高等学校教材

新编高等数学基础

（中 册）

湖北教育出版社

高等学校教材

新编高等数学基础

王启泰　陈增政　徐进明　主编
赵根榕　胡迪鹤　　　　　主审

（中册）

湖北教育出版社

新编高等数学基础
(中　册)
王启泰　陈增政　徐进明　主编
*
湖北教育出版社出版　新华书店湖北发行所发行
江西印刷公司排版　湖北省新华印刷厂印刷
850×1168毫米32开本　5.75印张　1插页　139 000字
1990年6月第1版　1990年6月第1次印刷
印数：1—4 100
ISBN 7—5351—0468—1/O・13
定价：1.65元

内 容 提 要

《新编高等数学基础》在1989年全国高等工科院校应用数学专业数学分析与高等代数教材审稿会上审定通过，作为高等工科院校各类多学时专业的高等数学及线性代数的教材.全书分上、中、下和“解题导引”四册。上册的内容为一元微积分与常微分方程，中册的内容为线性代数与空间解析几何，下册为多元微积分与无穷级数，“解题导引”是按教材章节编排的习题及解答.本册分“线性空间”、“矩阵”、“线性变换与矩阵的特征值”三章.

本书也可作为工程技术人员和数学爱好者的参考书.

编者的话

传统的微积分和线性代数课程分别以连续变量的极限运算和离散变量的代数运算为研究对象，它们虽然各有特点，但其内在联系却十分紧密．例如，极限法则一旦建立，便具有代数运算的特征，多元微积分运用向量和矩阵的方法处理，不但简单易懂，而且便于记忆和运用．我们按照微积分和线性代数内容的内在联系，并将常微分方程、场论结合在一起，编写了这套新体系的教材——《新编高等数学基础》．在一元微积分中，运用微分算符的（代数）运算性质建立积分的（形式）运算法则；在线性空间中，通过内积概念讨论了R^3空间中几何体的位置关系；在多元微分学中，用内积和矩阵微积的方法形式地处理了多元纯量函数及向量函数的微分问题，并用二阶偏导数组成的Hessean矩阵讨论了多元极值问题；在曲线积分与曲面积分中，以向量微分元与积分算符的形式运算给出曲线积分与曲面积分的定义，并解决了有关计算；在付里叶(Fourier)级数中，采用了内积记法，等等．这样以向量、矩阵为主线来处理微积分问题，观点新颖、推证简洁、运算准确，便于记忆和运用．

本书包含了国家教委工科数学课程教学指导委员会提出的《数学课程教学基本要求》中关于高等数学和线性代数的全部内容．书中标有*号的内容可根据需要取舍．全部内容（包括习题课）可在230学时内授完．

在编写中，我们力求严谨准确、简明精炼、通俗易懂．为便于读者掌握高等数学的基本知识、基本运算和解决问题的基本能力，我们选配了一定数量的习题，专门编写了一本《“新编高等数

学基础"解题导引》，书中的全部习题均有解答．习题中还选编了近年来硕士研究生的部分入学试题解，供读者参考．

本书由福州大学、长沙交通学院、西北大学、武汉工学院联合编写．西北大学赵根榕教授、武汉大学胡迪鹤教授对本书的编写工作给予了极大的支持，对原稿提出了许多宝贵意见．西安交通大学游兆永教授、华中理工大学王能超教授对本书给予了很大的关心和鼓励．编者所在的四所院校对教材编写和教学试验始终给予了热情关怀和支持．显而易见，缺以上任何一方，本书的顺利出版是难以想象的．寥寥数语，实在无法表达编者感激之情于万一．

本书虽经四校反复试教并参考国内外有关教材进行了数次修改，由于编者水平所限，一定还存在不少缺点和错误．我们殷切希望使用本教材的师生和广大读者批评指正．

1989年10月

目　　录

第五章　线性空间

第六章　矩　　阵

第七章　线性变换与矩阵的特征值

上册主要讨论R^1到R^1的映射，本册将要研究一般空间及其之间的映射.第五章讨论线性空间.第六章讨论矩阵代数和行列式.第七章讨论线性空间之间的一种重要的映射——线性映射.

