

医用物理学

张泽宝 陈永朴 主编

人 民 卫 生 出 版 社

医用物理学

张泽宝 陈永朴 主编

人民卫生出版社出版发行

(100078 北京市丰台区方庄芳群园3区3号楼)

三河市宏达印刷厂印刷

新华书店经销

787×1092 16开本 19 $\frac{1}{2}$ 印张 451千字

1998年2月第1版 1998年2月第1版第1次印刷

印数: 00 001—8 070

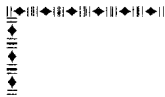
ISBN 7-117-02898-X/R·2899 定价: 26.00元

(凡属质量问题请与本社发行部联系退换)

编 者

(以姓氏笔画为序)

- | | |
|-----|-----------|
| 王秀芝 | (中国医科大学) |
| 王红欣 | (中国医科大学) |
| 刘 力 | (中国医科大学) |
| 李孔宁 | (哈尔滨医科大学) |
| 李田勋 | (潍坊医学院) |
| 李 莉 | (中国医科大学) |
| 孙国文 | (泰山医学院) |
| 卢 燕 | (哈尔滨医科大学) |
| 陈永朴 | (哈尔滨医科大学) |
| 陈百万 | (潍坊医学院) |
| 赵仁宏 | (潍坊医学院) |
| 杨荫波 | (中国医科大学) |
| 张泽宝 | (中国医科大学) |
| 洪 洋 | (中国医科大学) |
| 俞 航 | (中国医科大学) |
| 高勇强 | (中国医科大学) |
| 翟建才 | (第三军医大学) |



前 言



根据国家教委关于“面向 21 世纪医药院校课程内容及课程体系设置的改革”的文件精神，重新编写了作为医学类院校的骨干课程的医用物理学。生物医学的发展进程表明，理工科技与理论是深刻认识生命过程的理论基础和促使其快速发展的有力工具，因此在教材内容的编排上要保持物理学本身的理论体系完整性，以奠定较扎实的物理学基础，为配合现代医学发展的步伐，书中加强了实用性技术理论（如人体力学、光谱分析、医学影像等）及近代物理（如量子力学基础、原子核物理）部分。为适应教学模式的转变，即从应试教育向能力培养的转变，教材内容中体现了对学生科学思维能力、解决实际问题的能力、自学能力的培养。

书中有的内容可安排学生自学或选学。书中必讲内容估计需 60 学时左右。

限于编者水平，书中不妥之处在所难免，诚恳希望使用本书的教师和学生提出批评意见，待今后修订提高。

编 者

1997 年九月

目 录

绪论	(1)
第一章 人体力学的基础知识	(3)
第一节 刚体的转动	(3)
第二节 物体的弹性	(8)
第三节 骨力学和软组织力学概述	(15)
第二章 流体的运动规律	(22)
第一节 理想流体的运动规律	(22)
第二节 实际流体的运动规律	(26)
第三节 血液的流变特性	(31)
第四节 血流在人体循环系统中的流动	(33)
第三章 振动、波和声	(37)
第一节 振动	(37)
第二节 谐振动的合成	(42)
第三节 波动	(48)
第四节 波的叠加	(54)
第五节 声波	(57)
第六节 多普勒效应	(62)
第七节 声波在介质中的传播规律	(64)
第八节 超声波	(66)
第九节 超声影像原理	(69)
第四章 分子物理学	(76)
第一节 分子运动的基本概念	(76)
第二节 理想气体分子运动论	(77)
第三节 气体分子速率分布和能量分布	(80)
第四节 输运过程	(84)
第五节 液体的表面性质	(85)
第六节 液体的表面现象	(90)
第五章 热力学基础	(95)
第一节 热力学第一定律	(95)
第二节 理想气体的热力学过程	(98)
第三节 热力学第二定律	(103)
第四节 卡诺循环和卡诺定理	(108)
第五节 熵和熵增原理	(110)
第六节 自由能和吉布斯函数	(114)

