$g_1(\mathbf{X})$，$g_2(\mathbf{X})$的作用如阴影所示，但因存在等式约束 $h(\mathbf{X})$，它限制了设计点必须位于半径等于 3 的圆周上，于是可行域仅剩下被 $g_1(\mathbf{X})=0$ 所截的一小段圆弧 $\widehat{AB}$ 上。此时的约束极值点显然即为 A 点，即 $\mathbf{X}^*=[-2.37\ \ -1.84]^T$，$f^*=f(\mathbf{X}^*)=3.7769$。

§1-4 优化方法的概略分类

优化方法的类别很多，从不同的角度出发，可以作出各种不同的分类：

(1) 按目标函数的多少，可分为单目标优化方法和多目标优化方法。

(2) 按所能求解的函数的维数，可分为一维优化方法（也称一维搜索）和多维优化方法。

(3) 按约束情况分可分为无约束优化方法和约束优化方法。

(4) 按求优的途径则可分为：1）利用已有信息及再生信息进行试探及迭代求优的数值法（也称直接法）；2）利用函数性态通过微分或变分求优的解析法（也称间接法）；3）利用作图求优的图解法（主要用于不超过二维的优化问题）；4）利用实验数据的变化过程求优的实验法（主要用于不能或不便建立数学模型的优化问题）；5）对一些典型解进行综合对比、估计与选择的情况研究法（主要用于较粗略的优化问题可按“次优解”终结的场合）。

(5) 对于能够用数学模型表达的优化问题，所用的求优方法统称为数学优化法，其中包括数学规划法和最优控制法。由于最优控制问题的数值解法常可通过离散化等措施转化为数学规划问题，所以一般只着重讨论数学规划法。对于难以抽象出合适的数学模型的优化问题，如总体方案优化、结构形式优化等，则多采用经验推理、方案对比、人工智能或专家系统等方法求优。对于桁架、框架等类的结构优化问题，则多采用准则法求优，如满应力准则法、能量准则法等。

数学规划自从 Robert Dorfman 于 1950 年左右提出后，近 40 年来发展很快，除有单目标及多目标数学规划之分外，按单目标数学规划的数学模型（为了便于说明，现将式（1-4）重写于后）

$$\min f(\mathbf{X}) \qquad \mathbf{X}\in E^n$$

$$\text{s.t. } g_j(\mathbf{X}) \geqslant 0 \qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ p$$
$$h_k(\mathbf{X})=0 \qquad k=1,\ 2,\ \cdots,\ q$$

又可划分为:

(1) 当 $f(\mathbf{X})$，$g_j(\mathbf{X})$，$h_k(\mathbf{X})$ 均为线性函数时，称为线性规划;

(2) 当 $f(\mathbf{X})$，$g_j(\mathbf{X})$，$h_k(\mathbf{X})$ 中任一式为非线性函数时，称为非线性规划;

(3) 当 $f(\mathbf{X})$ 为二次函数，$g_j(\mathbf{X})$，$h_k(\mathbf{X})$ 均为线性函数时，称为二次规划（为非线性规划的特例）;

(4) 当 $f(\mathbf{X})$，$g_j(\mathbf{X})$ 为广义多项式时，称为几何规划（用算术平均 — 几何平均定理等求优）;

(5) 当 $f(\mathbf{X})$ 为一较复杂的机械系统，需经多阶段的决策过程求优时，称为动态规划;

(6) 当 $f(\mathbf{X})$ 为凸函数、约束函数为凹函数时，称为凸（性）规划;

