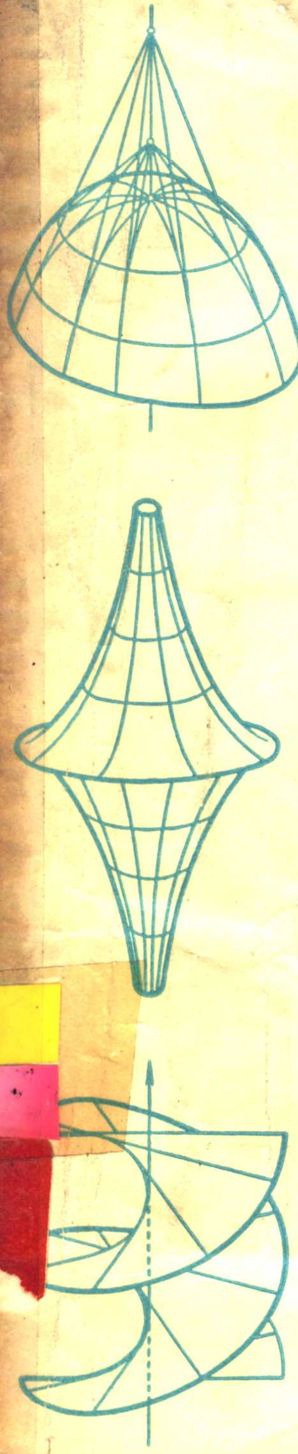

曲面论

A·П·諾尔金 著
楊 春 田譯

高等教育出版社

曲 面 論

A. П. 諾尔金著
楊 春 田 譯

高 等 教 育 出 版 社

本书根据苏联国立技术理論书籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы) 于1956 年出版的諾尔金 (А. П. Норден) 著“曲面論”(Теория поверхностей)俄文版譯出. 除第一、二、三、八各章带有复习性质,扼要地介紹一般微分几何課程和張量分析的基本內容外,其余各章即以張量分析为工具,闡述了曲面論的基础. 本书可作高等学校数学专业几何专門組参考书,也可供学习一般微分几何課程的学生参考.

曲 面 論

(苏) А. П. 諾尔金著

楊 春 田 譯

北京市书刊出版业營业許可証出字第119号

高等教育出版社出版(北京景山东街)

人民教育印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店經售

統一书号K13010·1153 开本 850×1168 1/32 印张 9

字数 190,000 印数 0,001—4,000 定价(5)¥ 0.85

1965 年3月第1版 1965 年3月北京第1次印刷

序

用張量闡述的曲面論，早已被看成是某些专門課程的基础．很多大学以它作为討論班的課題．但在我們的教学书籍里直到現在，只有 B. Ф. Каган 著«Основы теории поверхностей»是专門研究这个問題的著作．而这部专著，虽然在許多方面有它的优点，用于教学还会遇到不少困难．

本书篇幅相当于讲授一年的曲面論教程．这里当然假設讀者已經熟悉普通微分几何教程，因之第一和第三章带有复习性质．第六章里面虽然也研究普通微分几何教程里不研究的几种重要的曲面，但就方法而論，这一章也比較淺近．

如果讀者已經熟悉張量分析原理，那么第二章和第八章的 50、51 节也可以看成基本上是供參考和复习用的．但是，第 8 和第 11 节則应仔細閱讀，因为这两节对于理解以后的論述很重要．

本书基本內容的叙述上的特征决定于这样的意图：不仅要利用張量方法的一般优越性，也要利用張量方法对于二維区域显示出来的特性．从这种观点来看，下面的一些概念和理論就有了特别重要的意义：

1. 判别張量概念和余向量概念．

2. 向量場論，加上場的基本微分方程概念和截向量概念．

3. 調和函数和解析函数理論．

4. 网論，特别是都布諾夫（Я. С. Дубнов）引进的車彼雪夫張量的概念．

这些概念和理論有助于叙述的划一，也促使某些問題間的关系更为显明，而且在許多情形下使我們不必再过渡到特殊坐标而

能以綜合性的推导代替計算.

