

[美] A.C.阿加雷 著 范钦珊 译

# 板壳应力

中国建筑工业出版社

# 板壳应力

[美] A.C.阿加雷 著  
范钦珊 译

中国建筑工业出版社

本书是专门论述板和壳的内力分析方法的。第一至第九章是板的基本定义与分析,其中包括:板弯曲理论基础,圆板、矩形板和不同几何形状板的各种分析方法,板分析的数值方法,正交异性板,组合荷载下的板,大挠度板和板内热应力问题等。第十至第十三章研究壳体结构,其中包括:壳中的薄膜应力,壳中的弯曲应力,一般荷载作用下的圆柱壳,以及壳体理论应用于管道、贮液罐和压力容器等。各章后都有典型的例题和大量内容广泛的习题。书中还有非常实用的公式和图表。

本书可供土建工程技术人员、科研人员和有关大专院校师生参考。

STRESSES IN  
PLATES AND SHELLS

A. C. Ugural

McGraw-Hill Book Company 1981

\* \* \*

板壳应力

范钦珊 译

\*

中国建筑工业出版社出版(北京西郊百万庄)  
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售  
中国建筑工业出版社印刷厂印刷(北京阜外南礼士路)

\*

开本: 787×1092毫米 1/16 印张: 16 3/4 字数: 406 千字

1986年10月第一版 1986年10月第一次印刷

印数: 1—5,100册 定价: 2.60元

统一书号: 15040·5047

## 序

这本教科书包括了相当于一般高年级大学生和一年级研究生水平、一学期的“板壳分析”课程。如果能提供足够一学年的材料，则有助于形成“高等静力学”与“结构分析”的课程。本书的基础是初等材料力学理论。

作者试图达到两方面的目的：一是补充课堂讲授；二是满足从事板壳结构分析的实际工程师的需要。为此，书中提供了可应用于航空、航天、化学、土木、机械和海洋工程以及工程力学和其它学科课程的材料。

在难于用解析法求解的问题中，重点是可利用计算机的数值方法。读者将认识到，在应用基于计算机的解答时，为了作出严格的解释，牢固掌握基本原理是多么重要。加强数值方法并不意味着否定经典分析方法的优点，而是给经典理论以更加完善的补充。本书力图填补作者认为的教科书领域中的一块空白。

对于板壳理论的基本原理及其在许多结构构件，包括拱顶、压力容器、罐和管子等等上的应用，书中作了简单、全面、系统的阐述。在预测组合荷载下的板壳特性时，应用了失效理论。最重要的是，作者致力于对板、壳和梁的基本方程以及它们的承载方式，给出直观解释。书中对透彻的力学理论分析与数值方法的介绍具有恰当的比例，因为二者对于实际结构的分析都是很重要的。作者还力图为学生进一步学习和专业实践作些准备，向他们提供了这方面必需的理论和应用基础。为此，书中还审慎地引用了数学和物理学在这方面的某些进展。

书中对于解答的物理意义和实际应用同样注重。在应用方面，常用典型的工程实例，以保持其简明性。作者还特别致力于应用各种例题解释重要的原理和应用。书中提供给生练习的习题是各种各样的。全书采用国际单位制(SI)。

确定薄板中面小挠度理论的表达式由两种途径作出。其一是利用“梁的初等理论”中所作的基本假设。其二是基于三维应力的平衡微分方程。前者不要求很高的数学严格性，但要求较好的物理解释，并且同样可用于壳体，因而被认为更能引起工程师们的兴趣。由于能量法在许多实际问题的求解以及在近代计算技术中的重要性，板壳弯曲与屈曲的能量研究也是本书的重点。由于本书的引论性质，书中没有涉及那些要求广泛数学基础的经典问题。

最近关于壳体理论的出版物，包含了对于任意荷载下的任意壳总是有效的解析表达式。这些表达式通常都需要采用张量记号、矢量分析以及曲线坐标系。本书中所引入的理论是上述的一种特殊情形。壳体的基本方程仅化为求解一般工程问题所需要的形式。本书中有限元法用于研究任意形状的变厚度板和任意形式的壳。