第六章 静电场	(118)
第一节 电场强度	(118)
第二节 高斯定理	(120)
第三节 电场力作功 电位	(124)
第四节 膜电位	(128)
第五节 静电场中的电介质	(133)
第六节 介质中的高斯定理、电位移矢量	(139)
第七章 直流电	(143)
第一节 电流密度、欧姆定律的微分形式	(143)
第二节 含源电路的欧姆定律	(146)
第三节 基尔霍夫定律及其应用	(149)
第四节 RC 电路的暂态过程	(151)
第五节 直流电的医学应用	(153)
第八章 电磁现象	(158)
第一节 磁场	(158)
第二节 磁场的高斯定理和安培环路定理	(162)
第三节 磁场对运动电荷的作用	(165)
第四节 磁介质和生物磁效应	(170)
第五节 电磁感应现象	(174)
第六节 电磁场和电磁波	(180)
第九章 光的本质与光的波动性	(184)
第一节 光的本质	(184)
第二节 光的干涉	(185)
第三节 光的衍射	(190)
第四节 光的偏振	(194)
第十章 几何光学	(202)
第一节 球面成像	(202)
第二节 透镜	(208)
第三节 眼	(213)
第四节 放大镜 纤镜	(217)
第五节 显微镜	(219)
第十一章 量子力学基础	(226)
第一节 热辐射	(226)
第二节 光子	(230)
第三节 实物粒子的波动性	(235)
第四节 类氢原子的量子理论	(240)
第五节 激光	(243)
第十二章 光谱分析基础	(250)
第一节 多电子原子角动量耦合	(250)

第二节	原子的光谱项与谱线的精细结构·····	(252)
第三节	原子光谱·····	(256)
第四节	分子的电子光谱和振动、转动光谱·····	(259)
第五节	分子的转动光谱及旋光光谱·····	(265)
第十三章	原子核物理基础 ·····	(269)
第一节	原子核的基本性质·····	(269)
第二节	核衰变规律·····	(271)
第三节	放射性计数的统计涨落及放射平衡·····	(273)
第四节	中子·····	(276)
第五节	射线与物质的相互作用·····	(278)
第六节	电离辐射防护·····	(280)
第十四章	医学影像物理基础 ·····	(283)
第一节	X 射线计算机断层成像·····	(283)
第二节	磁共振成像·····	(289)
第三节	核素成像·····	(295)
附录	·····	(300)

绪 论

从事生物医学研究与临床实践的人们应该具有怎样的数理化基础呢。数理化基础对于生物医学专业的学生今后的发展、对生物医学发展的作用应作如何的估计呢。不言而喻,物理学在工程技术与理论中占有极其重要的地位,从某种角度上讲,物理学无论在研究内容还是在思维的方式、方法上更具有普遍意义,因此这就是为什么医学生要学习物理学的理由。

历史是一面镜子,它不但告诉了人们过去是个什么样子,也映射出今后的路该如何走。考查一下生物医学的发展历史,将给我们有益的启迪。

一、理工科技与理论是推动生物医学发展的强大动力

生物细胞的发现是借助于增强了肉眼功能的光学显微镜;使生物医学由细胞水平上升到分子水平,是建立在用X射线衍射技术研究了蛋白质结构的基础之上;以重建数字图像为核心的现代医学影像技术更是物理学、数学、工程技术、计算机技术相结合的集中体现。因此,现代医学的重要特征就是其理论研究和临床实践中对近代理工技术与理论的应用比重日趋增加。医学发展的历史还告诉我们,由于医学是一门实践性极强的学科,现代医学实践必须借助现代的理工科技,医学对理工科技的成功应用中,使其进一步完善与发展并形成鲜明的生物医学的特色,于是新的医学分支就形成了,如X射线诊断学、超声诊断与治疗、激光医学、核医学等等无一不是如此。

综上所述,我们可以预测,一位生物医学工作者,他不但应具有精湛的医学理论与技术,而且还应具有坚实的数理化基础,那么他就如虎添翼、前程远大,成果辉煌。

二、理工科的思维模式同样适用于生物医学领域

包括医学教育的我国教育事业正在经历一场巨大的变革,即从应试教育向能力培养的转变。能力有诸多的表现,其中最重要的是科学思维能力,或者说是科学用脑。排除先天因素,一个人的科学用脑主要看他是否掌握了科学思维的方法。

物理学研究问题的方法一般讲是采用了从“个别”到一般,再由“一般”去研究“个别”。这种方法的具体体现就是物理学中较普遍采用的模型法。所谓模型就是从大量千奇百怪的个别事物或现象,通过形象思维、抽象思维或逻辑思维找出一个能反映事物或现象共同特征或规律的东西,这就是模型。例如一张交通路线图就是一个模型,它用一张纸、若干曲线及符号就可以表示出交通线路及城市的分布情况;医学研究中的实验动物也是一个模型,用它可以模拟人的生理、病理、药理过程。

模型有多种,但大体上可分为物理模型和数学模型。物理模型是事物本质或主要特征的定性表述,如用来研究气体热力学规律的理想气体模型;用来研究流体运动规律的理想流体模型。数学模型是对事物变化规律的定量表述。模型法现已大量应用于医学基础理论及临床技术的研究中,例如研究神经传导的电缆模型、研究心肌细胞膜动作电位的 Beeler-Reuter 方程,后者于 1977 年获得医学诺贝尔奖金。

