●研究生用书●

NUMERICAL SOLUTION OF PRACTICAL PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

华中理工大学出版社

徐长发

实用偏微分方程数值解法

实用偏微分方程数值解法

徐 长 发

华中理工大学出版社

·研究生用书·

实用偏微分方程数值解法

徐长发

责任编辑　李立鹏

*

华中理工大学出版社出版发行

（武昌喻家山）

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社印刷厂印刷

*

开本：850×1168　1/32　印张：16.125　插页：2　字数：390 000

1990年12月第1版　　1990年12月第1次印刷

印数：1—1 000

ISBN7—5609—0511—0/O·75

定价：3.48元

内 容 简 介

本书共三篇。第一篇讨论了抛物型和双曲型方程的差分方法，介绍了各种实用的差分格式及其稳定性分析。第二篇讨论了椭圆型方程的有限元方法，清晰揭示了基本思想、应用技巧、通用程序设计和基本理论问题。第三篇讨论解代数微分方程的高效率高精度方法。

本书选材新颖，利于实用；内容深入浅出，便于自学；内容丰富，便于选用，或侧重于算法与应用，或算法与分析并重。

本书可作为高等院校理工科各专业高年级学生和研究生的教材，也可供有关科研和工程技术人员参考。

ABSTRACT

This book consists of three parts. The difference method for parabolic and hyperbolic equations is discussed in the first part, where there are many practical schemes, design ideas, and their numerical stability-analyses. The finite element method for elliptic equations is given in the second part, where the fundamental theories and the applied techniques etc. are discussed. The varied new numerical methods for discrete systems are in the third part, where these highly accurate and efficent algorithms and the applied techniques are expounded.

The content of this book is extensive, practical and easy to comprehend.

This book can suit the needs of graduates of science and engineering, and is also useful for engineers and researchers.

“研究生用书”总序

研究生教材建设是提高研究生教学质量的重要环节，是具有战略性的基本建设。各门课程必须有高质量的教材，才能使学生通过学习掌握各门学科的坚实的基础理论和系统的专门知识，为从事科学研究工作或独立担负专门技术工作打下良好的基础。

我校各专业自 1978 年招收研究生以来，组织了一批学术水平较高、教学经验丰富的教师，先后编写了公共课、学位课所需的多种教材和教学用书。有的教材和教学用书已正式出版发行，更多 则采用讲义的形式逐年印发。这些讲义经过任课教师多年教学实践，不断修改、补充、完善，已达到出书的要求。因此，我校决定出版“研究生用书”，以满足本校各专业研究生教学需要，并与校外单位交流，征求有关专家学者和读者的意见，以促进我校研究生教材建设工作，提高教学质量。

“研究生用书”以公共课和若干门学位课教材为主，还有教学参考书和学术专著，涉及的面较广，数量较多，准备在今后数年内分批出版。编写“研究生用书”总的要求是从研究生的教学需要出发，根据各门课程在教学过程中的地位和作用，在内容上求新、求深、求精，每本教材均应包括本门课程的基本内容，使学生能掌握必需的基础理论和专门知识；学位课教材还应接触该学科的发展前沿，反映国内外的最新研究成果，以适应目前科学技术

知识更新很快的形势；学术专著则应充分反映作者的科研硕果和学术水平，阐述自己的学术见解。在结构和阐述方法上，应条理清楚，论证严谨，文字简炼，符合人们的认识规律。总之，要力求使“研究生用书”具备科学性、系统性和先进性。

我们的主观愿望虽然希望“研究生用书”的质量尽可能高一些，但由于研究生的培养工作为时尚短，水平和经验都不够，其中缺点、错误在所难免，尚望校内外专家学者及读者不吝指教，我们将非常感谢。

华中理工大学研究生院院长

陈 珽

1989.11.