最后，我向喀山大学副教授 В. И. Шуликов 表示感謝，他在閱讀本书原稿时提出过很多宝貴的意見. 对 А. Ф. Лапко 的細心校訂，我也表示感謝.

А. П. 諾尔金

目　录

第一章　曲綫論初步

§1. 曲綫和曲綫方程

1. 初等几何和解析几何的方法，只能用以研究少数的几种曲綫和曲面：直綫、圓周和圓錐截綫、球面和二次曲面．因此在讲述这些数学科目时，通常都不提曲綫和曲面的一般定义．但是，說到拓扑学和微分几何，这种定义就变成必需的了．因为拓扑学研究最一般的曲綫和曲面的性质，而微分几何則研究非常广泛而又重要的一类曲綫和曲面，其中包含着无限多种不同的具体情形．

我們从曲綫的拓扑定义开始，假設直綫和直綫段的概念在初等几何里已經給出了．

所謂两个点集的拓扑对应或連續对应，就是这两个点集的点之間的一种相互单値对应．在这种对应下，一个点集的任意两个无限接近的点总对应另一个点集的两个无限接近的点．如果两个点集之間能够建立拓扑对应，就說，它們是拓扑等价的点集．

同直綫段拓扑等价的点集叫做簡单弧．这时，同綫段端点对应的点叫做弧的端点．如果两段弧有一对端点重合，或者两对端点各自重合，这两段弧叫做連接的弧．

順次連接有限个或可数个簡单弧而构成的点集叫做曲綫．

2. 假設，簡单弧 AB 拓扑地映成直綫段 A_0B_0，使弧的任一点 M 对应綫段的一点 M_0(图 1)．

在綫段 A_0B_0 上引进坐标，亦即选定原点 O，选定正方向，并用某一測度綫段来量綫段．这样我們就使直綫的每个点附有一个横坐标，在 O 一側的点附有的这种坐标我們认为是正的，在 O 另一側

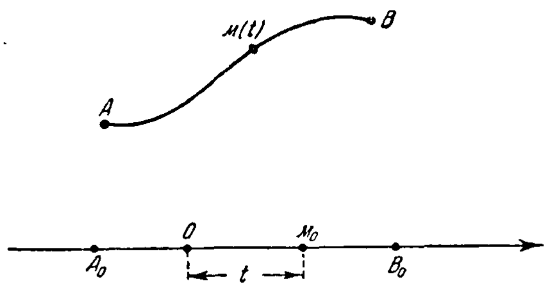

图 1.

的点附有的这种坐标认为是負的．这时，綫段 A_0B_0 的任何一点 M_0 的位置，就被它的坐标值 t 决定．如果弧的点映成綫段的点的規則已知，則給出横坐标之值 t 也就决定了弧的点 M 的位置．用这种方法，我們可以使弧 AB 的每个点 M 附有一个数．弧的点和数之間的这种对应是相互单值連續对应．連續性是由于：无限接近的横坐标 t 和 t' 对应无限接近的点 M_0 和 M_0'，而后者又对应弧 AB 上无限接近的点 M 和 M'．

如果所說的弧的点和数之間的对应已經实現，就說这段弧已經参数化，并且把 t 的值叫做对应点的参数．

任何一段弧总可以用无穷多种不同的方法，拓扑地映成一个綫段，而其中的每一种方法，都对应弧的一种参数化法．我們来研究其中的两种，并且設第一种方法使点 M 附有参数值 t，第二种方法使点 M 附有参数值 τ．这两个数值必定按某种函数依从关系

$$t=f(\tau)$$

彼此相关联，而且很明显，$f(\tau)$ 和它的反函数 $\tau=f^{-1}(t)$ 都应該是单值連續函数．

如果在空間中給出了原点 O，則弧的每个点 M 被它的向徑 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 决定．若弧已經参数化，則这个点的位置被給定的参数值决定．这时候，参数的每个值将对应向徑 $\boldsymbol{r}$ 的一个确定值．换言

之，弧的点的向徑是决定这个点的参数的函数：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t).$$

根据前面的定义，这个函数应該是連續函数.

决定弧的点的向徑和参数間的相依关系的等式叫做这段弧的参数方程①.

