《数学·我们·数学》丛书

数学与哲学

SHU XUE YU ZHE XUE

张景中 著

要目

- 万物皆数吗?
- 一次次的数学危机
- 数是什么?
- 数与量
- 哲学·数学·随想

《数学·我们·数学》丛书

数学与哲学

张景中 著

湖南教育出版社

数学与哲学

shuxue yu zhexue

张景中　著

责任编辑：孟实华

湖南教育出版社出版发行（长沙展览馆路3号）

湖南省新华书店经销　湖南省新华印刷二厂印刷

850×1168毫米　32开　印张：5　字数：120,000

1990年1月第1版　1990年1月第1次印刷

印数：1——1,000

ISBN 7—5355—1053—1/G·1034

定价：3.40元

我們讚賞數學

我們需要數學

一九八八年十月書祝

"數學·我們·數學"

成功

陳省身

写在前面

丁石孙 （北京大学）

最近钱学森同志在一封信中提出了一个观点，他认为数学应该与自然科学和社会科学并列，他建议称为数学科学。当然，这里问题并不在于是用“数学”还是用“数学科学”，他认为在人类整个知识系统中，数学不应被看成是自然科学的一个分支，而应提高到与自然科学和社会科学同等重要的地位。

我基本上同意钱学森同志的这个意见。数学不仅在自然科学的各个分支中有用，同时在社会科学的很多分支中也有用。近期随着科学的飞速发展，不仅数学的应用范围日益广范，同时数学在有些学科中的作用也愈来愈深刻。事实上，数学的重要性不只在于它与科学的各个分支有着广泛而密切的联系，而且数学自身的发展水平也在影响着人们的思维方式，影响着人文科学的进步。总之，数学作为一门科学有其特殊的重要性。为了使更多人能认识到这一点，我们决定编辑出版《数学·我们·数学》这套小丛书。与数学有联系的学科非常多，有些是传统的，即那些长期以来被人们公认与数学分不开的学科，如力学、物理以及天文等。化学虽然在历史上用数学不多，不过它离不开数学大家是看到的。对这些学科，我们的丛书不打算多讲。

我们选择的题目较多的是那些与数学的关系虽然密切，但又不大被大家注意的学科，或者是那些直到近些年才与数学发生较为密切关系的学科。我们这套丛书并不想写成学术性的专著，而是力图让更大范围的读者能够读懂，并且能够从中得到新的启发。换句话说，我们希望每本书的论述是通俗的，但思想又是深刻的。这是我们的目的。

我们清楚地知道，我们追求的目标不容易达到。应该承认，我们很难做到每一本书都写得很好，更难保证书中的每个论点都是正确的。不过，我们在努力。我们恳切希望广大读者在读过我们的书后能给我们提出批评意见，甚至就某些问题展开辩论。我们相信，通过讨论与辩论，问题会变得愈来愈清楚，认识也会愈来愈明确。

1989年4月

于北京大学

作者简介

张景中，男，1936年生，河南汝南县人。数学研究员。1959年毕业于北京大学数学力学系，曾在中国科技大学任教，现为中国科学院成都分院研究员。

专业是数学，专长为微分动力系统、距离几何、数值分析、数学教育。长期从事数学与研究工作，发表学术论文和科普文章共120余篇，著有《从数学教育到教育数学》等学术著作和科普著作多本，其中《数学传奇》获1987年全国科普作品三等奖。还曾在1982年获得国家发明二等奖。培养硕士研究生16人。

目 录

一

“万物皆数”观点的破灭与再生

——第一次数学危机与实数理论

古代的哲学家们往往是博学多才的人。他们不但能滔滔不绝地讲他们的哲学道理，也能讲自然科学、社会科学，特别是数学。你不要以为这是因为古人特别聪明，或是后来哲学家们退化了。那时，各门科学还没有分家，哲学是包罗万象的知识部门。而且那时人类的知识比现在贫乏得多。所谓博学，是相对于当时多数人知识贫乏而言的。实际上，古代所谓精通数学的哲学家，他的数学知识未必赶得上今天的一般中学生。

在古希腊，哲学家大都格外重视数学。最早的唯物主义哲学家泰勒斯，提出了原子唯物论的德谟克里特，最早的唯心主义哲学家毕达哥拉斯，都曾到埃及学习几何知识。创立理念论唯心主义体系的柏拉图，也特别推崇数学知识。在这些人当中，最强调数学的，在数学上成就最大的，当推毕达哥拉斯。

