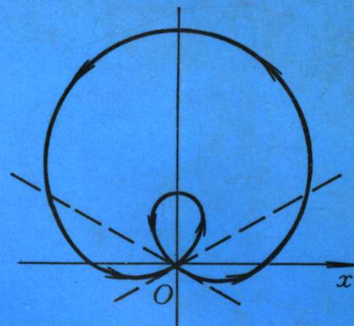
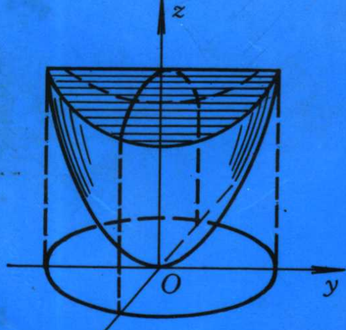


陆庆乐 陆诗娣 编

全国高等教育自学考试用书

高等数学习题详解



高等教育出版社

全国高等教育自学考试用书

高等数学习题详解

陆庆乐　陆诗娣　编

高等教育出版社

(京)112 号

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题详解/陆庆乐,陆诗娣编. - 北京:高等教育出版社,1996.12
ISBN 7-04-005878-2

Ⅰ.高… Ⅱ.①陆… ②陆… Ⅲ.高等数学-解题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 12169 号

*

高等教育出版社出版
北京沙滩后街 55 号
邮政编码:100009 传真:64014048 电话:64054588
新华书店总店北京发行所发行
化学工业出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 19.75 字数 510 000
1997 年 5 月第 1 版 1997 年 5 月第 1 次印刷
印数 0001—10 086
定价 20.00 元

本书是陆庆乐　马知恩编全国高等教育自学考试教材《高等数学》(上、下册)的配套读物.作者将教材中的题目作了详细解答.解题思路清晰,说理详细、层次分明、步骤清楚、书写格式规范,并对各类型题的解题方法有简要的概括和建议.

主要内容:第一篇　函数、极限、连续.第二篇　一元函数微分学.第三篇　一元函数积分学.第四篇　多元函数微积分学简介.第五篇　常微分方程与无穷级数.

书末附有全国高等教育自学考试《高等数学》的历届试题选,并补充了若干模拟试题及其解答,按题型分类,便于读者熟悉各类试题的题型,及如何作规范的解答.

本书供参加全国高等教育自学考试的考生使用,也可供学习《高等数学》的大学生和数学教师参考.

编 者 的 话

全国高等教育自学考试教材《高等数学》自从1990年出版以来,我们不时收到读者的来信,希望能有一本配合教材并着重于解题指导方面的辅导材料.原想写一本《解题指南》,但考虑到参加高等教育自学考试的读者的业余时间都很少,又缺乏教师辅导,解题时遇到困难无处求助,作业得不到批改,存在的问题得不到及时解决,直接影响到学习效果.我们认为,向这些读者提供一本《解题指南》不如提供教材的《题解》对他们更有用处,因指南弄不好反而会增加他们的负担.经再三考虑,还是决定写这本《习题详解》.

本书中的题目都是教材上的,其中既有与基本内容相匹配的基本题,也有帮助提高的综合题.在写法上,本书不像通常的题解那样端出一大堆算式就算了事,而是注意写清楚解题思路,指明所用到的基本概念、基本理论和基本方法.所以本书的宗旨不只是解题,而是通过解题指导读者如何运用基本概念、基本理论和基本方法,以培养读者分析问题和解决问题的能力.

例如,在求解函数定义域这一类问题时,先结合基本初等函数的定义域,说明求法和应注意之点;在求解二阶常系数线性非齐次微分方程之前,先说明解法的一般步骤,特别对求特解的方法以及求解过程中的关键之处作了较为详细的说明.

又如,对填空题与选择题,注意说明为什么填写这一结果与选择这一号码的理由.尽管在考试时,对选择题只要选出正确的号码即可,不需作任何说明.但为了提高读者识别四个备选答案的真伪能力,我们仍指出其他号码所以是错误的原因或理由,以训练读者据理选择,而不是妄加猜测.