第五章 线性空间

5·1 n维线性空间

人们总把直线视为一维空间，平面视为二维空间，而把日常生活中的空间视为三维空间．本节先讨论三维空间，然后把空间概念推广到一般情况.

5·1·1 空间直角坐标系

过空间定点O,作三条相互垂直的数轴,它们都以O为原点,这三条轴分别叫做x轴（横轴）、y轴（纵轴）、z轴(竖轴),统称坐标轴．通常把x轴和y轴置于水平面上，而z轴则是铅直线；它们的正方向符合右手规则，即当右手的四个手指从x轴的正向右旋到y轴的正向时,拇指的指向就是z轴的正向(图5·1),这样的三条坐标轴和原点就组成了一个空间直角坐标系，点O叫做坐标原点（或原点）.

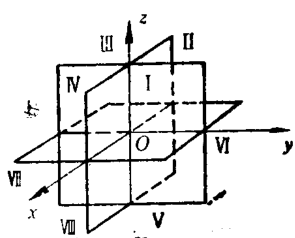


图5·1

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样定出的三个平面统称为坐标平面．例如x轴及y轴所确定的坐标面称为xOy面．三个坐标面把空间分为八个部分，每一部分叫做一个卦限（图5·1)．在xOy面上方有四个卦限，下方有四个卦限．含有x轴、y轴、z轴正向的卦

限叫做第Ⅰ卦限，然后按照反时针的顺序依次为第Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限，对分别位于Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限下面的四个卦限，依次称为第Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限.

设M为空间一个点，过点M作三个平面分别垂直于x轴、y轴和z轴，它们与x轴、y轴、z轴的交点依次为P、Q、R（图5·2），这三点在x轴、y轴、z轴上的坐标依次为x，y，z. 于是空间上一个点M就唯一地确定了一个有序数组（x，y，z），叫做点M的坐标，记作$M(x,y,z)$，反之，给定一个有序数组(x,y,z)，将上述过程倒过来，在空间唯一地确定了一个点M. 这样，通过空间直角坐标系，建立了空间的点M和一个有序数组(x,y,z)之间的一一对应关系. 我们把一切有序数组(x,y,z)的点的集合称为三维空间，记作R^3.

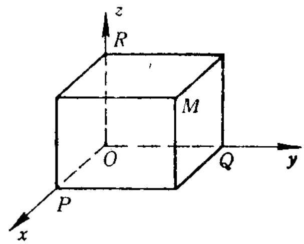


图5·2

设$M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$为R^3的两个点，由图5·3可得，M_1与M_2间的距离

$$d(M_1,M_2)=|M_1M_2|$$
$$=\sqrt{|M_1N|^2+|NM_2|^2}$$
$$=\sqrt{|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2}$$

而 $|M_1P|=|x_2-x_1|$，

$|PN|=|y_2-y_1|$，

$|NM_2|=|z_2-z_1|$

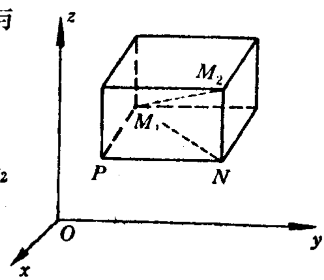


图5·3

所以 $$d(M_1M_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \quad (1)$$

特别，原点$O(0,0,0)$到点$M(x,y,z)$的距离是

$$d(O,M)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

例1 求证以$M_1(4,3,1)$、$M_2(7,1,2)$、$M_3(5,2,3)$三点

为顶点的三角形是一个等腰三角形.

证 因为

$$d(M_1,M_2)=\sqrt{(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2}=\sqrt{14}$$

$$d(M_2,M_3)=\sqrt{(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{6}$$

$$d(M_3,M_1)=\sqrt{(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{6}$$

所以 $d(M_2,M_3)=d(M_3,M_1)$，即$\Delta M_1M_2M_3$为等腰三角形.