前　言

随着科学技术的飞速发展，偏微分方程的数值解法得到了深入的研究和广泛的应用。应用数学专业的学生和研究生，计算数学专业的学生，理工科各专业的研究生，以及有关的科研、工程技术人员等都迫切需要学习和掌握偏微分方程数值处理的基本方法、基本理论和应用技能。为此目的，作者在原讲义多次使用并广泛听取有关方面意见的基础上，经反复修改后写成了这本书。

众所周知，偏微分方程可根据它的数学特征分为三大类型，即抛物型、双曲型和椭圆型。这三类偏微分方程描述了不同本质的物理现象，其应用是极其广泛的。对于在理论研究和实际应用问题中提出的许多偏微分方程，由于其边界和边界条件复杂等原因，寻求解的解析表达式相当困难，有时甚至是不可能的，所以必须利用计算机研究微分方程的数值解。简言之，这种研究的任务在实用中主要表现于两个方面。一是关于用有效的数值方法离散偏微分方程及其边界条件。对此，差分方法和有限元方法是目前被普遍认为行之有效的两类主要的数值方法。二是关于高效率高精度求解离散微分方程。对此，解同样的离散微分方程，采用好的算法与采用一般算法的计算效果往往相差很大，采用好的算法不但能使求解过程数值稳定、数值解的精度得到提高，而且能数十倍、数百倍地节省计算工作量。

本书共三篇。第一篇介绍解抛物型和双曲型方程初（边）值问题的差分方法；第二篇介绍解椭圆型方程边值问题的有限元方法；第三篇介绍解离散微分方程的高效率方法。这三篇构成一个整体，介绍了偏微分方程数值处理中的基本思想、有关理论、有效算法、程序设计技巧和数值例子等内容。本书章节与段落的标题鲜明，读者可根据自己的要求选用，或侧重于算法与应用，或

算法与分析并重，因此本书能适应不同层次教学和阅读的需要。

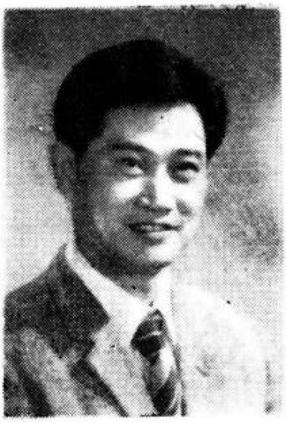
本书注意了以下四方面情况。第一，注重基本思想，不求面面俱到。例如差分方法和有限元方法，虽然这两种离散化方法对抛物型、双曲型和椭圆型这三类偏微分方程都可应用，但本书只就某种离散化方法在其应用最广泛的方面加以侧重介绍，而且非常强调学习和应用这些离散化方法的主要思想和基本方法，以便读者尽快掌握这些方法并自行扩大应用范围。第二，注意应用和实践。为此目的，我们以分析问题解决问题的方法为主导，且以算法为线索展开全书内容，书中除了指明具体算法的计算公式和实现过程外，还特别安排了有关程序设计的内容，列出了便于应用和参考的计算框图及算例数据分析等，这些都有利于提高读者实践能力和设计思想。第三，反映最新成果。特别是将一些最近研究成熟的既实用又有效的算法介绍给读者。第四，内容阐述方式力求数学化和现代化，并附有深入浅出的解释。这既有利于具备数值分析和数理方程初步知识的广大读者顺利自学，又有利于读者在数学上的提高，还便于读者学习和研究有关参考文献。

黄浦生教授审阅了全书，还有不少同志为本书编写和出版给予过帮助，作者在此一并表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，书中错误在所难免，敬请广大读者指正。

徐长发

于华中理工大学　1989年3月



作者简介

徐长发，1947年生，1970年毕业于华中工学院机械制造系，现任华中理工大学数学系副教授。曾于1979～1981年赴西德波恩大学进修计算数学。多年来一直从事偏微分方程数值解法的教学和研究工作，并在学术刊物上发表了论文十余篇。

● **研究生用书**

● 责任编辑：李立鹏

● 封面设计：俞缦丽　陈建纲

● 华中理工大学出版社

目　录

第一篇 解抛物型和双曲型方程的差分方法

抛物型和双曲型方程描述了物质扩散和波动等不定常物理过程，这两类偏微分方程的定解问题在力学、热传导理论、燃烧理论、化学、空气动力学、电磁学和经济数学等方面都有着广泛的应用。这两类方程一般可转化为常微分方程(组)，它们在解的结构形式和解的稳定性研究方面都有共同之处，因此本篇重点讨论具有代表性的初值问题的差分方法。