(7) 当设计变量中有某个或某些只能取为整数时，称为整数规划；如只能取为 0 或 1 时，称为 0 − 1 规划；如只能取为某些离散值时，称为离散规划。

此外，还有一些针对不同情况给出的不同名称。

本书主要讨论机械优化设计中常用的非线性规划。

§1−5 优化问题的迭代解法

一、迭代方法

在前述的优化方法中，解析法虽然具有概念简明、计算精确等优点，但因只能适用于简单或特殊问题的求优，对于复杂的工程实际问题通常无能为力，所以极少应用。在机械优化设计中，一般是用数值法，也就是利用已知的和再生的信息，通过若干次迭代来逐步逼近问题的最优点。例如对于图 1 − 3（*a*）表示的二维函数求其无约束最优点时，只须任选一初始点 $\mathbf{X}^{(0)}$，从 $\mathbf{X}^{(0)}$ 点出发沿着某种优化方法采用的搜索方向 $\mathbf{S}^{(0)}$，以初选步长 $\alpha^{(0)}$ 按下面的迭代公式求出一个新点

$$\mathbf{X}^{(1)}=\mathbf{X}^{(0)}+\alpha^{(0)}\mathbf{S}^{(0)}$$

然后检查函数值是否有所下降，如果

$$f(\mathbf{X}^{(1)})<f(\mathbf{X}^{(0)})$$

就说明了 $\mathbf{X}^{(1)}$点优于 $\mathbf{X}^{(0)}$点，亦即满足了适用性的要求。于是接着以 $\mathbf{X}^{(1)}$点作为起点仿上进行迭代搜索，得到

$$\mathbf{X}^{(2)}=\mathbf{X}^{(1)}+\alpha^{(1)}\mathbf{S}^{(1)}$$

设 $f(\mathbf{X}^{(2)})<f(\mathbf{X}^{(1)})$，则 $\mathbf{X}^{(2)}$ 亦为适用点。循此以往，直到求得所需的

$$\mathbf{X}^{(K+1)}=\mathbf{X}^{(K)}+\alpha^{(K)}\mathbf{S}^{(K)} \tag{1-5}$$

上式即为迭代计算的基本公式。

由于每次迭代求得的新点均为使函数值有所下降的适用点（如果不是适用点时，可改变方向和步长另行搜索适用点），则所得各点必将逐步向该函数的极值点逼近，最后总可

求得非常接近该函数理论最优点的近似最优点 X^*。

对于有约束的优化问题（图 1-3（b）），除了检查每个新点的适用性外，还要检查其可行性，即是否满足 $g(X)>0$ 的约束条件。如果适用性和可行性兼备，再仿前进行下一次迭代，最终自然也能得到非常接近该函数的约束最优点的近似最优点 X^*。

