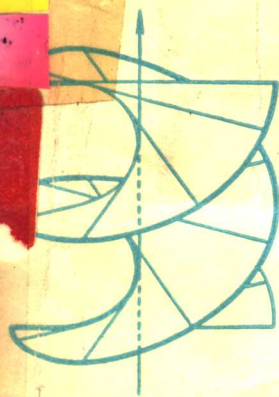
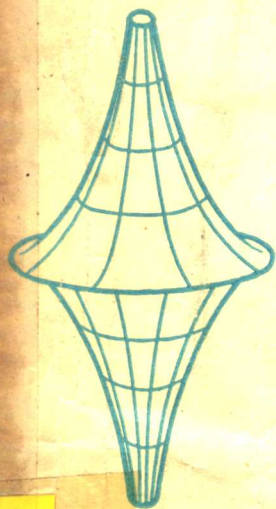
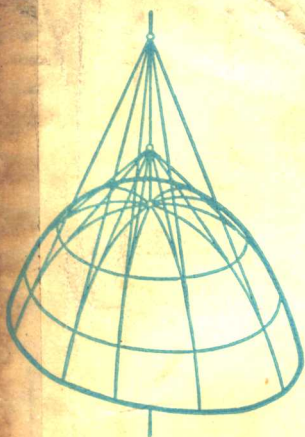


曲面论

A·П·諾尔金 著
楊 春 田 譯

高等教育出版社



曲 面 論

A. П. 諾尔金著

楊 春 田 譯

高 等 教 育 出 版 社

本书根据苏联国立技术理论书籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)于1956年出版的諾尔金(А. П. Нордев)著“曲面論”(Теория поверхностей)俄文版譯出。除第一、二、三、八各章帶有复习性质,扼要地介紹一般微分几何課程和張量分析的基本內容外,其余各章即以張量分析为工具,闡述了曲面論的基础。本书可作高等学校数学专业几何專門組参考书,也可供学习一般微分几何課程的学生参考。

曲 面 論

(苏) А. П. 諾尔金著

楊 春 田 譯

北京市书刊出版业营业許可証出字第119号

高等教育出版社出版(北京景山东街)

人 民 教 育 印 刷 厂 印 装

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 經 售

統一书号K13010·1153 开本 850×1168 1/32 印张 9

字数 190,000 印数 0,001—4,000 定价(5) 0.85

1965年3月第1版 1965年3月北京第1次印刷

序

用張量闡述的曲面論，早已被看成是某些專門課程的基礎。很多大學以它作為討論班的課題。但在我們的教學書籍里直到現在，只有 В. Ф. Каган 著《Основы теории поверхностей》是專門研究這個問題的著作。而這部專著，雖然在許多方面有它的優點，用於教學還會遇到不少困難。

本書篇幅相當於講授一年的曲面論教程。這裡當然假設讀者已經熟悉普通微分幾何教程，因之第一和第三章帶有複習性質。第六章裡面雖然也研究普通微分幾何教程里不研究的幾種重要的曲面，但就方法而論，這一章也比較淺近。

如果讀者已經熟悉張量分析原理，那麼第二章和第八章的 50、51 節也可以看成基本上是供參考和複習用的。但是，第 8 和第 11 節則應仔細閱讀，因為這兩節對於理解以後的論述很重要。

本書基本內容的敘述上的特徵決定於這樣的意圖：不僅要利用張量方法的一般優越性，也要利用張量方法對於二維區域顯示出來的特性。從這種觀點來看，下面的一些概念和理論就有了特別重要的意義：

1. 判別張量概念和余向量概念。
2. 向量場論，加上場的基本微分方程概念和截向量概念。
3. 調和函數和解析函數理論。
4. 網論，特別是都布諾夫 (Я. С. Дубнов) 引進的車彼雪夫張量的概念。