初值问题的差分方法是古老的，早在1928年，Courant、Friedrichs和Lewy在《论数学物理中的偏微分方程差分方法》一文中就作过较深入的讨论。自从电子计算机问世后，差分方法的研究和应用迅速地发展了，近几十年来新的思想和算法仍不断出现，就目前的研究和应用现状看，解初值问题的差分方法是普遍实用的。

本篇主要就线性方程的初值问题介绍各种有效实用的差分格式和构造这些格式的思想方法，同时也特别注重这些差分格式的稳定性分析。本篇所介绍的种种离散化方法中，有不少是具有启发性的。有的给出了构造高精度差分格式的方法，有的表明了保证差分格式数值稳定的技巧，有的兼顾了实际应用的适应性和计算效率，有的还揭示了不同类型偏微分方程之间的转换规律。读者若能将这些算法融汇贯通，无疑是极其有益的。

第一章　解抛物型方程的差分方法

本章主要讨论一般性的二阶线性抛物型方程，其定解问题假定是适定的，特别是重点讨论热传导方程这一模型问题的差分方法。本章先提出解抛物型方程的差分方法中必须讨论的有关理论问题及其研究的方法，再介绍各种差分格式的构造及其稳定性分析。本章内容不仅对解非线性抛物型方程差分方法有指导意义，而且也是学习第二章的基础。

§1　二阶线性抛物型方程的适定性及其解结构

考虑最简单的**抛物型方程**

$$Lu=\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t),\ a>0,\ (x,t)\in D, \quad (1.1)$$

其中，D是 x-t 平面内的给定区域，它可以是有界区域，也可以是无界区域，L是**微分算子**。

方程（1.1）的**定解问题**根据**定解条件**可分为四种类型：

1. 初值问题(Cauchy问题)

在区域$D=\{(x,t)|x\in(-\infty,\ +\infty),\ t>0\}$内求方程(1.1)满足初始条件

$$u(x,0)=\varphi(x),\qquad x\in(-\infty,+\infty) \quad (1.2)$$

的解$u(x,t)$。

2. 第一类初边值问题

在区域 $D=\{(x,t)|x\in(0,l),\ t\in(0,T)\}$ 内求方程（1.1）满足初始条件和第一类边值条件

$$
\begin{cases}
u(x,0)=\varphi(x), & x\in(0,l), \\
u(0,t)=\alpha_1(t), \quad u(l,t)=\alpha_2(t), & t\in(0,T)
\end{cases}
\tag{1.3}
$$

的解$u(x,t)$。

3．第二类初边值问题

在区域$D=\{(x,t)|\,x\in(0,l),\ t\in(0,T)\}$内求方程（1.1）满足初始条件和第二类边值条件

$$
\begin{cases}
u(x,0)=\varphi(x), & x\in(0,l), \\
u_x(0,t)=\beta_1(t),\ u_x(l,t)=\beta_2(t), & t\in(0,T)
\end{cases}
\tag{1.4}
$$

的解$u(x,t)$。

4．第三类初边值问题

在区域$D=\{(x,t)|\,x\in(0,l),\ t\in(0,T)\}$内求方程（1.1）满足初始条件和第三类边值条件

$$
\begin{cases}
u(x,0)=\varphi(x), & x\in(0,l), \\
(u-\delta_1(t)u_x)|_{x=0}=\gamma_1(t), & \\
(u-\delta_2(t)u_x)|_{x=l}=\gamma_2(t), & t\in(0,T)
\end{cases}
\tag{1.5}
$$

的解$u(x,t)$。

在抛物型方程的研究中，定解问题的适定性概念是重要的。如果定解问题的解存在唯一而且稳定，则称定解问题是适定的。

某个物理过程在一定条件下总是具有唯一确定的状态，因此正确描述这种物理过程的定解问题的解应是存在唯一的。但是用偏微分方程对此作出描述时，总要经过一些近似处理（例如要舍弃一些因素）并提出一些附加要求，我们只能说定解问题近似地反映了自然现象中某个物理过程，而不能说两者完全等同。因此，完全有必要从量的角度来研究解的存在性和唯一性。只有弄清这一问题后，才能判断对于归结出来的定解问题，所给定的条件是否足以保证解的唯一性。如果条件不完备，则还要找新的条件。