本书可分为两部分。第1章至第9章包括板的基本定义与分析。第10章至第13章研究壳体。由于本书是一个有机体，所以，应先学习第1章。其余章节。除了在第12章和第13章之前，应先阅读第10章和第11章外。可按任意顺序阅读。对于两个单个学期的课程，可

以从本书中作多种选择，其章节可按照与“板壳分析”相一致的学习顺序加以编排。

书中提供的完全解出的例题，范围极为广泛；170道左右的习题大都是从工程实际中抽象出来的；书中还提供了板壳理论解的许多公式和图表，这些可用于直接的和实际的设计计算；给出了普通荷载与高温荷载作用下，各向同性材料与复合材料的板壳分析；适用于计算机求解的数值方法；此外，还有应用于日益重要构件的失效理论以及由之导出的准则。

作者感谢在本书初稿作为教科书使用时，那些曾经提出过建设性意见的学生们。S. K. Fenster博士审阅了全部初稿并且作了校正，作者对此非常感激。此外，还要感谢B. Lefkowitz，他曾审阅了第7章和第8章；感谢H. Stanek小姐在准备手稿时所做的许多工作。

A. C. 阿加雷

## 符 号 表

- $A$ ——面积, 常数;  
 $a, b$ ——尺寸, 环板的外半径和内半径;  
 $D$ ——弯曲刚度 [ $D = Et^3/12(1-\nu^2)$ ];  
 $[D]$ ——弹性矩阵;  
 $E$ ——弹性模量;  
 $F$ ——作用在壳体单元上总外部荷载;  
 $G$ ——剪切弹性模量;  
 $g$ ——重力加速度 ( $\approx 9.81\text{m/s}^2$ );  
 $h$ ——网格宽度, 数值因子;  
 $k$ ——弹性基础模量, 数值因子, 细长构件压缩时轴向荷载系数;  
 $[k]$ ——有限元刚度矩阵;  
 $[K]$ ——结构的总体刚度矩阵;  
 $m, n$ ——整数, 数值因子;  
 $M$ ——单位长度上的力矩, 力矩和 [ $M = (M_x + M_y)/(1+\nu)$ ];  
 $M^*$ ——单位长度上的热力矩和;  
 $M_x, M_y$ —— $x$  和  $y$  平面上单位长度上的弯矩;  
 $M_{xy}$ —— $x$  平面上单位长度上的扭矩;  
 $M_r, M_\theta$ ——单位长度上径向和切向弯矩;  
 $M_{r\theta}$ ——径向平面上单位长度的扭矩;  
 $M_\phi$ ——平行圆平面上单位长度子午线方向的弯矩;  
 $M_s$ ——锥形壳平行圆平面上单位长度子午线方向的弯矩;  
 $M_{x\theta}$ ——圆柱壳轴向平面上单位长度的扭矩;  
 $N$ ——单位长度轴向力;  
 $N_{cr}$ ——单位长度的临界压力荷载;  
 $N^*$ ——由于温度引起的单位长度合力;  
 $N_x, N_y$ —— $x$  和  $y$  平面上单位长度法向力;  
 $N_{xy}$ —— $x$  平面上平行于  $y$  轴的单位长度剪力;  
 $N_r, N_\theta$ ——单位长度径向力和切向力;  
 $N_\phi$ ——平行圆平面上单位长度子午线方向的力;  
 $N_{\phi\theta}$ ——平行圆平面上垂直于子午线平面的单位长度剪力;  
 $N_{x\theta}$ ——圆柱壳轴向平面上平行于  $y$  轴的单位长度剪力;  
 $N_s$ ——锥壳平行圆平面上单位长度法向力;  
 $p$ ——单位面积上横向分布荷载集度, 压力;