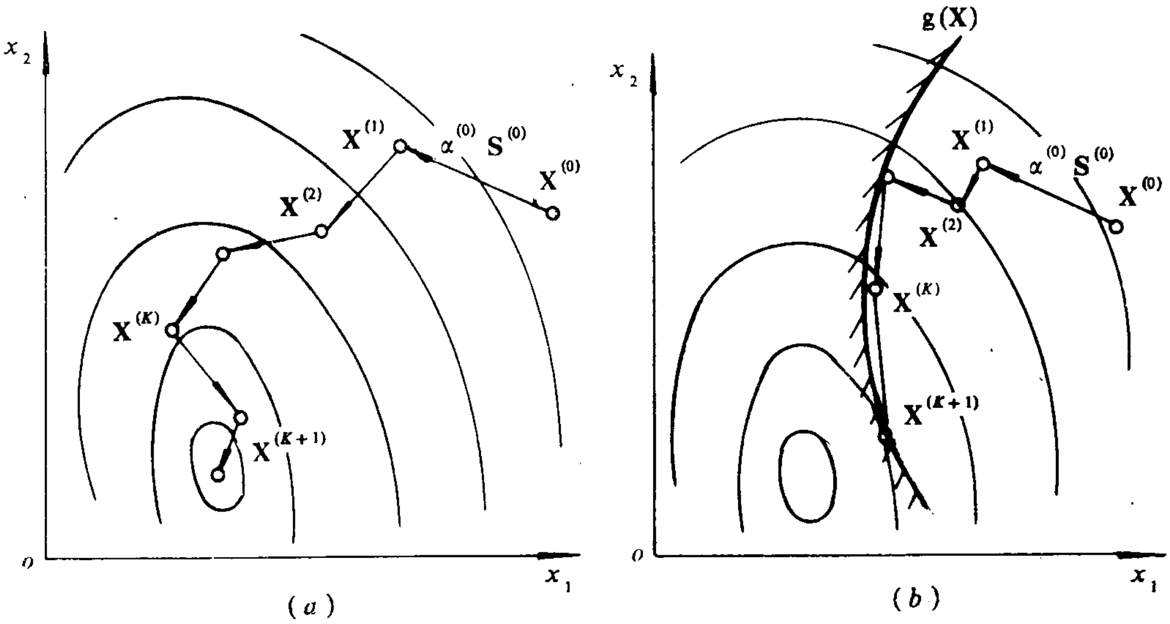


图 1-3 二维问题的迭代求优

综上可知，采用数值法进行迭代求优时，除了选择初始点 $X^{(0)}$外，如何确定迭代方向 $S^{(K)}$和迭代步长 $\alpha^{(K)}$便成为非常重要的环节，它们将直接决定着搜索的效率、函数值逐步下降的稳定性和所需的机时等，各种迭代求优方法也主要是在上述环节上显示出各自的特点。

二、终止准则

用迭代方法求优时，虽然所得各新点依次逐步向理论上的无约束或约束最优点靠拢，而且理论上可以无限趋近，但又不会真正达到。另一方面，从工程实际需要和经济上考虑，追求问题的精确解也是没有必要的。因此，就应根据不同的优化方法、迭代过程中产生的信息及所需的计算精度 ε（足够小的正数），定出某个相应的终止准则，一旦迭代到满足终止准则，即可停止迭代，输出近似最优解 X^* 和 $f^*=f(X^*)$。

可以建立多种不同的迭代终止准则。无约束优化问题常用的迭代终止准则有:

(1) 根据相邻两迭代点 $X^{(K)}$与 $X^{(K+1)}$间的距离足够小而建立的点距准则可表示为

$$\|X^{(K+1)}-X^{(K)}\|\leqslant\varepsilon \tag{1-6}$$

或

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i^{(K+1)}-X_i^{(K)})^2}\leqslant\varepsilon \tag{1-7}$$

(2) 根据相邻两迭代点的函数值下降量足够小而建立的函数值下降量准则可表示为

1) 绝对下降量 $$\left|f(X^{(K+1)}-f(X^{(K)})\right|\leqslant\varepsilon \tag{1-8}$$

2) 相对下降量 $$\left|\frac{f(\mathbf{X}^{(K+1)} - f(\mathbf{X}^{(K)})}{f(\mathbf{X}^{(K+1)})}\right| \leqslant \varepsilon \qquad (|f(\mathbf{X}^{(K+1)})| > 1) \qquad (1-9)$$

(3) 根据迭代点的函数梯度达到足够小而建立的梯度准则可表示为

$$\| \nabla f(\mathbf{X}^{(K+1)})\| \leqslant \varepsilon \qquad (f(\mathbf{X})\text{为凸函数}) \qquad (1-10)$$

对于约束优化问题，其迭代终止准则将在第四章中根据不同的优化方法另作介绍。

§1-6 机械优化设计的一般步骤

机械设计中的优化问题大多是多变量的非线性规划问题，进行优化设计的一般步骤是:

一、分析机械设计问题，建立数学模型

首先是分析具体的设计对象（如某个零件、机构、部件、系统、整机），确定出设计要求、设计准则、已知条件、设计变量、约束条件、优化目标、计算精度等，然后将机械优化设计问题经过正确的抽象而转化为数学问题，从而建立起优化设计的数学模型。

二、选择优化方法，进行解算

针对数学模型的特点（目标函数的维数、非线性程度、约束情况、求解难度等）、已知条件、精度要求等，选择合用的优化方法。选择优化方法的一般原则是:

(1) 求解的成功率或可靠性高;

(2) 计算工作量小，求解速度高;

(3) 逻辑结构简单，计算程序不太复杂，占用的内存少;

(4) 数值稳定性好，计算精度高;