5·1·2 向量及其表示

大家知道，我们遇到的量有两种：一种是象温度、质量、长度等这样的量，这种量只用大小即可表示，称为数量、标量或纯量；另一种是象力、位移、速度等这样的量，这种量不但有大小，而且有方向，这种既有大小又有方向的量称为向量或矢量.

向量常用一个上面加箭头的字母来表示，例如$\overrightarrow{\alpha}$、$\overrightarrow{\beta}$、$\overrightarrow{\gamma}$、$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$等等.

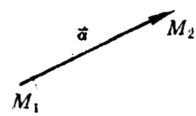


图 5·4

在几何上，向量常用一条有方向的线段来表示. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以M_1为始点、M_2为终点的有向线段所表示的向量记为$\overrightarrow{M_1M_2}$或$\overrightarrow{\alpha}$（图5·4）.

向量的大小叫做向量的模，向量$\overrightarrow{M_1M_2}$、$\overrightarrow{\alpha}$的模依次记作$\|\overrightarrow{M_1M_2}\|$、$\|\overrightarrow{\alpha}\|$、模等于1的向量叫做单位向量. 模等于零的向量叫做零向量，记作$\overrightarrow{0}$. 零向量的方向可以看作是任意的.

在实际问题中，有些向量与其始点有关，有些向量与其始点无关. 由于一切向量的共性是它们都有大小与方向，所以在数学上我们只研究与始点无关的向量，并称这种向量为自由向量（以后简称向量）.

由于我们只讨论自由向量，所以如果两个向量$\overrightarrow{\alpha}$和$\overrightarrow{\beta}$的模相等，且方向相同，那末我们就说向量$\overrightarrow{\alpha}$和$\overrightarrow{\beta}$是相等的，记作$\overrightarrow{\alpha}=\overrightarrow{\beta}$.

也就是说，经过平行移动后能完全重合的向量是相等的.

设$\overrightarrow{\alpha}$是空间中的一个向量，现将$\overrightarrow{\alpha}$的始点平移到坐标原点O（图5.5），于是$\overrightarrow{\alpha}$取决于它的终点M，而点M取决于它的坐标（x，y，z），因而$\overrightarrow{\alpha}$取决于一个有序数组(x,y,z)，我们把这个有序数组中x，y，z也叫做向量$\overrightarrow{\alpha}$的坐标，并记作

$$\overrightarrow{\alpha}=(x,y,z) \tag{2}$$

（2）式叫做空间向量$\overrightarrow{\alpha}$的坐标表示式．把一切有序数组（x，y，z）所对应向量的集合称为三维向量空间，并且仍记为R^3.

同样，如果把xOy平面上的向量$\overrightarrow{\alpha}$的始点平移到坐标原点O（图5·6），那末向量$\overrightarrow{\alpha}$与它的终点M的坐标（x,y）一一对应，我们把x,y叫做向量$\overrightarrow{\alpha}$的坐标，记作

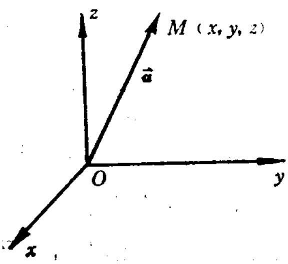


图 5·5

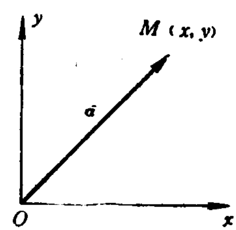


图 5·6

$$\overrightarrow{\alpha}=(x,y) \tag{3}$$

（3）式叫做平面向量$\overrightarrow{\alpha}$的坐标表示式.

把一切有序数组（x,y）对应的向量的集合称为二维向量空间，并记为R^2.