目前数学模型倍受推崇,这是因为改变数学模型中某些参数,相当改变了事物所处

的条件，配合计算机技术可以快速地找出事物在不同条件下的变化规律，这就是计算机模拟实验，它比实物实验大大的省力、省物、省时，且科学性更强。

根据上面的分析，我们可以认为，通过物理学的学习，可以对人们的科学思维能力进行有效地培养。

三、物理学是深入认识生命过程的理论基础

现代医学研究已经从形态的定性研究进入功能的定量研究、从细胞水平进入分子水平，也就是说医学研究已逐步进入到了对生命现象的本质性研究阶段。我们承认生命过程的复杂性及特殊性，但究其本质，它还是遵守物质运动的基本规律。物理学的研究内容就是物质运动的基本规律，从这个角度上讲，生命现象的本质性研究离不开物理学。例如研究肌肉、骨骼、血管功能时就采用了材料力学的基本方法；很多生理活动是由生物电信号支配、控制的，所以有了电生理学；人们所以能看到五彩缤纷的世界，是因为视网膜上有“视杆细胞”和“视锥细胞”，它们实际上起着物理学中光电转换的作用；临床中的基础代谢实验属于热力学第一定律的范畴，因此我们说坚实的物理学基础将使人们在深入认识生命现象的过程中把握正确的观点和方法。

医用物理学是医学院校的一门骨干课程。此学科设置的目的是使医学生更进一步掌握物理学的基本概念、规律、方法。它所讨论的内容一般说来不直接用于医学实践中所遇到的具体问题，但它们却是今后解决医学实践的基础知识，同时物理学也是后继课准备。正确认识物理学与医学的关系将是学好医用物理学的关键所在。

张泽宝

1997年元月

第一章 人体力学的基础知识

人体力学是生物力学的一个分支。人体力学是用力学的观点、方法定量地描述、研究人体组织和器官的力学特征。人体力学将使解剖学从形态研究上升到定量研究阶段。

本章对人体力学所需的力学概念和规律作重点讲述，也对人体力学在骨骼系统、软组织系统、血管系统的应用作简单地介绍。

第一节 刚体的转动

【刚体、力矩】

在物理学中，称在外力作用下，物体的大小与形状不发生改变的物体为刚体 (rigid body)。在处理刚体的力学问题时，可以把刚体看成是一个质点系，对于可加性的物理量，如质量、力、能量等，整个刚体的力学量就是构成刚体的所有质点的力学量的叠加。刚体是一个物理模型，但有些情况下，物体的形变很小或问题研究中可不考虑物体的形变时都可以把物体作刚体处理。

刚体的运动有两种形式：平动和转动。物体的平动决定于该物体所受的合外力的大小及方向；而物体的转动则决定于物体所受的合外力矩的大小与方向。

【刚体转动的角变量】

某瞬间，刚体的所有质点都在作圆周运动，其圆周运动的圆心都在同一直线上，称此刚体的运动为转动(rotation)，圆周运动的圆心所在直线就是转动轴(rotation axis)。在刚体的转动过程中，转动轴的空间位置不变，则称为定轴转动。我们主要研究定轴转动问题。

与转动轴相垂直的平面为转动平面。图 1-1 即表示在转动过程中，转动平面上 P 点的运动情况。一般称 OP 为矢径 (radius vector)，记为 $\vec{r}$ ，经时间 Δt ，OP 到达 OP'，即扫过 $\Delta\theta$ 角，称为角位移 (angular displacement)，角位移是一个矢量，完整的表示应是 $\vec{\Delta\theta}$ ，角位移的方向由右手螺旋定则决定，即右手四指顺着转动方向，姆指表示 $\vec{\Delta\theta}$ 的方向。角位移对时间的一阶导数为角速度 $\vec{\omega}$ 。

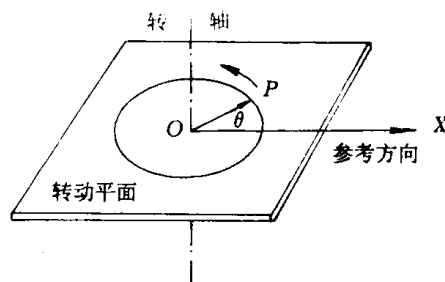


图 1-1 刚体的定轴转动

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta\theta}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} \quad (1-1)$$

而角速度对时间的一阶导数则为角加速度 $\vec{\alpha}$ ，

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad (1-2)$$

上述描述转动的角变量与描述物体平动的线变量 (速度 $\vec{v}$ 、加速度 $\vec{a}$) 之间有如下对应关系：

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (1-3)$$

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\
&= \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \\
&= \vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\alpha} \times \vec{r} \\
&= \vec{a}_n + \vec{a}_t
\end{aligned} \tag{1-4}$$