(5) 对函数性态的限制少，对约束满足的程度高。

为了能够较为合理地选择优化方法，学习时应深入了解常用优化方法的基本原理、算法程序的结构及特点，并能熟练地运用它们。

三、方案评价与决策

检查与评价优化方案是否合理，所得出的优化参数是否需进行可能的合理的调整或圆整，是否合乎现实的生产条件，方案是否最优，这是优化设计中极为重要的环节。作为一个设计工作者，决不应单凭计算机输出的数据，而要不排除计算机输出不合理甚至荒谬的结果的可能性，要用敏锐的工程洞察力去分析判断优化的方案，从而作出圆满的最终决策。

综合以上数点，可将机械优化设计的一般步骤概括表示为图 1-4 所示的流程。

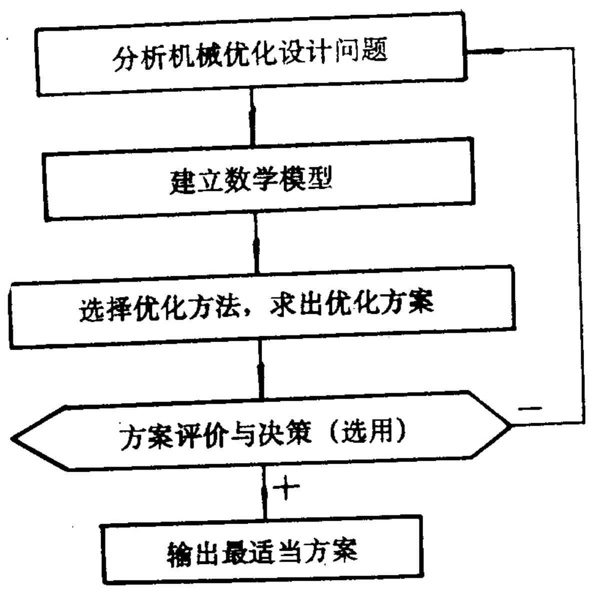


图 1-4 机械优化设计的流程

习 题 一

1-1 试画出下列约束条件下 $\mathbf{X}=[x_1,\ x_2]^T$ 的可行域，并说明哪个是不起作用的约束。

1. $g_1(\mathbf{X})=-x_1^2+x_2>0$　　$g_2(\mathbf{X})=x_1-x_2+3>0$　　$g_3(\mathbf{X})=-x_1-x_2+8>0$

2. $g_1(\mathbf{X})=x_1+\frac{x_2}{2}-3>0$　　$g_2(\mathbf{X})=x_1>0$　　$g_3(\mathbf{X})=x_2>0$

$h(\mathbf{X})=-x_1^2-x_2^2+16>0$

1-2 已知约束条件为

$g_1(\mathbf{X})=-x_1+x_2-3>0$

$g_2(\mathbf{X})=-x_1^2-x_1^2+9>0$

试问 $\mathbf{X}_1=[2,\ -2]^T$，$\mathbf{X}_2=[3,\ 3]^T$，$\mathbf{X}_3=[-3,\ 0]^T$，$\mathbf{X}_4=[-1,\ 1]^T$ 等四点中有几个可行点？并写出可行点。

1-3 已知优化问题的数学模型为

$$\min f(\mathbf{X})=(x_1-3)^2+(x_2-4)^2 \qquad \mathbf{X}\in E^2$$

$$\text{s.t.}\ g_1(\mathbf{X})=x_1-x_2-\frac{5}{2}>0$$

$$g_2(\mathbf{X})=-x_1-x_2+5>0$$

$$g_3(\mathbf{X})=x_1>0$$

$$g_4(\mathbf{X})=x_2>0$$

试用图解法求出：

1. 无约束最优点，并求出其最优值；

2. 约束最优点，并求出其最优值；

3. 如加上一个等式约束 $h(\mathbf{X})=x_1-x_2=0$，其约束最优解是什么？

1-4 某厂生产 A、B 两种产品：A 每桶需用煤 90kN、电 4 度、劳动日 3 个，获利润 700 元；B 每桶需用煤 40kN、电 5 度、劳动日 10 个，获利润 1 200 元。但计划规定可用煤 3 600kN、电 200 度、劳动日 300 个，试问 A、B 各生产多少桶时利润最大？列出其数学模型，并说明属于何种数学规划问题？