這些概念和理論有助於敘述的劃一，也促使某些問題間的關係更為顯明，而且在許多情形下使我們不必再過渡到特殊坐標而

能以綜合性的推导代替計算。

最后，我向喀山大学副教授 В. И. Шуликов 表示感謝，他在閱讀本书原稿时提出过很多寶貴的意見，对 А. Ф. Лапко 的細心校訂，我也表示感謝。

А. П. 諾尔金

目 录

序.....	vii
第一章 曲线论初步.....	1
§ 1. 曲线和曲线方程.....	1
§ 2. 切线和密切平面.....	3
§ 3. 曲线的自然参数和相伴三面形.....	6
§ 4. 关于正交三脚形的预备定理和谢列-佛貌耐公式.....	7
§ 5. 螺旋线和圆周.....	9
第二章 张量代数初步.....	12
§ 6. 平面仿射坐标系.....	12
§ 7. 数性积和协变坐标.....	14
§ 8. 斜积和余向量.....	16
§ 9. 张量的概念.....	19
§ 10. 张量代数的基本运算.....	23
§ 11. 二价对称张量.....	30
§ 12. 张量的收缩.....	35
第三章 曲面和曲面的切平面.....	37
§ 13. 曲面和曲面的参数化.....	37
§ 14. 曲面的切线和切平面.....	41
§ 15. 曲面族的包络.....	44
§ 16. 可展曲面.....	48
§ 17. 同空间曲线有关的可展曲面.....	51
第四章 曲面的第一二次形式.....	56
§ 18. 局部坐标系和曲面的度量张量.....	56
§ 19. 线性元素和曲面的贴合.....	58
§ 20. 曲面上曲线的交角和保角映像.....	61
§ 21. 曲面上的曲线族, 正交轨线和网.....	63
§ 22. 曲面面积, 等面对应.....	65
第五章 曲面的第二二次形式.....	69
§ 23. 法曲率和第二二次形式.....	69

§ 24. 麦尼埃定理	71
§ 25. 第二二次形式的张量和它的不变量	74
§ 26. 曲面上点的分类	76
§ 27. 共轭方向和共轭网	82
§ 28. 渐近曲线	85
§ 29. 曲率线	87
第六章 旋轉曲面及其推广	90
§ 30. 旋轉曲面和旋轉曲面的扭曲	90
§ 31. 旋轉曲面的第二二次形式	92
§ 32. 特殊旋轉曲面	94
§ 33. 螺旋面	99
§ 34. 曲紋曲面	100
§ 35. 管道形曲面	102
第七章 直紋面和直綫汇	103
§ 36. 直紋面的綫性元素和切平面	103
§ 37. 作为直紋面的可展曲面	104
§ 38. 相伴点和腰线	106
§ 39. 分布参数	107
§ 40. 直紋面的渐近曲线	108
§ 41. 直綫汇和它的基本二次形式	110
§ 42. 綫汇的可展曲面和焦曲面	112
§ 43. 法綫汇	114
第八章 曲面上向量場和張量場	116
§ 44. 数量場	116
§ 45. 向量場的旋度	118
§ 46. 向量場的發散量	121
§ 47. 拉普拉斯場, 調和函数和等溫坐标	122
§ 48. 高斯导数公式	126
§ 49. 向量的平行移动	128
§ 50. 絕對微分法和协变微分法	132
§ 51. 协变导数	136
§ 52. 向量場的基本微分方程	139
第九章 測地曲率与測地綫	146
§ 53. 測地曲率	146
§ 54. 測地綫	148

§ 55. 测地场	151
§ 56. 测地-等温场	154
§ 57. 测地-平分线场	155
§ 58. 李烏維尔曲面	156
§ 59. 旋轉曲面的测地线	160
§ 60. 测地场曲线的切线汇	160
§ 61. 溫卡尔頓曲面	163
第十章 网論初步	165
§ 62. 向量场的相伴点	165
§ 63. 网的相伴直线和車彼雪夫向量	167
§ 64. 柯达齐网	170
§ 65. 正交网	171
§ 66. 测地网	172
§ 67. 車彼雪夫网	173
§ 68. 移动曲面	175
§ 69. 等路网	177
§ 70. 迷向方向与迷向网	179
第十一章 曲面的映像	181
§ 71. 可微分对应的一般性质	181
§ 72. 曲面的保角对应	183
§ 73. 平面的保角对应	187
§ 74. 反演	190
§ 75. 球极平面射影	195
§ 76. 测地对应	197
§ 77. 球面映像	202
第十二章 总曲率看作是曲面內蕴几何的不变量	209
§ 78. 高斯定理	209
§ 79. 高斯-波恩奈定理	213
§ 80. 关于多连通区域和閉曲面的高斯-波恩奈定理	215
§ 81. 协变微分运算順序的变换	218
§ 82. 彼得松定理	221
§ 83. 扭曲方程	225
§ 84. 旋轉曲面的总曲率	227
第十三章 定曲率曲面	229
§ 85. 定曲率曲面上的测地-等温场	229