5·1·3 向量的线性运算

设R^2中两个向量$\overrightarrow{\alpha}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{\beta}=(b_1,b_2)$．我们规定其加（减）法运算与数乘运数如下

$$\overrightarrow{\alpha}+\overrightarrow{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2)$$

$$\vec{\alpha}-\vec{\beta}=(a_1-b_1,a_2-b_2)$$
$$\lambda\vec{\alpha}=(\lambda a_1,\lambda a_2),\lambda\in R$$

特别，当$\lambda=-1$时，$-\vec{\alpha}=(-a_1,-a_2)$叫做$\vec{\alpha}$的负向量. 于是，我们有

$$\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})$$

向量的加法运算及数乘运算统称为向量的线性运算. 下面说明向量线性运算的几何意义. 在R^2中有两个向量$\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$，经平移将其始点重合在原点O，作以$\vec{\alpha}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{\beta}=\overrightarrow{OB}$为邻边的平行四边形$OACB$（图5.7(1)），则和向量$\vec{\alpha}+\vec{\beta}$就是对角线向量$\overrightarrow{OC}$. 这种方法叫做平行四边形法. 平行四边形法的物理意义是力的合成或速度的合成.

此外，还可经平移使$\vec{\beta}$的始点与$\vec{\alpha}$的终点重合（图5·7(2)），则从$\vec{\alpha}$的始点到$\vec{\beta}$的终点的向量就是和向量$\vec{\alpha}+\vec{\beta}$,这种方法叫做三角形法. 三角形法的物理意义是位移的合成.

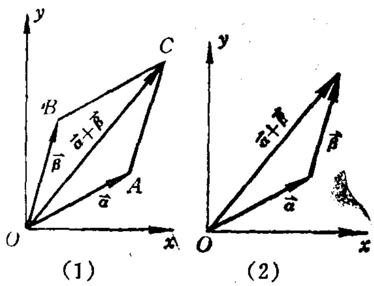


图 5·7

向量$\vec{\alpha}$与数量λ的乘积$\lambda\vec{\alpha}$是一个向量，其模
$\|\lambda\vec{\alpha}\|=\sqrt{(\lambda a_1)^2+(\lambda a_2)^2}=|\lambda|\,\|\vec{\alpha}\|$，当$\lambda>0$时，$\lambda\vec{\alpha}$的方向与$\vec{\alpha}$相同，当$\lambda<0$时，$\lambda\vec{\alpha}$的方向与$\vec{\alpha}$相反（图5·8）.

据上述规定，向量的线性运算满足如下性质：

1. 加法结合律：$(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$；
2. 加法交换律：$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$；
3. 数乘结合律：$\lambda(\mu\vec{\alpha})=\mu(\lambda\vec{\alpha})=(\mu\lambda)\vec{\alpha}$；
4. 数乘对数量加法的分配律：$(\lambda+\mu)\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\alpha}$；
5. 数乘对向量加法的分配律：$\lambda(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=\lambda\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$.

这些运算规律读者容易从定义或用几何作图加以验证.

在R^2中，有二个向量

$$\vec{i}=(1,0),\quad \vec{j}=(0,1)$$

值得注意，这两个向量，它们分别在x轴、y轴上，且它们的模都是1，因而称它们是R^2中的单位坐标向量（图5·9）.

设 $\forall \vec{\alpha}=(a_1,a_2)\in R^2$，由向量线性运算的性质，得

$$a_1\vec{i}+a_2\vec{j}=(a_1,a_2)$$

这样，我们便得到

$$\vec{\alpha}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j} \tag{4}$$

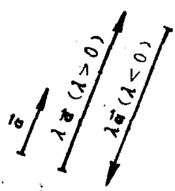


图 5·8

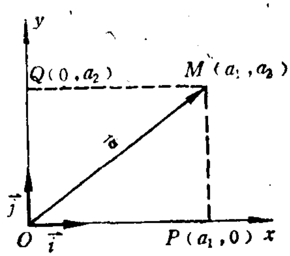


图 5·9

我们还可以从向量线性运算的几何意义说明(4)式成立. 由图5·9知

$$\vec{\alpha}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$$

上式表明，R^2中任何一个向量$\vec{\alpha}$都可通过$\vec{i}$，$\vec{j}$的加法及数乘运算表示出来. 前面已把这两种运算叫做线性运算，因而$\vec{\alpha}$可由$\vec{i}$、$\vec{j}$通过线性运算表示出来，简称为$\vec{\alpha}$可由$\vec{i}$，$\vec{j}$线性表示.