1-5 设计一个展开式二级圆柱齿轮减速器，要求其高、低速轴间的中心距最小。已知总传动比 $i=i_1\times i_2=4$，齿轮齿数 $z_1=z_3$，模数均为 2.5mm，试建立其数学模型，并说明属于何种数学规划问题。

1-6 自行提出一个数学规划问题，并建立其数学模型。

1-7 当一个矩形无盖油箱的外部总面积限定为 S 时，怎样设计可使油箱的容量最大？试列出这个优化问题的数学模型，并回答：

1. 属于几维的优化问题？

2. 是线性规划还是非线性规划问题？

第二章　一元函数的优化方法

§2－1　概　述

一元函数 $f(x)$的优化问题，就是求 $f(x)$的极值问题，也就是寻求单变量 x 的某个值 x^*，使 $f(x^*)$达到 $f(x)$的最优值 f^*(f_{min} 或 f_{max})的问题。因为解决这类问题只需在一维空间内搜索 $f(x)$的极值点 x^*，所以又称为一维优化或一维搜索。

必须明确，虽然在工程实际中，优化问题的目标函数大都是多元函数，但因在多元函数的优化过程中，常常需要多次反复使用沿着某个指定方向进行一维搜索，所以一维优化方法虽是优化问题中最简单的方法，却是应用最为频繁的最基本的方法。而且收敛速度的快慢，占用机时和内存的多少，可靠性和计算精度的高低等等，对问题的优化效果都有着重要的影响，故应给予足够的重视。

当然，对于多元函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的优化问题，在n维空间沿着某一给定方向 $\mathbf{S}$ 进行搜索时，也是一种广义的一维搜索(因为一般不是沿某个坐标轴方向搜索)。此时常采用前章介绍的迭代方法。如图2－1所示，由选定的初始点$\mathbf{X}^{(k)}$出发，以步长 $\alpha^{(k)}$ 沿着给定的方向 $\mathbf{S}^{(k)}$搜索到一个新点$\mathbf{X}^{(k+1)}$，由式(1－5)

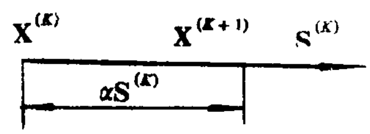


图 2－1　一维搜索的迭代法

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} + \alpha^{(k)}\mathbf{S}^{(k)}$$

然后根据需要检查 $\mathbf{X}^{(k+1)}$ 点的可行性及其适用性。

对于求多元函数 $f(\mathbf{X})$ 的极值点，则可表示为

$$\min f(\mathbf{X}^{(k+1)}) = f(\mathbf{X}^{(k)} + \alpha^{(k)}\mathbf{S}^{(k)}) \qquad (2-1)$$

显然，上式中每个不同的 $\alpha^{(k)}$ 值都对应着经过 $\mathbf{X}^{(k)}$ 点、沿方向 $\mathbf{S}^{(k)}$ 的直线上的一点。这样就把对多变量函数 $f(\mathbf{X})$ 过 $\mathbf{X}^{(k)}$ 点沿一确定方向 $\mathbf{S}^{(k)}$ 求极小值的问题，转化为求单变量函数 $\Phi(\alpha)$ 的极小值问题了，因而是属于广义的一维搜索问题。当然，如果搜索到的 $\mathbf{X}^{(k+1)}$ 点为最优点 $\mathbf{X}^*$，则步长 α 即为最优步长 α^*。

§2－2　函数的单峰区间及其确定法

设某一元函数 $f(x)$ 的图像如图 2－2 所示，它在 $[a, e]$ 区间有两个局部极小值和两个局部极大值，不论求哪个极小值或极大值，都得划分出单峰区间(“谷”对于求极小值来说也是“峰”)，才能分别求出它们的局部最优点 x^* 和局部最优值 f^*。