§ 86. 定曲率曲面的綫性元素和它們的可貼合性	230
§ 87. 伪球面上的測地綫和測地綫束	232
§ 88. 伪球面的內蘊几何	240
§ 89. 定曲率曲面的測地綫	242
第十四章 极小曲面	245
§ 90. 面积最小的曲面	245
§ 91. 伴随曲面	246
§ 92. 許华茲公式	247
§ 93. 极小曲面的球面映像和扭曲	249
§ 94. 維尔斯特拉斯公式	251
第十五章 三重正交曲面系	254
§ 95. 空間的曲綫坐标	254
§ 96. 三重正交曲面系	258
§ 97. 拉七条件	260
§ 98. 共焦二次曲面	262
§ 99. 有心二次曲面上的橢圓坐标	265
参考文献	268
名詞索引	269
人名索引	277
符号索引	279

第一章 曲綫論初步

§ 1. 曲綫和曲綫方程

1. 初等几何和解析几何的方法，只能用以研究少数的几种曲綫和曲面：直綫、圓周和圓錐截綫、球面和二次曲面。因此在讲述这些数学科目时，通常都不提曲綫和曲面的一般定义。但是，說到拓扑学和微分几何，这种定义就变成必需的了。因为拓扑学研究最一般的曲綫和曲面的性质，而微分几何則研究非常广泛而又重要的一类曲綫和曲面，其中包含着无限多种不同的具体情形。

我們从曲綫的拓扑定义开始，假設直綫和直綫段的概念在初等几何里已經給出了。

所謂两个点集的拓扑对应或連續对应，就是这两个点集的点之間的一种相互单值对应。在这种对应下，一个点集的任意两个无限接近的点总对应另一个点集的两个无限接近的点。如果两个点集之間能够建立拓扑对应，就說，它們是拓扑等价的点集。

同直綫段拓扑等价的点集叫做簡單弧。这时，同綫段端点对应的点叫做弧的端点。如果两段弧有一对端点重合，或者两对端点各自重合，这两段弧叫做連接的弧。

順次連接有限个或可数个簡單弧而构成的点集叫做曲綫。

2. 假設，簡單弧 AB 拓扑地映成直綫段 A_0B_0 ，使弧的任一点 M 对应綫段的一点 M_0 (图 1)。

在綫段 A_0B_0 上引进坐标，亦即选定原点 O ，选定正方向，并用某一测度綫段来量綫段。这样我們就使直綫的每个点附有一个横坐标，在 O 一侧的点附有的这种坐标我們认为是正的，在 O 另一側

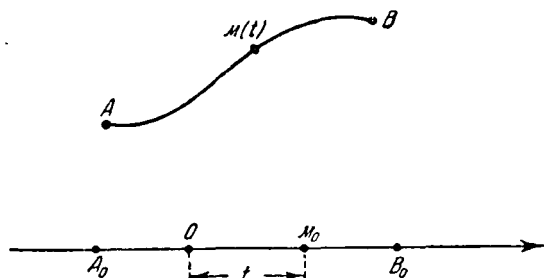


图 1.