## VI 符号表

- $p^*$ ——单位面积上当量横向荷载；  
 $P$ ——集中力；  
 $Q_x, Q_y$ —— $x$ 和 $y$ 平面上单位长度剪力；  
 $\{Q\}$ ——有限元的节点力矩阵；  
 $Q_r, Q_\theta$ ——单位长度径向力和切向力；  
 $Q_\theta$ ——垂直于圆柱壳轴线的平面上单位长度剪力；  
 $Q_\varphi$ ——平行圆平面上单位长度子午线剪力；  
 $R$ ——反力；  
 $r$ ——半径；  
 $r, \theta$ ——极坐标；  
 $r_x, r_y$ ——中面在 $xz$ 和 $yz$ 平面内的曲率半径；  
 $r_1, r_2$ ——中面在子午线平面和平行圆平面内的曲率半径，曲率半径法则；  
 $T$ ——单位面积上的面力，温度；  
 $t$ ——厚度；  
 $s$ ——锥壳上沿母线度量的距离；  
 $u, v, w$ —— $x, y, z$ 方向的位移，壳体中面上的点沿轴向、切向和径向位移；  
 $U$ ——应变能；  
 $V_x, V_y$ —— $x$ 和 $y$ 平面上单位长度有效剪力；  
 $V_r, V_\theta$ ——单位长度有效径向和切向剪力；  
 $W$ ——功，重量；  
 $x, y, z$ ——距离，直角坐标；  
 $\alpha$ ——角度，热膨胀系数，数值系数；  
 $\beta$ ——角度，圆筒的几何参数 $[\beta^1 = 3(1 - \nu^2)/a^2 t^2]$ ，数值系数；  
 $\gamma$ ——剪应变，单位体积的重量或自重；  
 $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ —— $xy, yz$ 和 $zx$ 平面内的剪应变；  
 $\gamma_{r\theta}$ —— $r\theta$ 平面内的剪应变；  
 $\delta$ ——挠度，有限差分算子，数值系数，变分记号；  
 $\{\delta\}$ ——有限元节点位移矩阵；  
 $\varepsilon$ ——正应变；  
 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ —— $x, y, z$ 方向的正应变；  
 $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ ——径向和切向正应变；  
 $\varepsilon_\phi, \varepsilon_\varphi$ ——平行圆正应变，子午线正应变；  
 $\theta$ ——角度，节点角位移；  
 $K$ ——曲率；  
 $\nu$ ——波桑比；  
 $\Pi$ ——位能；  
 $\sigma$ ——正应力；  
 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ —— $x, y, z$ 平面上的正应力；  
 $\sigma_r, \sigma_\theta$ ——径向和切向正应力；

- $\sigma_\phi$ ——平行圆平面上子午线方向正应力；  
 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ——主应力；  
 $\sigma_{cr}$ ——临界荷载下的压缩应力；  
 $\sigma_u$ ——强度极限；  
 $\sigma_{yp}$ ——屈服极限；  
 $\tau$ ——剪应力；  
 $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ —— $x, y, z$ 平面上平行于 $y, z, x$ 方向的剪应力；  
 $\tau_{r\theta}$ ——径向平面上平行于切向平面的剪应力；  
 $\tau_u$ ——剪切强度极限；  
 $\tau_{yp}$ ——剪切屈服极限；  
 $\phi$ ——角度，应力函数，数值系数；  
 $\kappa$ ——壳中的曲率变化。



# 目 录

序

符号表

<b>第一章 板弯曲理论基础</b> .....	1
1.1 引言 .....	1
1.2 板的一般性态 .....	2
1.3 应变-曲率关系 .....	3
1.4 应力与应力合力 .....	4
1.5 板内的应力变化 .....	8
1.6 板的挠度基本方程 .....	9
1.7 边界条件 .....	10
1.8 求解板挠度的方法 .....	12
1.9 应变能法 .....	15
1.10 材料的性态与机械性能 .....	17
习题 .....	19
<b>第二章 圆 板</b> .....	21
2.1 引言 .....	21
2.2 极坐标中的基本关系 .....	21
2.3 轴对称弯曲 .....	24
2.4 均匀加载的圆板 .....	25
2.5 剪力对板挠度的影响 .....	28
2.6 中心作用有集中荷载的圆板 .....	29
2.7 外边简支的环板 .....	31
2.8 叠加法求挠度和应力 .....	32
2.9 里兹 (Ritz) 法应用于弹性基础上的圆板 .....	34
2.10 圆板的非对称弯曲 .....	35
2.11 用互等定理求挠度 .....	36
2.12 非均匀荷载作用下的变厚度圆板 .....	37
习题 .....	43
<b>第三章 矩 形 板</b> .....	46
3.1 引言 .....	46
3.2 简支矩形板的纳维埃 (Navier) 解 .....	46
3.3 各种荷载作用下的简支矩形板 .....	48
3.4 矩形板的勒夫 (Lévy) 解 .....	52
3.5 勒夫方法应用于非均匀加载的矩形板 .....	58
3.6 边缘分布力矩作用下的矩形板 .....	60
3.7 叠加法应用于解矩形板的弯曲 .....	61
3.8 条带方法 .....	63