再如,对应用题,解答时尽可能根据题意画出草图,以利于帮

助思考.我们在建立目标函数时或建立微分方程时,有图形的帮助,往往容易寻找变量之间或变量与导数之间的关系;在确定定积分的上下限时,根据图形,不仅比较方便,而且还可避免出错.

本书的目的是帮助读者提高解题能力,因此要求读者一定要正确使用本书,切不可因为有了本书,自己就不去做题,而直接去阅读它.这样,对提高解题能力好处是不多的.须知,做题是加深理解和牢固掌握所学内容、熟练运用所学知识解决问题所必不可少的基本训练的一环.我们希望读者尽量先自己作题,如有困难或疑问,再去与本书相对照.这样,经过自己的努力,解题能力才会有较大的提高.

书末附有全国高等教育自学考试高等数学的历届试题选及其解答,目的是为了使读者熟悉各类试题的题型,并知如何作规范的解答,期望这对读者准备参加考试能有帮助.

本书除供参加自学考试者使用外,还可供正在学习高等数学的全日制大学、函授大学、电视大学的学生和高等数学爱好者阅读,也可供数学教师参考.

本书第一、三、五章的初稿由陆诗娣执笔编写,全书由陆庆乐统编定稿.

西安建筑科技大学潘鼎坤教授仔细审阅了书稿,并提出了不少宝贵的意见,这对本书质量的提高有很大的帮助.在这里谨向他表示衷心的谢意,也希望读者对本书存在的问题多提意见,以便改进.

编者

1995年12月于西安交通大学

目　　录

第一篇　函数、极限、连续

第一章　函数 …… 1

习题 1—1 …… 1

习题 1—2 …… 3

习题 1—3 …… 7

习题 1—4 …… 13

习题 1—5 …… 14

习题 1—6 …… 16

习题 1—7 …… 19

自我检查题 …… 21

总习题 …… 24

第二章　极限概念、函数的连续性 …… 31

习题 2—1(一) …… 31

习题 2—1(二) …… 33

习题 2—1(三) …… 36

习题 2—1(四) …… 37

习题 2—2(一) …… 42

习题 2—2(二) …… 47

习题 2—3 …… 52

习题 2—4(一) …… 56

习题 2—4(二) …… 58

习题 2—5 …… 61

自我检查题 …… 64

总习题 …………………………………………………… 68

第二篇　一元函数微分学

第三章　导数与微分 …………………………………………… 81
习题 3—1 …………………………………………………… 81
习题 3—2 …………………………………………………… [illegible]
习题 3—3 …………………………………………………… 8
习题 3—4 …………………………………………………… 9
习题 3—5 …………………………………………………… 93
习题 3—6 …………………………………………………… 98
习题 3—7 …………………………………………………… 104
习题 3—9 …………………………………………………… 108
习题 3—10 …………………………………………………… 110
习题 3—11 …………………………………………………… 115
习题 3—12 …………………………………………………… 121
习题 3—13 …………………………………………………… 124
自我检查题 …………………………………………………… 129
总习题 …………………………………………………… 133
第四章　微分学应用 …………………………………………… 146
习题 4—1 …………………………………………………… 146
习题 4—2 …………………………………………………… 151
习题 4—3 …………………………………………………… 161
习题 4—4 …………………………………………………… 165
习题 4—5 …………………………………………………… 176
习题 4—6 …………………………………………………… 179
习题 4—7 …………………………………………………… 182
习题 4—8 …………………………………………………… 186
自我检查题 …………………………………………………… 192
总习题 …………………………………………………… 200