类似地在R^3中两个向量$\vec{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{\beta}=(b_1,b_2,b_3)$，规

定其线性运算如下

$$\vec{\alpha}\pm\vec{\beta}=(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,a_3\pm b_3)$$

$$\lambda\vec{\alpha}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3),\lambda\in R$$

不难验证R^2中向量的线性运算的性质对R^3中向量仍然成立．

在R^3中三个单位坐标向量（图5·10）

$$\vec{i}=(1,0,0),\quad \vec{j}=(0,1,0),\quad \vec{k}=(0,0,1)$$

设$\forall\ \vec{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)\in R^3$，由向量线性运算性质，得

$$a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}=(a_1,a_2,a_3)$$

这样，我们便得到

$$\vec{\alpha}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k} \quad (5)$$

我们仍然还可以从向量线性运算的几何意义说明(5)式成立．由图5·10知

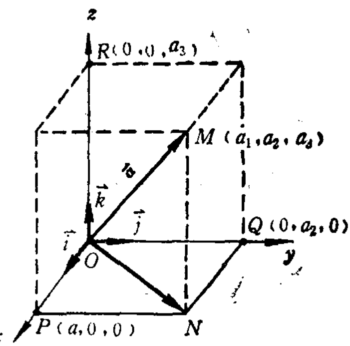


图 5·10

$$\vec{\alpha}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

$$=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$$

这说明R^3中任何一个向量$\vec{\alpha}$可由$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$线性表示．

R^3中的三个单位坐标向量$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$常依次记为$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$，因此(5) 式可改写成

$$\vec{\alpha}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3 \qquad (5)$$

这时$\vec{\alpha}$的模$\|\vec{\alpha}\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$，$\vec{\alpha}$的方向可由$\vec{\alpha}$与$x$轴、$y$轴、$z$轴的夹角$\alpha$、$\beta$、$\gamma$（叫做$\vec{\alpha}$的方向角）确定，或由它的方向角的余弦（叫做$\vec{\alpha}$的方向余弦）确定．由图5·10得

$$\begin{cases} \cos\alpha=\dfrac{a_1}{\|\vec{\alpha}\|}=\dfrac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} \\ \cos\beta=\dfrac{a_2}{\|\vec{\alpha}\|}=\dfrac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} \\ \cos\gamma=\dfrac{a^3}{\|\vec{\alpha}\|}=\dfrac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} \end{cases}$$

与$\vec{\alpha}$同方向的单位向量$\vec{\alpha}_0$（叫做$\vec{\alpha}$的单位向量）为

$$\vec{\alpha}_0=\frac{\vec{\alpha}}{\|\vec{\alpha}\|}=\frac{a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

例 2　已知$\vec{\alpha}=(\sqrt{3},-2,\sqrt{2})$，求$\vec{\alpha}$的方向余弦，方向角以及单位向量$\vec{\alpha}_0$.

解　$\because \|\vec{\alpha}\|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-2)^2+(\sqrt{2})^2}=3$

$\therefore$　$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{\|\vec{\alpha}\|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，　　$\cos\beta=\dfrac{-2}{\|\vec{\alpha}\|}=-\dfrac{2}{3}$，

$\cos\gamma=\dfrac{\sqrt{2}}{\|\vec{\alpha}\|}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

$\therefore$　$\alpha=\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，　　$\beta=\arccos\left(-\dfrac{2}{3}\right)$，

$\gamma=\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

$$\vec{\alpha}_0=\frac{\vec{\alpha}}{\|\vec{\alpha}\|}=\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{e}_1-\frac{2}{3}\vec{e}_2+\frac{\sqrt{2}}{3}\vec{e}_3$$

例 3　已知两点$M_1(2,2,\sqrt{2})$和$M_2(1,3,0)$，求向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模，方向余弦以及方向角.