3.9	简支连续矩形板	66
3.10	中间柱支承的矩形板	68
3.11	弹性基础上的矩形板	70
3.12	里兹 (Ritz) 法应用于矩形板的弯曲	71
	习题	74
<b>第四章</b>	<b>不同几何形状的板</b>	<b>77</b>
4.1	引言	77
4.2	映射方法	77
4.3	简支等边三角形板	78
4.4	椭圆板	80
4.5	板内孔边的应力集中	81
	习题	83
<b>第五章</b>	<b>板弯曲问题中的数值方法</b>	<b>85</b>
5.1	引言	85
5.2	有限差分	85
5.3	有限差分方程的解	88
5.4	具有曲边边界的板	96
5.5	极坐标网格	99
5.6	三角形网格	99
5.7	有限元性态	101
5.8	有限元方法概述	103
5.9	三角形有限元	104
5.10	矩形有限元	107
	习题	111
<b>第六章</b>	<b>正交异性板</b>	<b>113</b>
6.1	引言	113
6.2	基本关系式	113
6.3	刚度的确定	114
6.4	矩形正交异性板	116
6.5	椭圆与圆形正交异性板	118
6.6	多层板	119
6.7	有限元解	121
	习题	122
<b>第七章</b>	<b>横向荷载与直接荷载共同作用下的板</b>	<b>124</b>
7.1	引言	124
7.2	挠曲面的基本方程	124
7.3	板的压缩、屈曲	127
7.4	能量法的应用	128
7.5	有限差分解	132
7.6	具有微小初曲率的板	134
7.7	弯曲成圆柱面的板	136
	习题	139

<b>第八章 板的大挠度问题</b> .....	141
8.1 引言 .....	141
8.2 大挠度板的性态 .....	141
8.3 小挠度与大挠度理论的比较 .....	142
8.4 大挠度基本方程 .....	143
8.5 里兹法求挠度 .....	145
8.6 有限元解 .....	146
习题 .....	149
<b>第九章 板内热应力</b> .....	150
9.1 引言 .....	150
9.2 应力、应变与位移关系 .....	150
9.3 应力合力 .....	151
9.4 基本微分方程 .....	152
9.5 任意温度分布下的简支矩形板 .....	153
9.6 温度分布沿板厚方向变化时的简支矩形板 .....	154
9.7 热板与等温板问题的类比 .....	154
9.8 轴对称加热的圆板 .....	156
习题 .....	159
<b>第十章 壳中的薄膜应力</b> .....	160
10.1 壳体的基本性态与一般原理 .....	160
10.2 壳体的承载能力 .....	161
10.3 旋转壳体的几何学 .....	162
10.4 对称加载的旋转壳 .....	163
10.5 旋转壳的某些典型情形 .....	165
10.6 轴对称变形 .....	172
10.7 非对称加载的旋转壳 .....	173
10.8 风载作用下的旋转壳 .....	175
10.9 一般形状的柱形壳 .....	176
10.10 壳体的弹性失效 .....	179
习题 .....	181
<b>第十一章 壳中的弯曲应力</b> .....	184
11.1 引言 .....	184
11.2 壳体应力合力 .....	184
11.3 力、力矩与位移关系 .....	185
11.4 壳中的组合应力 .....	187
11.5 承受弯曲与张拉时壳中的应变能 .....	187
11.6 轴对称加载的圆柱壳 .....	188
11.7 轴对称加载圆柱壳的一种特殊情形 .....	190
11.8 轴对称荷载作用下的旋转壳 .....	194
11.9 轴对称位移的基本方程 .....	196
11.10 弯曲应力与薄膜应力的比较 .....	197
11.11 一般形状旋转壳的有限元表示 .....	198