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} \tag{1-5a}$$

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} \tag{1-5b}$$

式中的“ $\times$ ”为两个矢量之间乘积符号，读为叉乘，其结果也称为两矢量的矢积。矢量 $\vec{a}$ 与矢量 $\vec{b}$ 的矢积的大小为

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \theta \tag{1-6}$$

θ 角为矢量 $\vec{a}$ 与矢量 $\vec{b}$ 之间的小于 π 的夹角。矢量积的方向也由右手螺旋法则决定。即右手四指顺着 $\vec{a}$ 的方向，转过 θ 角，姆指方向即为 $\vec{a} \times \vec{b}$ 的方向。式中 $\vec{a}_n$ 为法向加速度，指向圆心 O， $\vec{a}_t$ 为切向加速度，其方向沿圆周的切线方向。

【转动动能】 机械能包括势能和动能，由于刚体没有变形，所以感兴趣的主要是动能。在本节的引言中我们就明确指出，对于具有可加性的力学量，刚体整体的力学量就是所有质点对应力学量的迭加结果，故刚体的转动可作如下处理：假定一个刚体由 n 个质点所组成， n 是一个很大的数目。每一个质点的质量依次记作 Δm_1 、 Δm_2 、 Δm_3 、 $\cdots$ 、 Δm_n ，它们到转轴的距离对应为 r_1 、 r_2 、 r_3 、 $\cdots$ 、 r_n 。则知它们在以转速 ω 转动时，整个质点系即刚体的转动动能为

$$\begin{aligned}
E_R &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta m_i \omega^2 r_i^2 \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2 \right) \omega^2
\end{aligned} \tag{1-7}$$

定义物体的转动惯量 (rotational inertia) 为

$$I = \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2 \tag{1-8}$$

则式 (1-7) 可简化为

$$E_R = \frac{1}{2} I \omega^2 \tag{1-9}$$

和质点动能表达式 $E_R = \frac{1}{2} m v^2$ 做个形式上的对比：既然 ω 和 v 都是表明运动快慢的物理量，又都是表示与运动相关能量的关系式，而 m 是反映惯性大小的物理量，我们有理由推论 I 也是反映刚体转动惯性大小的物理量，这是个重要物理量，从定义式可以看出，它是刚体各部分质量相对于给定转轴分布情况的整体反映。

【转动惯量】 物体一般并不是由有限个分立的质点所组成的，而是由无数个质点紧密相连而形成的连续体，因此 I 的一般表达式要写成积分的形式，即取 (1-8) 式中的 n 趋于无穷大 ∞ 的极限值

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2 = \int r^2 dm$$

$$= \int r^2 \rho dv \quad (1-10)$$

式中 dm 称质量元，表示一个密度为 ρ 的小体积元 dv 的质量。在 SI 制中转动惯量的单位是 $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ 。

下面对转动惯量分别做些定性和定量的分析。首先看一下影响转动惯量的因素。由式 (1-10) 可以粗略看出 I 是由组成刚体的所有质点的质量及相对于转轴位置决定的，因此刚体的质量、刚体转轴的位置及刚体的几何尺寸和各部分的密度大小都会影响转动惯量的大小。人们也利用这些规律制作一些器械。例如，机械中常用的飞轮，使材料多分布于轮缘，以增大转动惯量，保持较大的惯性抵抗影响转动匀速性的干扰。中国古建筑中的宫门，往往制作成越远离门轴越厚的形状，使得质量重、强度高的宫门开关时灵活省力。对于车轮、叶片等转动部位则多使转轴通过其质心，以使转动惯量小一些，易于变速等。人们在体育和艺术活动中，也会在腾空和旋转过程中收缩和伸展躯体来改变转动惯量取得不同的转动效果。

式 (1-10) 还给出了确定一个转动刚体相对于一定的转轴的转动惯量大小的数学方法，其一是积分法，其二是迭加法。对于形状具有对称性，密度分布均匀或有确定函数关系的物体可以由定积分求解。对于可用积分法求解的几个物体的组合体，则可用迭加法求出它们的总和。对于形状复杂、密度分布函数关系不明确的物体，最实用的办法是实验测定法。