3. 微分几何研究用前面說过的拓扑方法定义的曲綫中的一类.

这类曲綫的特点表現在，經过适当的参数化以后，曲綫上点的向徑能够用参数的可微分函数表示. 以后我們假設总有这样的可微分性，并且假設在作参数变換时函数 $t=f(\tau)$ 也是可微分的. 此外，还假設所有被研究的函数都具有研究中所要求的高阶导数.

§2. 切綫和密切平面

1. 过曲綫上一个給定点和另外一点引一条割綫，当另外那一点无限趋近于給定点时，这条割綫的极限位置叫做过曲綫上給定点的切綫.

假設曲綫已經参数化，它的方程是 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$. 設曲綫的点 A 和 B（图 2）对应参数值 t 和 $t+\Delta t$，它們的向徑分别等于 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}$. 在这样情形下，向量 $\Delta\boldsymbol{r}$ 对应弦 $\overrightarrow{AB}$，而向量 $\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$ 指向割綫 AB 的这样方向，当 $\Delta t>0$ 时 $\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$ 和弦 $\overrightarrow{AB}$ 的方向相同，而当 $\Delta t<0$ 时 $\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$ 和弦 $\overrightarrow{AB}$ 的方向相反.

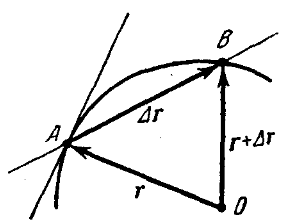

图 2.

① 我們不拟涉及由簡单弧集合作成的曲綫的参数化問題. 为了避免由这类問題引起的一些困难，以后一般就把曲綫理解为簡单弧.

如果点 B 沿曲綫无限趋近于点 A，則割綫 AB 将繞点 A 旋轉，而且无限趋近于曲綫的切綫位置．同时，比 $\dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ 趋近于导数 $\dot{\boldsymbol{r}}$，亦即它的极限．

由此可見，在参数化的曲綫上，点的向徑对参数的导数是一个向量，它的指向沿着这条曲綫的切綫．

此外，如果注意到关于向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向的說明，我們容易看出：向量 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 的方向与切綫方向一致，并且指向参数增加的那一側．若在参数化曲綫上某一点处向量 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 等于 0，則在这个点的切綫方向不能用向量 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 的值决定．这种点叫做参数化曲綫的奇异点，这种点平常不在討論的范圍以內．包含切綫的任何平面，我們也說它在切綫的切点处和曲綫相切．

2. 如果在曲綫的每一点处，二阶导数

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2}$$

的方向和切綫的方向总相同，則点的向徑适合微分方程

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\lambda \dot{\boldsymbol{r}}. \tag{1}$$

这个方程的通解是

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}\varphi(t)+\boldsymbol{b}, \tag{2}$$

这說明：已知曲綫是直綫．在以后的討論中我們不考虑这种情形，并且也不考虑曲綫上使(1)成立的个别的点．

变換参数时我們将有

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\frac{d\boldsymbol{r}}{d\tau}\left(\frac{d^2\tau}{dt^2}\right)+\frac{d^2\boldsymbol{r}}{d\tau^2}\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2.$$

这个綫性相关式說明：曲綫上点的向徑对任一参数的二阶导数总在曲綫的某个完全确定的切平面上．这个切平面叫做曲綫的密切平面．

欲求自曲綫上流动点 $\boldsymbol{r}(t)$ 到通过点 $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}(t_0)$ 的切平面的距

离 l, 可将流动点的向徑代入切平面的法綫式方程的左边. 如此,得

$$l=\boldsymbol{n}\{\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}_0\},$$

这里 $\boldsymbol{n}$ 是垂直于已知切平面的单位向量. 引用戴劳公式按 $\Delta t=$ $=t-t_0$ 的冪展开 $\boldsymbol{r}(t)$, 得

$$l=\boldsymbol{n}\dot{\boldsymbol{r}}_0\Delta t+\frac{1}{2}\boldsymbol{n}\ddot{\boldsymbol{r}}_0\Delta t^2+\frac{1}{6}\boldsymbol{n}\dddot{\boldsymbol{r}}_0\Delta t^3+A\Delta t^4,$$