由图 2－2 显然可见，含有极小值的单峰区间(如 $[a, b]$ 及 $[c, d]$)，其函数值的变化必

然符合“大一小一大”的规律或呈现“高一低一高”的性态。这对我们确定单峰区间有重要的指导作用。

对于多维优化问题，由于寻找单峰区间不像上面的一元函数问题那样简单，因而需要借助于计算机去完成。下面介绍一种寻找单峰区间常用的**进退法**。

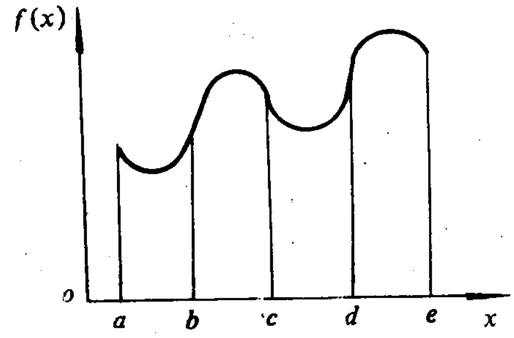
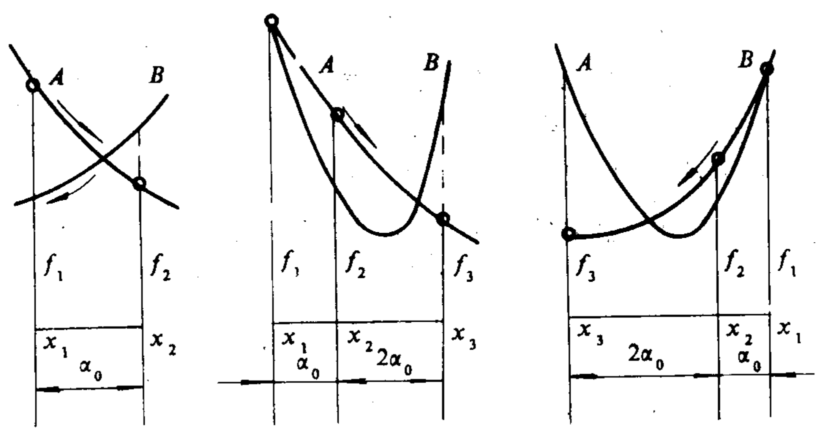


图 2－2 一元函数的单峰区间

设欲求函数 $f(x)$ 的单峰区间时，可先选出初始点x_1及初始步长α_0,进行前进或后退的试探性搜索,通过算出对应点的函数值$f_1=f(x_1)$及$f_2=f(x_1+\alpha_0)$,并比较它们的大小,根据“大一小一大”的规律，就可由下述方法确定出单峰区间[a，b]:

(1) 若 $f_1>f_2$(见图 2-3(a)中的曲线 A)，极小点必在 x_1 的右方，此时应继续作**前进搜索**。

(2) 若 $f_1<f_2$(见图 2-3(a)中的曲线 B)，极小点必在 x_1 点的左方，则应作**后退搜索**。



(a) 试探　　(b) 前进　　(c) 后退

图 2-3 用进退法确定单峰区间

前进搜索时，令 $\alpha\leftarrow\alpha_0$，并将步长加大一倍，取 $\alpha\leftarrow2\alpha$，得第三个试探点 x_3(图 2－3(b)) 为

$$x_3=x_2+\alpha$$

求出

$$f_3=f(x_3)$$

再比较f_2与f_3的大小:

(1) 若 $f_2<f_3$(图 2－3(b) 中曲线 B)，此时 x_1，x_2，x_3 三点的函数值已符合“大一小一大”的变化规律，故 [x_1，x_3] 即为含有 x^* 使 $f(x^*)=f_{\min}$ 的单峰区间 [a，b]。

(2) 若 $f_2>f_3$(图 2－3(b) 曲线 A)，即极小点必在 x_2 点的右方，故应(放弃 x_2 点以左的区域)继续试探前进搜索。此时需将各值代换如下:

$$x_1\leftarrow x_2 \qquad f_1\leftarrow f_2$$