在求解转动惯量时，利用平行移轴公式是很有帮助的。所谓平行移轴公式指的是，相对于任何一根转轴的转动惯量 I 都可以表示成刚体对通过质心且与该轴平行的转轴的转动惯量 I_0 与刚体质量与两轴距离 l 平方乘积之和的形式，即

$$I = I_0 + ml^2 \quad (1-11)$$

表 1-1 给出几种常见密度均匀的物体绕定轴转动的转动惯量。

表 1-1 几种常用的转动惯量

均匀几何体	转轴位置	转动惯量
质量为 m ，长度为 l 的长棒	与棒身垂直，通过棒端	$\frac{1}{3} ml^2$
	与棒身垂直，通过棒的中心	$\frac{1}{12} ml^2$
质量为 m ，长度为 l 半径为 r 的圆柱体	沿几何轴	$\frac{1}{2} mr^2$
	通过中心与几何轴垂直	$\frac{1}{4} mr^2 + \frac{1}{12} ml^2$
质量为 m ，半径为 r 的球体（壳）	轴线沿直径的球体	$\frac{2}{5} mr^2$
	轴线沿直径的球壳	$\frac{2}{3} mr^2$
质量为 m ，半径为 r 的薄壁窄圆环	沿直径	$\frac{1}{2} mr^2$
	通过中心与环面垂直	mr^2

【力矩、角动量、力矩的效应】

刚体的转动决定于刚体所受力矩 $\vec{M}$ ，力矩 $\vec{M}$ 定义为力 $\vec{F}$ 的作用点对应的矢量 $\vec{r}$ 与 $\vec{F}$ 的叉乘，即

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (1-12)$$

描写质点、物体运动状态很重要的一个量是角动量，也称动量矩（moment of momentum），对于运动质点，角动量 $\vec{L}$ 的定义是

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v} \quad (1-13)$$

对于有对称轴的自旋物体，其角动量

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad (1-14)$$

不难验证，刚体在定轴转动中，功能原理及角动量守恒仍然是成立的。我们从功能原理出发，可以得到两个重要的结果。在图 1-2 上，O 为垂直纸面的转轴与刚体截面的交点，F 是处于该截面上的作用力，l 是力臂，P 是 F 的作用点，OP 为矢径， ϕ 角是矢径与力臂之间的夹角。

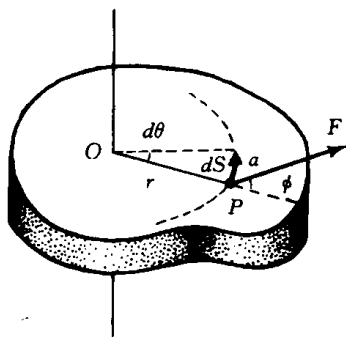


图 1-2 力矩对有固定轴的刚体的作用

假定，在具有一定力臂的力 F 的作用下转过一个小的角位移 $d\theta$ ，而对应的线位移为 ds 。由于 $d\theta$ 极小， ds 在 r 的垂线方向上，也就是说 ds 与 F 的夹角也是 ϕ 。此过程中 F 所做的功

$$dW = F \cdot ds \cos \phi = Fr \cos \phi d\theta = Fl d\theta = Md\theta$$

换句话说，具有一定力臂的力在路程上累积效应和力矩 M 在角位移上累积效应是等价的。外力（或力矩）作功会使刚体的转动动能增加，即

$$Md\theta = d\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right)$$

如果转动惯量在转动过程中不改变，则上式经数学运算有

$$Md\theta = I\omega d\omega = I \frac{d\theta}{dt} d\omega = Id\theta \frac{d\omega}{dt} = I\alpha d\theta$$

如果将首项与尾项中的共同部分 $d\theta$ 消去，则得到

$$M = I\alpha \quad (1-15)$$

这是一个极重要的关系式，无论在形式上，还是在作用上都相当于质点力学中的牛顿第二定律，称为转动定律。

式 (1-15) 可以写成

$$M = I \frac{d\omega}{dt}$$

$$Mdt = d(I\omega) = dL \quad (1-16)$$

式中 Mdt 称为冲量矩（moment of impulse）。当 $Mdt=0$ 时， $d(I\omega)=0$ ，即

$$I\omega = \text{常数} \quad (1-17)$$

这就是动量矩守恒。它是自然界包括微观世界普遍遵守的守恒定律。

〔例题 1-1〕 一个人坐在转椅上，双手平伸各握一个 5kg 的铅球，距转轴的距离为 60cm，假设人体对转轴的转动惯量在整个过程都为 $5\text{kg}\cdot\text{m}^2$ ，整个装置的摩擦力不计。当转椅先以 10rad/s 的转速转动时，突然人把手臂收回，使铅球拉近到距转轴 20cm 处，求此时系统的转速 ω 。

解：在此过程中，系统不受外力矩作用，角动量守恒。对于人及铅球可看作是多刚体系统，可用迭加法求出系统的初始及现状下的转动惯量 I_0 及 I 。

$$I_0 = 5 + 2 \times 5 \times (0.6)^2 = 8.6\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I = 5 + 2 \times 5 \times (0.2)^2 = 5.4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