11.12 轴对称加载壳的有限元解	199
习题	201
<b>第十二章 壳体理论应用于管道、贮液罐和压力容器</b>	<b>202</b>
12.1 引言	202
12.2 承受边缘力与边缘力矩的管子	202
12.3 加固圆筒	205
12.4 圆柱形贮液罐	207
12.5 圆筒中的热应力	209
12.6 复合圆筒中的热应力	211
12.7 压力容器中的不连续应力	213
12.8 具有半球形封头的圆柱形容器	214
12.9 具有椭球形封头的圆柱形容器	215
12.10 具有平板封头的圆柱形容器	216
12.11 常规压力容器设计公式	217
习题	218
<b>第十三章 一般荷载作用下的圆柱壳</b>	<b>220</b>
13.1 引言	220
13.2 平衡微分方程	220
13.3 运动学关系	221
13.4 挠度基本微分方程	223
13.5 非对称加载的典型情形	224
13.6 非张拉变形	227
13.7 均匀轴向压力作用下的对称屈曲	230
13.8 均匀轴向压缩时的非对称屈曲	232
习题	234
附 录	235
A 福里哀级数展开式	235
A.1 单个福里哀级数	235
A.2 半幅展开式	236
A.3 双重福里哀级数	238
B 线性联立方程组的解	239
B.1 引言	239
B.2 高斯消元法	240
参考书目	243
部分习题答案	244
英汉名词对照	247

# 第一章 板弯曲理论基础

## 1.1 引言

板和壳是初始形状分别为平板和曲面的结构构件，它们的厚度都远小于其它方向尺寸。关于板和壳有很多很熟悉的例子，如桌面、街道路面供检修用的人孔盖、建筑物的侧墙和屋顶、汽轮机叶轮、挡土墙以及罐底等。许多工程实际问题都属于“弯曲板”或“弯曲壳”范畴。本书的第一章至第九章讨论板的问题。

一般用平行于板表面的平面，将其厚度  $t$  分为相等的两部分，这一平面称为板的“中面”。板的厚度沿垂直于中面方向度量。与其它尺寸相比，厚度是影响板弯曲性能的主要尺寸。

板可以分为三大类：小挠度薄板，大挠度薄板和厚板。

根据用以定义薄板的标准（为了实际计算），其厚度与较小跨度之比应小于  $1/20$ 。除第八章外，本书将只讨论薄板的小挠度理论，其中所作的简化与通常所见的板状构件变形大小相符合，但是，为清晰起见，某些图形中所示之板的挠度和厚度都被大大地放大了。除非另有说明，否则板和壳体的材料均为均匀和各向同性。“均匀”是指各处材料都表现出相同的性能。当所有方向的性能都相同时，材料被称为“各向同性”。

我们所关心的是外力或力矩与应变、应力和位移之间的关系。作用在平板上的外力可以是“面力”和“体力”。当面力作用于一点时即为集中力。面力也可以是在一个有限面积上任意分布的。体力作用在板的体积微元上。体力可以由重力场或磁场所引起，在运动的情形下，则由于板的惯性所引起。

为了确定由于承受一组给定力，在板内所产生的应力和位移分布，需要考察一些基本条件。这些都与确定的物理定律、材料性能、几何学以及面力有关。本章从数学上所阐述的这些条件，将在下面几章中用以解决板的弯曲问题。当由于板的形状或荷载状况，不可能找到理论解，或者需要对理论解加以验证时，采用实验的方法，通常是有益的。这时，近似的数值方法和能量方法（分别见于第五章和1.9节）也是有效的。对于非均匀加热的情形以及各向正交异性板，分别在第九章和第六章，重新建立了某些基本关系和所需要的基本方程。

最早有关板的重要论述是在十九世纪作出的。从那时起，关于板弯曲的基础理论（主要由Navier, Kirchhoff和Lévy作出的）和数值方法（由Galerkin和Wahl及其他人作出），已经在许多方面作出了大量工作。关于板和壳的文献和著作是很广泛的。本书最后所给出的是一些经过选择的参考文献。