但 $\boldsymbol{n}\dot{\boldsymbol{r}}_0=0$, 而且如果切平面不是密切平面, 則 $\boldsymbol{n}\ddot{\boldsymbol{r}}_0\neq0$, 因之

$$l=\frac{1}{2}\boldsymbol{n}\ddot{\boldsymbol{r}}_0\Delta t^2+B\Delta t^3.$$

如果切平面是密切平面, 則 $\boldsymbol{n}\ddot{\boldsymbol{r}}_0=0$, 而

$$l=\frac{1}{6}\boldsymbol{n}\dddot{\boldsymbol{r}}_0\Delta t^3+A\Delta t^4.$$

当 Δt 充分小时, 左边的符号和右边第一个异于0的項的符号相同. 在第一种情形下, l 和 $\boldsymbol{n}\ddot{\boldsymbol{r}}_0$ 的符号相同, 也就是和二阶导数向量在切平面法綫上的射影的符号相同. 由此可見, 如果切平面不是密切平面, 則在切点邻近曲綫上所有点都在切平面的同一側, 即二阶导数所指向的一側. 在第二种情形下, 如果 $\boldsymbol{n}\dddot{\boldsymbol{r}}\neq0$, l 的符号随变量 Δt 的符号而改变, 这时候, 一般地說, 在切点邻近曲綫由密切平面的一側进至另一側.

如果一条曲綫, 在它的所有点处向量 $\dddot{\boldsymbol{r}}$ 都在密切平面上, 則曲綫上点的向徑 $\boldsymbol{r}$ 适合微分方程

$$(\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}}\dddot{\boldsymbol{r}})=0, \tag{3}$$

或

$$\dddot{\boldsymbol{r}}=\lambda\ddot{\boldsymbol{r}}+\mu\dot{\boldsymbol{r}}, \tag{4}$$

它的通解可写成

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}\varphi(t)+\boldsymbol{b}\psi(t)+\boldsymbol{c}, \tag{5}$$

这說明: 已知曲綫是平面曲綫.

§3. 曲綫的自然参数和相伴三面形

1. 积分

$$s=\int_{t_0}^{t}|\dot{\boldsymbol{r}}|dt \tag{1}$$

的大小与参数 t 的选擇无关. 这个积分定义所謂曲綫的自然参数. 普通微分几何教程证明了这个参数两个值的差

$$s_2-s_1=\int_{t_1}^{t_2}|\dot{\boldsymbol{r}}|dt \tag{2}$$

等于具有参数值 t_1 和 t_2 的两个点中間的弧长.

把(1)微分，得

$$ds=|\dot{\boldsymbol{r}}|dt,$$

或者

$$ds^2=d\boldsymbol{r}^2. \tag{3}$$

若用撇号表示对自然参数的微分运算，这样就得到

$$(\boldsymbol{r}')^2=\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right)^2=1. \tag{4}$$

由此可見，曲綫上点的向徑对自然参数的导数是曲綫的单位切向量.

很明显，(4)和等式

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta s}\right|=1 \tag{5}$$

等价. 这个等式說明: 曲綫的弦和所对弧的比，当弧无限縮小时，它的极限等于 1.

后面我們要用到这个結果的一个推論. 如果以綫段 OA 和 OB 表示变动的单位向量 $\boldsymbol{m}$ 的两个值，則在以 O 为中心的单位圓周上，弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度等于角 φ，而 φ 是向量 $\boldsymbol{m}$ 得到增量 $\Delta\boldsymbol{m}=\overrightarrow{AB}$ 时应該轉过的角. 因为由等式(5)

$$\lim_{\varphi \to 0}\left|\frac{\Delta \boldsymbol{m}}{\varphi}\right| = 1, \tag{6}$$

于是得：单位向量的增量和它轉过的角的比，当角趋近于0时，它的模的极限等于1.

2. 对自然参数的二阶导数 $\boldsymbol{r}''$ 适合条件

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{r}'^2) = 2\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'' = 0, \tag{7}$$

亦即 $\boldsymbol{r}''$ 垂直于切綫.