的点附有的这种坐标认为是負的。这时，綫段 A_0B_0 的任何一点 M_0 的位置，就被它的坐标值 t 决定。如果弧的点映成綫段的点的規則已知，則給出横坐标之值 t 也就决定了弧的点 M 的位置。用这种方法，我們可以使弧 AB 的每个点 M 附有一个数。弧的点和数之間的这种对应是相互单值連續对应。連續性是由于：无限接近的横坐标 t 和 t' 对应无限接近的点 M_0 和 M'_0 ，而后者又对应弧 AB 上无限接近的点 M 和 M' 。

如果所說的弧的点和数之間的对应已經实现，就說这段弧已經参数化，并且把 t 的值叫做对应点的参数。

任何一段弧总可以用无穷多种不同的方法，拓扑地映成一个綫段，而其中的每一种方法，都对应弧的一种参数化法。我們来研究其中的两种，并且設第一种方法使点 M 附有参数值 t ，第二种方法使点 M 附有参数值 τ 。这两个数值必定按某种函数依从关系

$$t = f(\tau)$$

彼此相关联，而且很明显， $f(\tau)$ 和它的反函数 $\tau = f^{-1}(t)$ 都应该是单值連續函数。

如果在空間中給出了原点 O ，則弧的每个点 M 被它的向徑 $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ 决定。若弧已經参数化，則这个点的位置被給定的参数值决定。这时候，参数的每个值将对应向徑 $\vec{r}$ 的一个确定值。換言

之, 弧的点的向徑是决定这个点的参数的函数:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t).$$

根据前面的定义, 这个函数应该是連續函数.

决定弧的点的向徑和参数間的相依关系的等式叫做这段弧的参数方程^①.

3. 微分几何研究用前面說过的拓扑方法定义的曲綫中的一类.

这类曲綫的特点表现在, 经过适当的参数化以后, 曲綫上点的向徑能够用参数的可微分函数表示. 以后我們假設总有这样的可微分性, 并且假設在作参数变换时函数 $t = f(\tau)$ 也是可微分的. 此外, 还假設所有被研究的函数都具有研究中所要求的高阶导数.

§ 2. 切綫和密切平面

1. 过曲綫上一个給定点和另外一点引一条割綫, 当另外那一点无限趋近于給定点时, 这条割綫的极限位置叫做过曲綫上給定点的切綫.

假設曲綫已經参数化, 它的方程是 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. 設曲綫的点 A 和 B (图 2) 对应参数值 t 和 $t + \Delta t$, 它們的向徑分別等于 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}$. 在这样情形下, 向量 $\Delta \mathbf{r}$ 对应弦 $\overrightarrow{AB}$, 而向量 $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ 指向割綫 AB 的这样方向, 当 $\Delta t > 0$ 时 $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ 和弦 $\overrightarrow{AB}$ 的方向相同, 而当 $\Delta t < 0$ 时 $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ 和弦 $\overrightarrow{AB}$ 的方向相反.

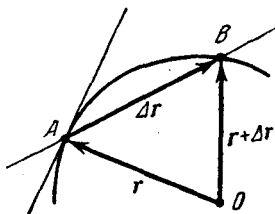


图 2.

① 我們不拟涉及由简单弧集合作成的曲綫的参数化問題. 为了避免由这类問題引起的一些困难, 以后一般就把曲綫理解为简单弧.

如果点 B 沿曲綫无限趋近于点 A , 則割綫 AB 將繞点 A 旋轉, 而且无限趋近于曲綫的切綫位置. 同时, 比 $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ 趋近于导数 $\dot{\mathbf{r}}$, 亦即它的极限.

由此可見, 在参数化的曲綫上, 点的向徑对参数的导数是一个向量, 它的指向沿着这条曲綫的切綫.

此外, 如果注意到关于向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向的說明, 我們容易看出: 向量 $\dot{\mathbf{r}}$ 的方向与切綫方向一致, 并且指向参数增加的那一側. 若在参数化曲綫上某一点处向量 $\dot{\mathbf{r}}$ 等于 0, 則在这个点的切綫方向不能用向量 $\dot{\mathbf{r}}$ 的值决定. 这种点叫做参数化曲綫的奇异点, 这种点平常不在討論的范围以內. 包含切綫的任何平面, 我們也說它在切綫的切点处和曲綫相切.

2. 如果在曲綫的每一点处, 二阶导数

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$$

的方向和切綫的方向总相同, 則点的向徑适合微分方程

$$\ddot{\mathbf{r}} = \lambda \dot{\mathbf{r}}. \quad (1)$$

这个方程的通解是

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}\varphi(t) + \mathbf{b}, \quad (2)$$

这說明: 已知曲綫是直綫. 在以后的討論中我們不考虑这种情形, 并且也不考虑曲綫上使(1)成立的个别的点.