决定板的形状和选择使用材料，对承受特定计算条件下作为“设计函数”给定的力系，是最有效的。彻底了解材料的性能并对预期使用条件下最可能出现的“破坏模型”进

行计算, 是确定其承载能力的根本(1.10节)。板壳的合理设计很大程度上是依据它的应力和变形的分析得出的, 这是本书要直接研讨的问题。

## 1.2 板的一般性态

考察图1.1a中所示之未承受荷载的板, 其中 $xy$ 平面与中面一致, 因此, $z$ 方向无挠曲。若用 $u$ 、 $v$ 、 $w$ 分别表示一点沿 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 方向所产生的位移, 则由于横向荷载而引起板发生变形时, 其中面上任意点 $(x_a, y_a)$ 便具有挠度 $w$ (图1.1b)。

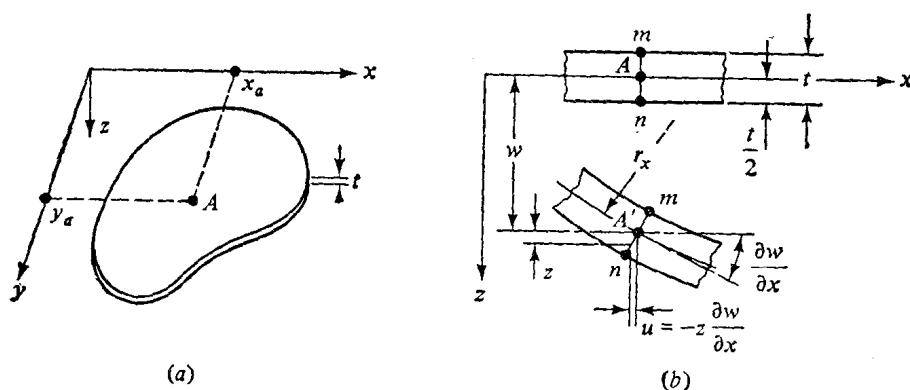


图 1.1

均匀、各向同性、弹性薄板建立在变形几何学基础上的小挠度弯曲理论或所谓经典理论的基本假定, 可表述如下:

- (1) 中面挠度与板厚度相比为小量。因而挠曲面的斜度非常小, 并且斜度的平方与 1 相比可以忽略。
- (2) 弯曲后的中面保持无应变。
- (3) 垂直中面的初始平截面, 在中面弯曲后保持为平面并与中面垂直。这表明剪应变 $\gamma_{xz}$ 和 $\gamma_{yz}$ 可以忽略。因此, 板的挠度主要与弯曲应变有关。可以推知, 由横向荷载引起的法向应变 $\epsilon_z$ 也是可以忽略的。
- (4) 垂直于中面的应力 $\sigma_z$ 与其它应力分量相比很小, 因而可以忽略不计。

上述假定不适用于横向荷载高度集中的附近区域。

上述假定通常称为“Kirchhoff假定”, 它与简单梁的弯曲理论中有关的假定是相似的。在绝大多数工程应用中, 都可以找到足够的证据以证明上述关于应力和变形的那些简化是合理的。由于上述简化, 使板的三维问题简化为二维问题, 从而降低了问题的复杂程度。因此, 平板的基本方程可以用简明的方式导出。

当板的挠度不小时, 板的弯曲与中面应变有关, 因此, 上述假定中的(1)和(2)不再适用。但是, 作为例外, 当板弯曲成“可展开曲面”(例如锥面和圆柱面)时, 上述假定还是可用的(见8.2节)。这种类型的曲面可以弯回到一个平面, 而表面上两点之间的距离不发生变化。如果板边自由或简支, 承载时板中面具有可展开形状, 即使当挠度等于或大于板的厚度, 但与板其它方向尺寸相比仍然很小时, 中面也还保持无应变状态。只有在这样的对于挠度的限制范围内, 斜度的平方与 1 相比仍是小量, 因而采用曲率的近似