◁ 毕达哥拉斯学派的信条 ▷

——万物皆数

毕达哥拉斯曾游历埃及、波斯学习几何、语言和宗教知识。回意大利后在一个名叫克罗顿的沿海城市定居。他招收了三百门徒，建立了一个带有神秘色彩的团体，被称为毕达哥拉斯学派。

毕达哥拉斯被他的门徒们奉为圣贤。凡是该学派的发明、创见，一律归功于毕达哥拉斯。这个学派传授知识，研究数学，还很重视音乐。“数”与“和谐”，是他们的主要哲学思想。

他们沉醉于数学知识带给他们的快慰，产生了一种幻觉：数是万物的本原。数产生万物，数的规律统治万物。

他们认为：1是最神圣的数字。1生2，2生诸数，数生点，点生线，线生面，面生体，体生万物。首先生出水、火、气、土四大元素，四大元素又转化出天、地、人及万事万物。

现在看来，“万物皆数”的说法当然是荒唐可笑的。但是，毕达哥拉斯在古代哲学中最早指出事物间数量关系所起的重要作用，这在人类认识史上是一个进步。

与此类似，中国古代有“一生二、二生三、三生万物”的说法。这也是万物皆数的哲学思想。但不象毕达哥拉斯那么认真，那么明确，那么系统。

有趣的是，正是毕达哥拉斯自己的发现，导至“万物皆数”观点的破灭。

◁ 第一个无理数 ▷

毕达哥拉斯在欧洲是第一个发现了勾股定理并给出了证明的人。据说，他是观察地板上的方形图案时，发现直角三角形斜边上正方形的面积恰好是两条直角边上正方形面积之和，于是受到启发，进一步找出了一般证明的。(图1)

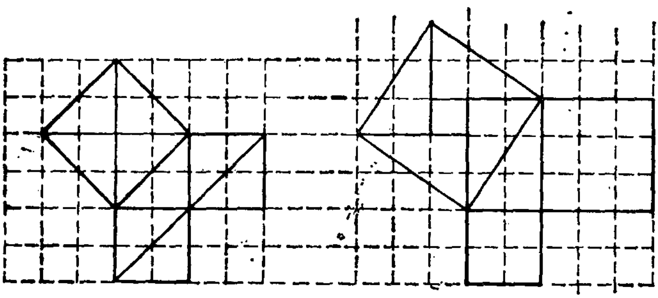

图1

根据勾股定理，边长为 1 的正方形，其对角线的长度应当是 $\sqrt{2}$。毕达哥拉斯(也许是他的门徒)发现，$\sqrt{2}$ 既不是自然数，也不是分数。因为，如果有两个自然数m和n使

$$\sqrt{2}=\frac{n}{m},\left(\frac{n}{m}\text{既约}\right) \tag{1.1}$$

则两端平方以后便可得

$$2m^2=n^2. \tag{1.2}$$

从(1.2)可见n是偶数，因为 $\frac{n}{m}$ 既约，所以m是奇数。于是(1.2)左端不能被4整除，右端可以被4整除。这是个矛盾。

这个事实的发现，是毕达哥拉斯学派的一大成就。因为它不能从经验与观察得出，只能靠抽象的思考证明。它标志着人类的

思维有了更高的抽象能力。

关于勾股定理，在中国、巴比伦，有数学家比毕达哥拉斯知道得早得多。但东方数学家始终没有发现$\sqrt{2}$不能表为分数这一矛盾。这也许与东方数学仅着重于解决实际问题，忽视抽象思维有关。这一现象颇有趣。也许数学史与哲学史的研究者能从社会、政治、文化的角度作更好的说明。

但这一发现引起了毕达哥拉斯学派的惶恐不安。因为他们心目中的数只有自然数与自然数之比——分数。万物皆数，就是万物皆可用自然数或分数表示。如今发现边长为1的正方形的对角线这个明明白白地摆在那里的东西竟不能用“数”表示，岂不证明自己学派的信条不是真理吗？

毕达哥拉斯学派千方百计封锁，不让这一发现传出去。甚至把泄露了这一秘密的一位青年门徒抛入大海（另一说法是这一门徒发现了$\sqrt{2}$，因而对“万物皆数”有异议，被抛入海），但这个发现最后终于被传播开来。