由 $I_0 \omega_0 = I \omega$, $\omega_0 = 10 \text{ rad/s}$,

知 $\omega = \frac{I_0}{I} \omega_0 = 15.9 \text{ rad/s}$

【旋进】

当刚体绕轴转动，而转轴也有一定的转动速度时，常因转轴与铅垂方向不重合，刚体受到重力矩的作用，一方面仍绕转轴转动即自旋 (spin)，另一方面自旋轴又绕着铅垂线为对称轴的圆锥面旋转。这种转动刚体的转轴绕着另一条轴线的转动，称为旋进 (precession)，又称进动。旋进也是常见的，例如地球也在旋进，天文学上把地球自转轴的旋进称为岁差，其旋进周期为 25800 年。游戏用的陀螺和定向装置上的陀螺都利用了旋进。

下面我们以陀螺为例，讨论一下陀螺旋进的原因、特性及决定旋进周期大小的因素。在图 1-3 中，陀螺自旋轴为 OA，角速度为 ω ，角动量为 L ， L 的方向和 OA 一致。

1. 陀螺的旋进性 当角动量 L 与垂直轴 OZ 的夹角 θ 不为零时，重力不通过 O 点，因而具有力矩 M 的作用。特别注意的是重力矩 $\vec{M}$ 的方向是和矢量 $\vec{L}$ 和 OZ 轴所决定的平面是垂直的。经过一时间小区段 dt 的作用，角动量会取得增量 $d\vec{L} = \vec{M}dt$ 。由于 dt 是标量，矢量 $d\vec{L}$ 就沿着 $\vec{M}$ 矢量的方向，也就是和角动量 L 的方向垂直。如果把矢量 L 的末端视作一个动点，它对 O 的距离为 L 长， $d\vec{L}$ 在 $\vec{L}$ 方向上没有分量，因此 $\vec{L}$ 的长度不会改变。而 $d\vec{L}$ 在垂直 L 的方向上有分量，便会使 $\vec{L}$ 的末端画出一个圆的轨迹；又由于 $d\vec{L}$ 垂直于 OZ 与 L 形成的平面，因此任何时候也和末端画出的圆平面上的半径垂直，而不会使半径方向的线度改变。这样就会使陀螺自旋轴与 OZ 轴保持固定 θ 夹角转动，于是便形成了陀螺的旋进。

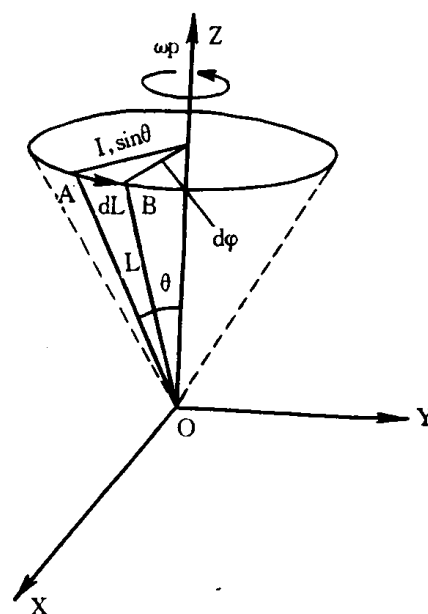


图 1-3 陀螺的自旋和旋进

高速旋转刚体的自转轴发生旋进时就会出现陀螺效应 (gyroscopic effect)。所谓陀螺效应是指如果强迫一个高速自转的陀螺作进动时，就会产生一个与产生进动所需要力矩大小相等方向相反的陀螺力矩反作用。利用陀螺效应可以制成稳定仪，保持船舶抵抗海浪，飞机抵抗气浪作用减小侧滚的稳定性。另一方面，在轮船或飞机运动方向改变时，汽轮机或涡轮机的转子也会因陀螺效应使轴承受破坏。同样的效应在运动员身上也会存在，从而造成运动创伤。

2. 旋进角速度和旋进周期 在图 1-3 中，设 dt 时间内的旋进角为 $d\phi$ ，旋进角速度为 $\omega_p = d\phi/dt$ 。由几何关系可知 $dL = L \sin \theta d\phi$ ，再由 $Mdt = dL$ ，知有 $Mdt = L \sin \theta d\phi$ ，于是可得

$$\omega_p = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L\sin\theta} \quad (1-18)$$

旋进周期

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi\sin\theta \cdot L}{M} \quad (1-19)$$