第三篇　一元函数积分学

第五章　不定积分概念与积分法 …… 215
习题 5—1 …… 215
习题 5—2(一) …… 218
习题 5—2(二) …… 225
习题 5—3 …… 235
习题 5—4(一) …… 244
习题 5—4(二) …… 250
习题 5—4(三) …… 253
习题 5—5 …… 255
自我检查题 …… 257
总习题 …… 260
第六章　定积分及其应用 …… 274
习题 6—1 …… 274
习题 6—2 …… 277
习题 6—3 …… 280
习题 6—4 …… 283
习题 6—5(一) …… 288
习题 6—5(二) …… 294
习题 6—6 …… 298
习题 6—7(一) …… 303
习题 6—7(二) …… 313
习题 6—7(三) …… 322
习题 6—7(四) …… 326
习题 6—7(五) …… 329
习题 6—7(六) …… 332
自我检查题 …… 334
总习题 …… 339

第四篇　多元函数微积分学简介

第七章　空间解析几何 …… 353
习题 7—1 …… 353
习题 7—2 …… 355
习题 7—3 …… 358
习题 7—4 …… 363
习题 7—5 …… 370
自我检查题 …… 372
总习题 …… 376
第八章　多元函数微分学 …… 389
习题 8—1 …… 389
习题 8—2 …… 391
习题 8—3 …… 394
习题 8—4 …… 395
习题 8—5 …… 401
自我检查题 …… 408
总习题 …… 412
第九章　多元函数积分学 …… 429
习题 9—1 …… 429
习题 9—2(一) …… 430
习题 9—2(二) …… 439
习题 9—3 …… 443
习题 9—4 …… 452
自我检查题 …… 456
总习题 …… 461

第五篇　常微分方程与无穷级数

第十章　常微分方程 …… 477

习题 10—1 …… 477
习题 10—2 …… 480
习题 10—3 …… 484
习题 10—4 …… 489
习题 10—5 …… 493
习题 10—6 …… 498
习题 10—7 …… 501
习题 10—8 …… 503
自我检查题 …… 512
总习题 …… 519
第十一章 无穷级数 …… 539
习题 11—1 …… 539
习题 11—2 …… 542
习题 11—3 …… 546
习题 11—4 …… 549
习题 11—5 …… 553
自我检查题 …… 556
总习题 …… 563

附录 历年高等教育自学考试试题选编 …… 573

第一篇　函数、极限、连续

第一章　函　　数

习　题　1—1

1. 在把圆钢锻打成圆盘的过程中，圆钢的体积 V，直径 D，长度 L 这三个量中，哪一个是常量？哪一个是变量？

[答]　在把圆钢锻打成圆盘的过程中(图 1－1)，圆钢的体积 V 为常量，直径 D 与长度 L 是变量.

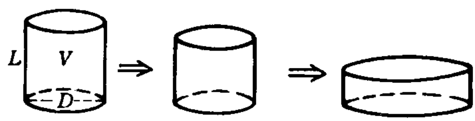


图 1－1

2. 一个人的身高与体重是常量还是变量？

[答]　人的身高与体重都是随着时间而变化的变量.

3. 试把下列区间：

$$[c,+\infty),\qquad (c,+\infty),\qquad (-\infty,c]$$

在数轴上表示出来.

[解]　$[c,+\infty)$

$(c,+\infty)$

$(-\infty,c]$

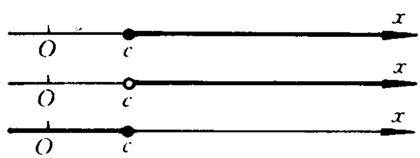


图 1－2

在图 1-2 中，数轴上的粗线表示给定的各个区间，实心点表示区间包含该点，空心点表示区间不包含该点.

4. 用不等式或绝对值不等式表示下列各区间：

(1) $(-2,3)$；　(2) $[-2,2]$；　(3) $(-5,+\infty)$.

[解]　解这类题，先在数轴上画出区间的草图是有帮助的(图 1-3).

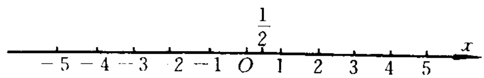


图 1-3

(1) $(-2,3)$可表示为 $-2<x<3$　或　$\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{5}{2}$；

(2) $[-2,2]$可表示为 $-2\leqslant x\leqslant 2$　或　$|x|\leqslant 2$；

(3) $(-5,+\infty)$可表示为 $-5<x<+\infty$.