变换参数时我們將有

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \left(\frac{d^2 \tau}{dt^2} \right) + \frac{d^2 \mathbf{r}}{d\tau^2} \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2.$$

这个綫性相关式說明: 曲綫上点的向徑对任一参数的二阶导数总在曲綫的某个完全确定的切平面上. 这个切平面叫做曲綫的密切平面.

欲求自曲綫上流动点 $\mathbf{r}(t)$ 到通过点 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ 的切平面的距

离 l , 可将流动点的向徑代入切平面的法綫式方程的左边, 如此, 得

$$l = \mathbf{n} \{ \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 \},$$

这里 $\mathbf{n}$ 是垂直于已知切平面的单位向量. 引用戴劳公式按 $\Delta t = t - t_0$ 的幂展开 $\mathbf{r}(t)$, 得

$$l = \mathbf{n} \dot{\mathbf{r}}_0 \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{n} \ddot{\mathbf{r}}_0 \Delta t^2 + \frac{1}{6} \mathbf{n} \ddot{\mathbf{r}}_0 \Delta t^3 + A \Delta t^4,$$

但 $\mathbf{n} \dot{\mathbf{r}}_0 = 0$, 而且如果切平面不是密切平面, 則 $\mathbf{n} \ddot{\mathbf{r}}_0 \neq 0$, 因之

$$l = \frac{1}{2} \mathbf{n} \ddot{\mathbf{r}}_0 \Delta t^2 + B \Delta t^3.$$

如果切平面是密切平面, 則 $\mathbf{n} \ddot{\mathbf{r}}_0 = 0$, 而

$$l = \frac{1}{6} \mathbf{n} \ddot{\mathbf{r}}_0 \Delta t^3 + A \Delta t^4.$$

当 Δt 充分小时, 左边的符号和右边第一个异于 0 的項的符号相同. 在第一种情形下, l 和 $\mathbf{n} \ddot{\mathbf{r}}_0$ 的符号相同, 也就是和二阶导数向量在切平面法綫上的射影的符号相同. 由此可見, 如果切平面不是密切平面, 則在切点邻近曲綫上所有点都在切平面的同一側, 即二阶导数所指向的一側. 在第二种情形下, 如果 $\mathbf{n} \ddot{\mathbf{r}}_0 \neq 0$, l 的符号随变量 Δt 的符号而改变, 这时候, 一般地說, 在切点邻近曲綫由密切平面的一側进至另一側.

如果一条曲綫, 在它的所有点处向量 $\dot{\mathbf{r}}$ 都在密切平面上, 則曲綫上点的向徑 $\mathbf{r}$ 适合微分方程

$$(\dot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}} \dot{\mathbf{r}}) = 0, \quad (3)$$

或

$$\dot{\mathbf{r}} = \lambda \ddot{\mathbf{r}} + \mu \dot{\mathbf{r}}, \quad (4)$$

它的通解可写成

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} \varphi(t) + \mathbf{b} \psi(t) + \mathbf{c}, \quad (5)$$

这說明: 已知曲綫是平面曲綫.

§ 3. 曲綫的自然参数和相伴三面形

1. 积分

$$s = \int_{t_0}^t |\dot{\mathbf{r}}| dt \quad (1)$$

的大小与参数 t 的选择无关. 这个积分定义所謂曲綫的自然参数. 普通微分几何教程证明了这个参数两个值的差

$$s_2 - s_1 = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\mathbf{r}}| dt \quad (2)$$

等于具有参数值 t_1 和 t_2 的两个点中間的弧长.

把(1)微分, 得

$$ds = |\dot{\mathbf{r}}| dt,$$

或者

$$ds^2 = d\mathbf{r}^2. \quad (3)$$

若用撇号表示对自然参数的微分运算, 这样就得到

$$(\mathbf{r}')^2 = \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)^2 = 1. \quad (4)$$

由此可見, 曲綫上点的向徑对自然参数的导数是曲綫的单位切向量.

很明显, (4)和等式

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} \right| = 1 \quad (5)$$

等价. 这个等式說明: 曲綫的弦和所对弧的比, 当弧无限縮小时, 它的极限等于 1.