结果表明，陀螺旋进周期和角速度取决于重力矩、自旋角动量，以及自旋角动量与外力之间夹角的大小。

第二节 物体的弹性

刚体是一种理想模型，它要求物体在任何受力情况下形状和大小都不改变。其实，物体在受到力的作用时，或多或少地要发生形变。人体组织受到力的作用具有不同程度的变形，内部也会发生相应的力学效应，它们涉及到一些重要的生理现象和病理变化。因此，有必要深入了解有关物体变形的内力作用及能量转换问题。本节主要介绍一些有关弹性的基本概念、基本原理及基本分析方法。

【应变和应力】

不难设想，物体之所以能具有一定的形状和大小，是构成物体的原子、分子之间通过某些相互作用维持着某种稳定结构。粗略地讲，一种稳定的结构意味着能量最小状态。任何使原子、分子间距改变，发生相对运动的作用都会引起系统能量的增大，为此物体会产生抵抗这种效果的内力，外力作用一旦解除，系统将尽可能地恢复原状或进入一种新的稳定状态。物体受外力作用发生形状和大小的改变称为形变（deformation）。在外观上发生可观察的变化的同时，物体内部也会发生相应的变形和相应的内力分布。假想用—个平面把—个处于形变的物体剖成两部分，可以推论这“两部分”之间的作用力是性质相同、大小相等、方向相反的，这提示我们在物体内部存在着—种与形变相关的、面分布的力，我们用物理量应力 F_s （stress）来表征这种力学属性。假设物体内某点处面积元 ΔA 上内力合力为 ΔF ，则应力

$$F_s = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \quad (1-20)$$

应力的单位是 N/m^2 。物体的形变是受到外力作用的结果，应力相对应的形变不是绝对改变而是各种相对改变。我们把物体内在应力作用下发生的形变和大小的相对变化称为应变（strain）。下面我们具体介绍三种基本类型的弹性形变下的应变和应力的表现形式。弹性形变（elastic deformation）就是在—定的形变限度内在解除外力后物体能够完全恢复原状的形变。长度形变、体积形变和形状形变是三种基本的形变形式，其它的形变可以认为是它们的组合。

1. 长度形变和线应变 当—个细长物体受到纵向牵拉或挤压时，形变主要发生在沿作用力方向上的长度改变。这种只考虑—维方向上的形变称为长度形变。若物体原来的长度为 l_0 ，受力作用长度改变量为 Δl ，则线应变（linear strain）为

$$\epsilon = \Delta l / l_0 \quad (1-21)$$

2. 体积形变和体应变 当物体受到压强作用，体积发生变化而形状并不改变的形变称为体积形变，这种形变下的应变为体应变（volumen strain），记作 θ 。

$$\theta = \Delta V / V \quad (1-22)$$

3. 形状形变或角应变 只有形状的改变而不发生体积改变的剪切形变就是形状形变。例如一块弹性长方体，在两对平行侧面上施加一对大小相等、方向相反、作用线平行的剪切力的作用，这就会变形为两端面与垂直端面倾角为 φ 的平行六面体，就是剪切形变。对应的应变为剪切应变 (shearing strain)，又称为角应变 (angular strain)，记作 γ 。

$$\gamma = \tan \psi \approx \psi \quad (1-23)$$

式中， $\tan \psi$ 与 ψ 的近似关系成立的条件是 ψ 数值较小，且用弧度表示。这也就不难理解为什么叫角应变了。 ψ 角并不一定为端面减小的角度。更一般的情况是，物体受到剪切力的作用，物体内任一点处两互相垂直方向的角度减小量即为剪应变。

上面讲的三种应变都是无量纲的，尽管在定义式中出现了长度、体积、形状方面的参数，但并不受具体的长度、体积、形状的影响，它本质上反映的是外力作用下形变在物体内的效应，因此仅与形变有关，而与物体的几何形状、大小无关。

【胡克弹性体的弹性模量】

弹簧的胡克定律 (Hooke's law) 是在中学所熟知的，即弹簧伸长 Δl 所产生的弹力 F 与 Δl 成正比，比例系数为弹簧的倔强系数 k 。表示为

$$F = k \Delta l \quad (1-24)$$

由此我们可以得到在这个过程中的应力和应变之间的数量关系。假定弹性体是个均匀连续的物体，倔强系数为 k ，原长为 l ，横截面积为 A 。把式 (1-24) 两边同除以 A ，且将等式右端作些变换，则有

$$\frac{F}{A} = \frac{k l \Delta l}{A l}$$

即有

$$\sigma = E \epsilon \quad (1-25)$$

式中 σ 为拉伸应力，即张应力。 E 称杨氏模量 (Young's modulus)，它的单位是 N/m^2 。在弹性范围内，应力-应变关系满足胡克定律的物体就称为胡克弹性体。实验研究表明，胡克弹性体在体积形变和剪切形变中，应力和应变之间也存在正比关系。

$$P = -k\theta \quad (1-26)$$

$$\tau = G\gamma \quad (1-27)$$

式 (1-26) 中， P 为体压强， k 为体变模量， k 的倒数称压缩率。式中之所以要引入负号，是因为在外压强作用下 $\theta < 0$ ，为了确保 $k > 0$ 而引入的。式 (1-27) 中的 τ 为剪应力，方向与剪切力相同，大小为剪切力与剪切力所作用的界面平行的截面的面积之比； G 为剪切模量，大多数金属材料约等于 E 的 $1/2 \sim 1/3$ 。