当时研究数学的希腊学者们，虽然不一定赞同“万物皆数”的观点，但却仍认为在数学当中，算术比几何更基本，更重要。现在知道了有些几何线段不能用数表示，便对数的重要性有了怀疑，转而把几何看成更基本的数学了。于是，几何学的研究便繁荣昌盛起来。直到非欧几何被发现，几何在数学中的基础地位才又让位于算术。

◁ 无理数之谜 ▷

本来，哲学家们认为世界上的量都可以用数表示。因为分数可以描述极小极小的量。在一根长度为1的线上，中点可以用$\frac{1}{2}$

表示，把线分成3段，分点可以用$\frac{1}{3}$和$\frac{2}{3}$表示，分成5段，分点可用$\frac{1}{5}$、$\frac{2}{5}$、$\frac{3}{5}$、$\frac{4}{5}$表示。这样，用分数可以表示的点是密密麻麻的。任何两个分数，无论多么近，它们之间还有无穷多个分数。这么多的数，居然还不能表示出线段上某些点的长度，这一事实当时的哲学家感到难以理解。数的万能的力量被否定了。这便是所谓第一次数学危机。

还有，边长为1的正方形的对角线的长度是什么呢？是$\sqrt{2}$。$\sqrt{2}$又是什么呢？它是不是数？不是数，它为什么能表示确定的几何量？是数，为什么求不出它的准确值？在这个问题上，欧洲哲学家与数学家在两千多年中一直陷在迷雾之中。数学家们一方面为了解题不得不使用根式，另一方面又说不清带根号而得不出准确值的东西是不是数。直到17世纪，还有一些数学家坚决不承认无理数是数。

无理数之谜与连续性的概念密切相关。

◁ 连续性的奥秘 ▷

世界上有些平平常常的事，仔细想想又有点怪。比如说，两个朋友几天不见了，偶然在街上碰见，彼此马上就能认出来，打招呼。能认出来，似乎是当然的事。但细追究起来，这又很怪。几天之内，两人的模样变了没有呢？当然变了。要是几天之内不变，那几年、几十年也不会变，人怎么能由小到大，到老呢。既然变了，又为什么能认出来呢？只能说，变化很小。变化小到什么程度呢？时间越短，变得越小。如果你盯着一个婴儿不停地看，你简直不可能说他在变。但几年之后，他确实明显变大了。这变

化是逐渐地，不间断地。

世界上的事物在不停地变化。但我们仍能知道甲是甲，乙是乙，这就是因为事物的变化大多是一点一点改变的，通常不会一下子突然变个样。这就给我们一个感觉：许多变化是连续的。

事物变化的连续性是我们的感觉。感觉不一定准确。电影实际上是由许多不同的画面构成的，它不是连续变化的。但因为相继的两个画面相差甚微，我们便以为它是连续的了。我们的直觉告诉我们，世界上许多事物的变化是真正连续的，不是象电影那样由微小的跃变所组成的。测量技术永远不可能证实这种直觉。事实上，如果物质由分子、原子组成，事物的成长是不可能连续进行的。但这仍不妨碍我们形成“连续”的概念。我们可以想：时间的变化是连续的。运动是连续的。一个点从一条线段的这一端达到另一端，它应当经过线段上的一切点！

经过一切点又是什么意思呢？设线段长度是1，我们来考察运动的点与出发点的距离。在运动中，这个距离从0渐渐地变为1。它经过线段上的一切点，就是这个距离的数值取遍0到1之间的一切数。

那么，0到1之间的一切数又是哪些数呢？当初，人们还不知道$\sqrt{2}$这种无理数，这一切数就指的是比0大比1小的分数。有了无理数，就麻烦了。在0与1之间有无穷多无理数，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{3}$，$\frac{\sqrt{3}}{4}$，……，要多少有多少。是不是把这些带根号的怪物添上就够了呢？很难说。说不定什么时候又发现了新的无理数。

连续性的问题是自古以来哲学家们都谈论过的问题，它与无穷问题密切相关。因为连续变化必然经过无穷个不同的阶段。毕达哥拉斯，芝诺，亚里斯多德，莱布尼兹……都讨论过连续性。但如何建立“连续性”概念，却始终是哲学家面前的难题。