后面我們要用到这个結果的一个推論. 如果以綫段 OA 和 OB 表示变动的单位向量 $\mathbf{m}$ 的两个值, 則在以 O 为中心的单位圓周上, 弧 AB 的长度等于角 φ , 而 φ 是向量 $\mathbf{m}$ 得到增量 $\Delta \mathbf{m} = \overrightarrow{AB}$ 时应该轉过的角. 因为由等式(5)

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta m}{\varphi} \right| = 1, \quad (6)$$

于是得：单位向量的增量和它轉过的角的比，当角趋近于0时，它的模的极限等于1。

2. 对自然参数的二阶导数 r'' 适合条件

$$\frac{d}{ds}(r'^2) = 2r'r'' = 0, \quad (7)$$

亦即 r'' 垂直于切綫。

通过切点而且与切綫垂直的直綫都叫做曲綫的法綫。在密切平面上的法綫叫做曲綫的主法綫。因为对任意参数的二阶导数向量总在密切平面上，于是向量 r'' 的方向必沿着主法綫。

同主法綫垂直的法綫叫做副法綫。包含主法綫和副法綫，因之也包含曲綫的所有法綫的平面叫做法平面。包含副法綫和切綫的平面叫做从切平面。

切綫、主法綫和副法綫构成的直角三面形叫做曲綫的相伴三面形。方向沿着相伴三面形的軸的三个单位向量 τ, ν, β (图3)，也叫做曲綫的基本向量，这三个向量由下面的条件决定：

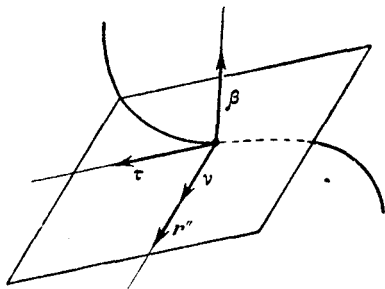


图3.

$$\tau = r', \quad \nu = pr'' \quad (p > 0), \quad \beta = [\tau\nu]. \quad (8)$$

在最后一个等式里，对 τ, ν, β 作輪換，我們又得到

$$\tau = [\nu\beta], \quad \nu = [\beta\tau]. \quad (9)$$

§ 4. 关于正交三脚形的预备定理和謝列-佛銳耐公式

1. 如果向量 m_1, m_2, m_3 是互相垂直的三个单位向量，这三个

向量組成一个正交三脚形.

正交的条件可写成

$$m_i m_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{当 } i=j, \\ 0 & \text{当 } i \neq j. \end{cases} \quad (1)$$

如果正交三脚形的三个向量都是自变数 t 的可微分函数, 則它們的导数可按这三个向量分解, 而作成方程組

$$\frac{dm_i}{dt} = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} m_k. \quad (2)$$

微分(1)的左右两边并引用(2), 我們得到

$$\sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} m_k m_j + \sum_{k=1}^3 \alpha_{jk} m_i m_k = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} \delta_{kj} + \sum_{k=1}^3 \alpha_{jk} \delta_{ik} = 0$$

或

$$\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 0. \quad (3)$$

由此可見, 正交三脚形向量的导数依这些向量分解时, 所得分解式系数作成的矩陣是反对称的, 亦即具下面的形状:

$$\begin{vmatrix} 0, & \alpha_{12}, & \alpha_{13} \\ -\alpha_{12}, & 0, & \alpha_{23} \\ -\alpha_{13}, & -\alpha_{23}, & 0 \end{vmatrix}.$$

2. 把这个普遍的结果应用到曲綫的基本向量对自然参数的导数上, 同时引用 § 3 (8), 我們得到所謂謝列-佛銳耐(Serret-Frenet)公式

$$\left. \begin{aligned} \tau' &= k\nu \\ \nu' &= -k\tau + \kappa\beta \\ \beta' &= -\kappa\nu \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

系数 k 和 κ 叫做曲綫的曲率和撓率, 量 $p = \frac{1}{k}$ 叫做曲率半徑. 引用 § 3(6)很容易证明: 在曲綫的任一点处曲綫的曲率, 等于切綫在包含这个点的一段无限小弧上轉过的角与这段小弧的长度的比的