解 由示意图5·11知

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=(-1,1,-\sqrt{2})$$

所以 $\|\overrightarrow{M_1M_2}\|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2$

$$\cos\alpha=\frac{-1}{2},\qquad \cos\beta=\frac{1}{2},\qquad \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\qquad \beta=\frac{\pi}{3},\qquad \gamma=\frac{3\pi}{4}$$

下面介绍向量的投影.

设R^3有两个向量$\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$，它们的夹角为φ（$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$），如图5·12（1），则数值$\|\vec{\alpha}\|\cos\varphi$叫做$\vec{\alpha}$在$\vec{\beta}$上的投影或$\vec{\alpha}$在$\vec{\beta}$方向上的投影，记作$\mathrm{Prj}_{\beta}\ \vec{\alpha}$或$(\vec{\alpha})_{\beta}$，即

$$\mathrm{Prj}_{\beta}\ \vec{\alpha}=(\vec{\alpha})_{\beta}=\|\vec{\alpha}\|\cos\varphi \tag{7}$$

另外，我们不难证明：设R^3有三个向量$\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$、$\vec{\gamma}$，则$\vec{\alpha}+\vec{\beta}$在$\vec{\gamma}$上的投影等于$\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$分别在$\vec{\gamma}$上的投影之和（图5·12(2)），即

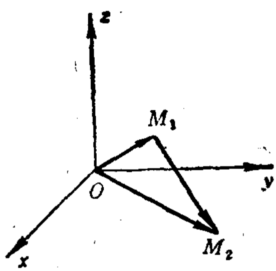
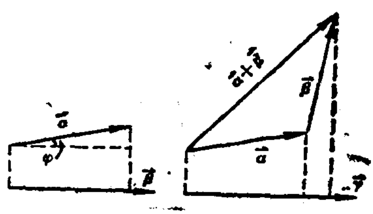


图 5·11



(1) (2)

图 5·12

$$\mathrm{Prj}_{\gamma}\ (\vec{\alpha}+\vec{\beta})=\mathrm{Prj}_{\gamma}\ \vec{\alpha}+\mathrm{Prj}_{\gamma}\ \vec{\beta} \tag{8}$$

设$\forall\ \vec{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)\in R^3$，则$a_1,a_2,a_3$ 分别为$\vec{\alpha}$在x轴、y轴、z轴上的投影.

5·1·4 n维向量

由上述知道，当R^3中建立了直角坐标系后，R^3中任何一个向量$\vec{\alpha}$由三个数组成的有序数组（a_1,a_2,a_3）所确定.

但是，在很多实际问题中，往往需要用更多的数来描述某种物理现象. 例如，当考虑与时间t有关的质点运动问题时，便用到质点的位置（x,y,z）和时间t等四个数. 又如，当研究导弹在空中飞行状态时，就需要用下列七个数来刻划：导弹的质量m；导弹在空中的位置（x,y,z）以及它的速度向量$\vec{v}$的三个坐标（v_x，v_y，v_z）等七个数.

一般地有下面的定义.

定义5·1 设有n个实数a_1，a_2，…，a_n，则称有序数组(a_1，$a_2,\cdots,a_n$）为n维向量. 记作

$$\vec{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

其中a_i（$i=1,2,\cdots,n$）叫做n维向量$\vec{\alpha}$的第i个坐标.

若$a_i=0$（$i=1,2,\cdots,n$），则向量（$0,0,\cdots,0$）叫做n维零向量，记作$\vec{0}$（或$\vec{0}$），即

$$\vec{0}=(0,0,\cdots,0)$$

例4 n元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

的任一组解$x_1,x_2,\cdots,x_n$可以看成一个n维向量，称为方程组的解向量. 记为

$$\vec{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

同样，方程组的常数项$b_i(i=1,2,\cdots,n)$亦可视为一个n维向量，记为

$$\vec{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

而方程组的第i个方程的系数及常数项则可视为$n+1$维向量，即