通过切点而且与切綫垂直的直綫都叫做曲綫的法綫. 在密切平面上的法綫叫做曲綫的主法綫. 因为对任意参数的二阶导数向量总在密切平面上，于是向量 $\boldsymbol{r}''$ 的方向必沿着主法綫.

同主法綫垂直的法綫叫做副法綫. 包含主法綫和副法綫，因之也包含曲綫的所有法綫的平面叫做法平面. 包含副法綫和切綫的平面叫做从切平面.

切綫、主法綫和副法綫构成的直角三面形叫做曲綫的相伴三面形. 方向沿着相伴三面形的軸的三个单位向量 $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ (图3)，也叫做曲綫的基本向量，这三个向量由下面的条件决定：

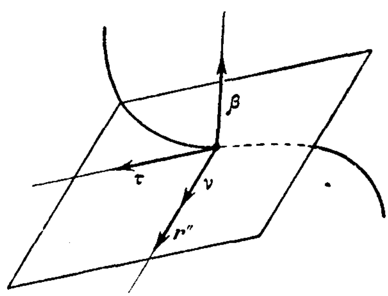

图 3.

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r}',\ \ \boldsymbol{\nu} = p\boldsymbol{r}''\ \ (p>0),\ \ \boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\nu}]. \tag{8}$$

在最后一个等式里，对 $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}$ 作輪換，我們又得到

$$\boldsymbol{\tau} = [\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\beta}],\ \ \boldsymbol{\nu} = [\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\tau}]. \tag{9}$$

§4. 关于正交三脚形的預备定理和謝列-佛銳耐公式

1. 如果向量 $\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, \boldsymbol{m}_3$ 是互相垂直的三个单位向量，这三个

向量組成一个正交三脚形.

正交的条件可写成

$$\boldsymbol{m}_i\boldsymbol{m}_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当 } i=j,\\ 0 & \text{当 } i\neq j.\end{cases}\tag{1}$$

如果正交三脚形的三个向量都是自变数 t 的可微分函数，則它們的导数可按这三个向量分解，而作成方程組

$$\frac{d\boldsymbol{m}_i}{dt}=\sum_{k=1}^{3}\alpha_{ik}\boldsymbol{m}_k.\tag{2}$$

微分(1)的左右两边并引用(2)，我們得到

$$\sum_{k=1}^{3}\alpha_{ik}\boldsymbol{m}_k\boldsymbol{m}_j+\sum_{k=1}^{3}\alpha_{jk}\boldsymbol{m}_i\boldsymbol{m}_k=\sum_{k=1}^{3}\alpha_{ik}\delta_{kj}+\sum_{k=1}^{3}\alpha_{jk}\delta_{ik}=0$$

或

$$\alpha_{ij}+\alpha_{ji}=0.\tag{3}$$

由此可見，正交三脚形向量的导数依这些向量分解时，所得分解式系数作成的矩陣是反对称的，亦即具下面的形状:

$$\begin{Vmatrix}0, & \alpha_{12}, & \alpha_{13}\\ -\alpha_{12}, & 0, & \alpha_{23}\\ -\alpha_{13}, & -\alpha_{23}, & 0\end{Vmatrix}.$$

2. 把这个普遍的結果应用到曲綫的基本向量对自然参数的导数上，同时引用 § 3 (8)，我們得到所謂謝列-佛銳耐(Serret-Frenet)公式

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}'&=\quad\ \ k\boldsymbol{\nu} & &,\\ \boldsymbol{\nu}'&=-k\boldsymbol{\tau} & &+\kappa\boldsymbol{\beta},\\ \boldsymbol{\beta}'&=\quad -\kappa\boldsymbol{\nu} & &.\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

系数 k 和 κ 叫做曲綫的曲率和撓率，量 $p=\dfrac{1}{k}$ 叫做曲率半徑. 引用 § 3(6)很容易证明：在曲綫的任一点处曲綫的曲率，等于切綫在包含这个点的一段无限小弧上轉过的角与这段小弧的长度的比的