这困难不可能在哲学中解决。因为它已转化为数学上的困难：

在0与1之间，除了有理数之外究竟还有哪些数？更进一步："全体实数"是哪些东西？

在哲学上对连续性的看法是说不清楚的。对于数学家与物理学家，在弄清实数是什么之前，也总是说不清的。例如：

亚里士多德认为：当两个互相接触的物体各自的端点成为两者的共同端点时，就会出现连续的联接。他不承认连续直线由无穷多点组成的说法。

伽里略反对亚里士多德的看法，认为连续的东西可以由无限个元素组成，好比一种可以研成极细粉末的固体。

莱布尼兹提出"连续性定律"，认为世界上的一切都是连续变化的。他和牛顿大体上有相同的看法：数学上的连续性是用无穷小量来定义的一个理想概念。这个无穷小量，似乎类似于伽里略的"极细粉末"。

这里有一个困难：一粒粉末有没有体积？如果体积是0，加起来岂不还是0？如果体积不是0，无穷粒粉末加起来体积又怎能有限呢？可能亚里士多德已经看到了这个困难，所以坚决反对直线（或物体）由无穷多个点组成。但是，正如伽里略指出的那样，有穷个不可分的东西组成的东西，又怎能连续变化呢？

◁ 戴德金分割 ▷

直到19世纪末，即两千多年的探索之后，数学上严格的实数理论建立了，连续统的公认概念才出现。

戴德金与康托几乎同时地提出了实数理论。这里是按戴德金的方法陈述的。

设想一条连续的直线，它由无穷多点组成。取定原点和单位尺度，直线上的许多点都可以用分数表示。这是我们已经知道了

的。我们又知道一些不能用分数表示的点，比如$\sqrt{2}$代表的点。我们不知道的是，为了使直线是连续的、天衣无缝的东西，还需要添上些什么。

设想用一把锋利无比的刀，猛地砍向直线，会发生什么情况呢？

这一刀，应当砍在直线的某一点P上。如果不然，砍在空隙里，直线它还能叫天衣无缝吗？于是，如此细的直线被从P处斩为两截。问题是：点P在哪一段上呢？左边，右边？

我们只能说：不在左边，就在右边。（图2）

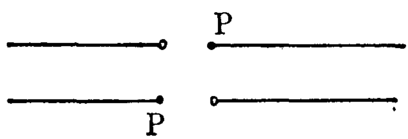

图2

这样一想，直线的连续性就归结为一个直观而简单的事实：不论从什么地方折断，折断的地方总有一个点。

但这会不会成为同语反复呢？"地方"，不就是点吗？

我们可以设法消除这个同语反复的潜在危险，不用点来规定"地方"。

直线上已经有了很多用有理数表示的点。直线一断，就把这些有理点分成较大的和较小的两个集合，两集合之间就确定了一个位置，这就是"折断"了直线之处。

用数学语言说，就是把有理数分成两个集合A、B。如果A中每个数都比B中每个数小，这一对集合$\{A, B\}$就叫做有理数的一个分割。A叫做分割的下集，B叫分割的上集。有理数的分割确定了上下两集之间的位置。

有时这个位置已经被有理数占据了。比如，A是所有的负分数之集，B是其余的有理数，则B中有最小数0，0就是直线折断之

处。因此，要是A有最大数或B有最小数，就说分割$\{A, B\}$确定了一个有理数——即A的最大数或B的最小数。

如果A中没有最大数、B中也没有最小数呢？这是可能发生的。比如，所有那些平方大于2的正有理数（如$\frac{8}{5}$，$\frac{5}{3}$，2，…）组成B集，其余的有理数组成A集。这个分割的下集无最大数，上集也无最小数。它留出了一个空隙，这个空隙就应当请一个无理数填补。这个无理数正是$\sqrt{2}$。

结论有了：有理数的一个分割确定一个实数。这个实数也许是有理数（如果分割不产生空隙），也许是无理数（如果有空隙）。

这种分割叫做“戴德金分割”。说得干脆一点，实数就是有理数的分割。

利用有理数的＋、－、×、÷可以规定分割的四则运算；用有理数的大小可以定义分割的大小。也就是定义了实数的＋、－、×、÷与大小。

回头再想，问题很简单。把有理数之间的缝隙都填上，直线不就连续了吗？问题本身就提供了解答！这么“简单”的答案，世界上一些最善于思考的脑袋里也居然要两千年才产生出来！

科学的发展，重大概念的产生，是举步维艰的。任何一个创造，在实现之前，都是困难的。因为人们是在无知中摸索。摸到之后，就成为简单的了。

实数说清了，一切事物的量变又可以用数刻划了。

◁ 连续归纳原理 ▷

第一次数学危机被克服了。各种各样的彼此实质上等价的实数理论建立起来了。数学家建立了一系列的定理来刻划实数的性