表 1-2 常见材料的弹性模量 ($\times 10^9 \text{N/m}^2$)

材料	杨氏模量 E	体变模量 k	剪切模量 G
钢	200	158	80
铝	70	70	25
玻璃	70	36	30
木材	10	—	10
骨	16 (拉伸), 9 (压缩)	—	10
水	—	2.2	—

E、G 和 k 统称为胡克弹性体的弹性模量 (modulus of elasticity)，它们是反映不同材料力学性质的重要物理量。一部分材料的弹性模量由表 1-2 给出。

【胡克弹性体的应变能】

对于一个理想弹簧，受到压缩可以把外力所做的功转变成弹性势能贮存起来。当外力约束解除后势能可以完全释放出来对外做功，势能就等于外力所做的功。对于一个胡克弹性体，外力做功则会完全转化为应变能 (strain energy)，应变能也是一种势能。下面我们将证明长度形变和剪切形变的应变能完全可以由应力和应变决定。

设有一弹性体截面积为 s ，原长为 l_0 ，受拉力作用伸长到 l (不考虑截面积的形变)，对应的应力为 σ ，应变为 ϵ ，我们来推导一下应变能的公式。

我们用虚位移法来解决这个问题。虚位移法是分析力学中常用的一种方法。处于变化过程中的某一状态的物理量，假定该系统的位移发生一个微小的变化，计算出该物理量的虚改变量，做为后面分析的基础，这就是虚位移法。虚自变量和虚函数的增量符号通常用希腊小写字母 δ 来表示。 δ 服从微分 d 同样的数学运算法则。

假设长度变化到 l 的弹性体发生一个非常小的虚位移 $\delta(l_0)$ ，则需要做的虚功增量

$$\begin{aligned}\delta W &= \text{力} \times \text{虚位移} = (\sigma s) \cdot \delta(l \cdot \epsilon) \\ &= \sigma s l \cdot \delta \epsilon = \sigma V \delta \epsilon\end{aligned}$$

因而，由于应变从 0 变化到 ϵ 的过程应力所做的功

$$\begin{aligned}W &= \int_0^\epsilon \delta W = \int_0^\epsilon \sigma V \delta \epsilon \\ &= V \int_0^\epsilon E \epsilon \delta \epsilon = \frac{1}{2} V E \epsilon^2\end{aligned}\quad (1-28)$$

那么，单位体积内应力所做的功，即应变能

$$\omega = \frac{1}{2} E \epsilon^2 = \frac{1}{2} \epsilon \sigma \quad (1-29)$$

下面我们再用平均值法来得出剪切应变能的公式，可以表示为类似的形式

$$\omega = \frac{1}{2} \tau \gamma \quad (1-30)$$

在图 1-4 中表示的是一个正方体受到剪切力 F 的作用而发生剪切应变 γ 。设正方体的边长为 l 。

则由于整个正方体体积 l^3 内的应力所做的功就等于外力造成剪切形变所需要的功。CD 底面为静止平面，切应变为零，位移也为零，AB 面位移最大为 AA' ，作用力为 F 。其它各与 CD 和 AB 平面平行的平面都受到相同的 F 力的作用，位移为 0， AA' 间的连续数。因此我们可以用平均值法求出总的弹性势能的增加为

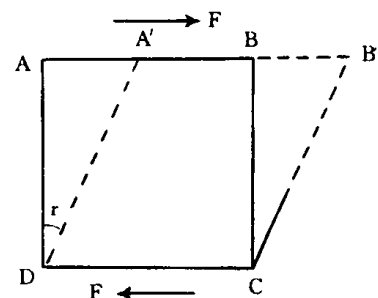


图 1-4 正方体的剪切应变

$$\begin{aligned}\Delta E &= F \left(\frac{1}{2} AA' \right) \\ &= \frac{1}{2} l^2 \tau (l \gamma) = \frac{1}{2} \tau \gamma l^3\end{aligned}$$

便可求得切应变能的表达式为

$$\omega = \frac{1}{2} \tau \gamma$$