表达式(1.3节), 具有足够的精确度。

在厚板中, 与短梁和深梁相似, 剪应力是重要的。这样的板, 由于假定中的(3)和(4)不再适用, 因而需要采用更一般的理论加以分析。

### 1.3 应变-曲率关系

为了深入理解板的弯曲问题, 现考察变形几何学。作为上一节中假定之(3)的结果, 应变-位移关系[1]简化为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_z &= 0, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.1a-f)$$

其中 $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$  ( $i, j = x, y, z$ )。注意到这些表达式也可以认为是运动学关系式, 只研究几何学而不管问题的原因和效果。

积分方程(1.1d), 得到

$$w = w(x, y) \quad (a)$$

这表明板的横向挠度不沿着板的厚度方向变化。用类似的方法, 由 $\gamma_{xz}$ 和 $\gamma_{yz}$ 表达式的积分给出

$$\left. \begin{aligned} u &= -z \frac{\partial w}{\partial x} + u_0(x, y), \\ v &= -z \frac{\partial w}{\partial y} + v_0(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

显然,  $u_0(x, y)$ 、 $v_0(x, y)$ 分别表明中面上的 $u$ 和 $v$ 值。根据1.2节中的假定之(2), 可以得出 $u_0 = v_0 = 0$ 的结论。于是有

$$\left. \begin{aligned} u &= -z \frac{\partial w}{\partial x}, \\ v &= -z \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

上述关于 $u$ 的表达式表示图1.1b中过任意点 $A(x_0, y_0)$ 的截面 $mn$ 上点的位移。类似的解释也可用于 $zy$ 平面内的 $v$ 。可以看出, 方程(1.2)与假定之(3)是一致的。

将方程(1.2)代入方程(1.1)的前三个方程, 得到

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \gamma_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (1.3a)$$

这些公式给出了平板内任意一点的应变。

平面曲线的曲率定义为曲线的倾角沿曲线长度方向的变化率。根据1.2节中的假定之

(1), 斜度的平方被认为是可以忽略的, 因此, 方程(1.3a)中的偏微分便代表平板的曲率。所以, 中面在平行于 $xz$ 、 $yz$ 和 $xy$ 平面内(图1.1b)的曲率 $n$ 分别为

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \kappa_x, \\ \frac{1}{r_y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \kappa_y, \\ \frac{1}{r_{xy}} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \kappa_{xy}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

其中 $\kappa_{xy} = \kappa_{yx}$ 。显然, 方程(1.4)描述了整个板的斜度变化率。最后的一个表达式, 也可以认为是中面对于 $x$ 和 $y$ 轴的扭曲率。板单元的局部扭曲示于图1.2中。

通过方程(1.3a)和(1.4), 应变-曲率关系可以表示成如下形式:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= -z\kappa_x, \\ \epsilon_y &= -z\kappa_y, \\ \gamma_{xy} &= -2z\kappa_{xy}. \end{aligned} \quad (1.3b)$$

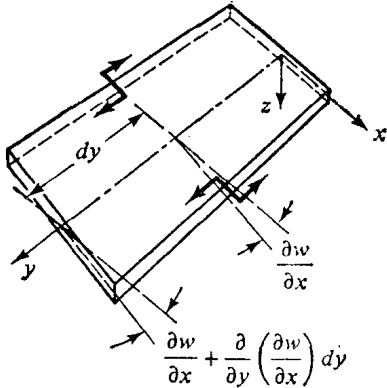


图 1.2

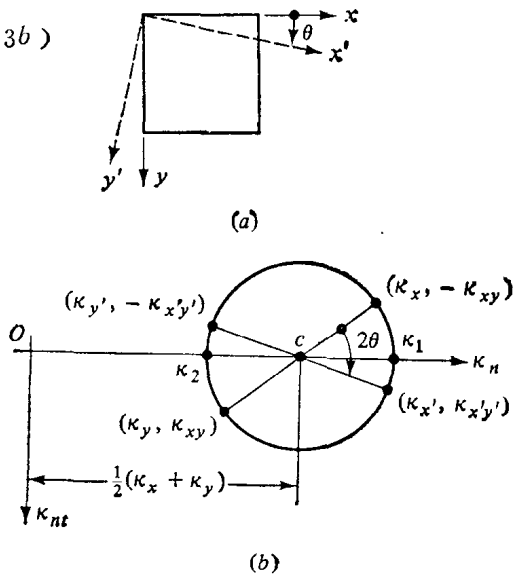


图 1.3

对于方程(1.3)的研究表明, 可以类似于“莫尔应变圆”作出“曲率圆”。所以, 曲率可以以应变变换的方式变换。图1.3表示一个平板单元和一个曲率圆, 其中 $n$ 和 $t$ 为过中面上一点的互相垂直的方向。主曲率, 或最大与最小主曲率, 用 $\kappa_1$ 和 $\kappa_2$ 表示。具有这种曲率的平面称为曲率的主平面。面的曲率和扭曲率随 $\theta$ 角而变化,  $\theta$ 角自 $xy$ 坐标系顺时针方向转到 $x'y'$ 坐标系加以度量。显然, 当两个主曲率相等时, 曲率圆便收缩到一点。这意味着在所有方向上曲率都相同; 亦即在任意方向都没有扭曲。曲面在那一点为纯球形的。根据圆方程和方程(1.4), 有(见习题1.1)

$$\kappa_x + \kappa_y = \kappa_{x'} + \kappa_{y'} \quad (1.5)$$

一点的两个垂直方向的曲率之和称为“平均曲率”, 当坐标轴转动时, 它是一个“不变量”。这一结论对于中面上任意点都是有效的。

### 1.4 应力与应力合力

在三维应力状态下, 应力和应变之间的关系, 由适用于均匀、各向同性材料的广义虎



克定律给出

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}. \end{aligned}$$

其中  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$  ( $i, j = x, y, z$ )。常数  $E$ 、 $\nu$  和  $G$  分别为杨氏弹性模量、波桑比和剪切弹性模量。联系三者的关系式为

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.6)$$

应力的双重下标记号解释如下：第一个下标表示平面或应力分量作用面的法线方向；第二个下标则与应力方向相关。本书中略去了重复的下标。即正应力  $\sigma_{xx}$ 、 $\sigma_{yy}$  和  $\sigma_{zz}$  用  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$  和  $\sigma_z$  表示（图 1.4a）。面、平面、表面，通常用垂直于它的轴作标志，例如  $x$  面垂直于  $x$  轴。

应力的正负号规则，由确定面的“外法线”方向与作用在这一面上的应力分量方向之间的关系所决定。如果外法线和应力分量二者相对于坐标轴都是正方向（或负方向），则应力为正。如果外法线指向正方向，而应力指向负方向（或者反之），则应力为负。据此，图 1.4a 中所示之全部应力分量均为正。

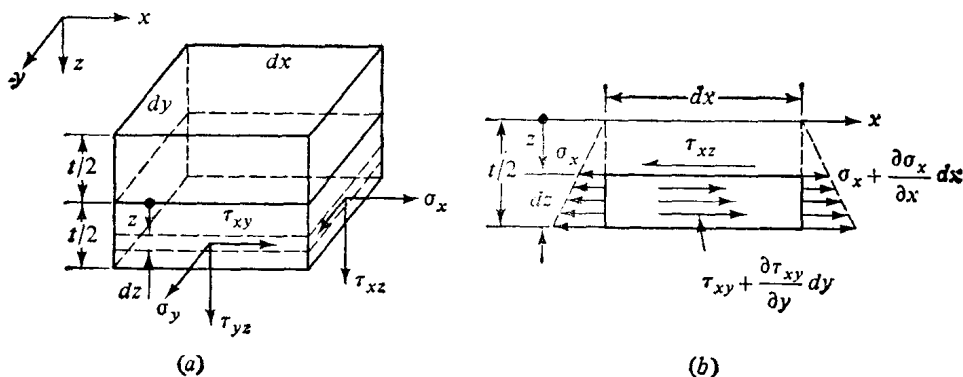


图 1.4

将  $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$  代入方程 (a)，将产生下列有关薄板的应力关系式：

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x), \end{aligned} \quad (1.7)$$