5. 开区间$(1,3)$是不是下列各点的邻域(即邻区)？

(1) 1.1；　(2) 2；　(3) 2.5；　(4) 3.001.

[解]

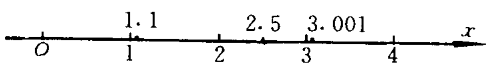


图 1-4

因为某点的邻域是包含该点在内的任意一个开区间，所以$(1,3)$是点 1.1，2，2.5 的邻域，但不是点 3.001 的邻域，因为$(1,3)$不包含 3.001 在内(图 1-4).

6. 试用绝对值不等式表示 3 的$\frac{1}{2}$去心邻域.

[解]　因为 x_0 的 ε 去心邻域为 $x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon, x\neq x_0$，故用绝对值不等式表示为 $0<|x-x_0|<\varepsilon$. 所以 3 的$\frac{1}{2}$去心邻域用绝对值不等式表示为

$$0<|x-3|<\frac{1}{2}.$$

习 题 1—2

1. 两个变量之间有什么特征才构成函数关系？

[答] 两个变量之间具有下列两个特征时，便构成函数关系：

(1) 它们彼此之间不是孤立的，而是相互联系、相互制约的；

(2) 当其中一个变量在它的变域中任意取定一值时，另一个变量按照一定法则就有一个确定的值与这一取定的值相对应.

2. 设 $M(x,y)$是抛物线 $y=\sqrt{2px}$ ($p>0$)上的动点，F 为焦点.

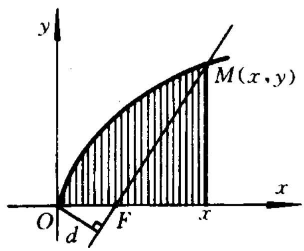


图 1－5

(1) 图 1－5 中阴影部分的面积是不是 x 的函数？

(2) 弧$\overset{\frown}{OM}$的长是不是 x 的函数？

(3) 直线 FM 的斜率 k 是不是 x 的函数？并写出 k 的表达式；

(4) 从原点到 FM 的距离 d 是不是 x 的函数？并写出 d 的表达式.

[答] (1) 图 1－5 中阴影部分的面积随 x 增大而增大，随 x 减小而减小，并随 x 定而定，所以它是 x 的函数；

(2) 弧长$\overset{\frown}{OM}$随 x 变而变，随 x 定而定，所以它是 x 的函数；

(3) 因抛物线 $y=\sqrt{2px}$ ($p>0$)的焦点 F 的坐标为$\left(\frac{p}{2},0\right)$，根据经过两点$(x_1,y_1)$与$(x_2,y_2)$的直线的斜率公式：

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

知，直线 FM 的斜率有表达式

$$k=\frac{y-0}{x-\frac{p}{2}}=\frac{\sqrt{2px}}{x-\frac{p}{2}},(x>0).$$

所以，直线 FM 的斜率 k 是 x 的函数；

(4) 由解析几何知：点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离公式为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

又根据直线的点斜式方程，知直线 FM 的方程为

$$Y-0=\frac{\sqrt{2px}}{x-\frac{p}{2}}\left(X-\frac{p}{2}\right),$$

其中 (X,Y) 为直线上的动点. 化简，得

$$\sqrt{2px}X-\left(x-\frac{p}{2}\right)Y-\frac{p}{2}\sqrt{2px}=0,$$

故距离 d 的表达式为

$$d=\frac{\frac{p}{2}\sqrt{2px}}{\sqrt{2px+\left(x-\frac{p}{2}\right)^2}}=\frac{p\sqrt{2px}}{2x+p},$$

它是 x 的函数.

3. 你认为两个函数应满足什么条件才是相同的？下列各组函数中的两个函数是否相同？如果不同，区别何在？

(1) $y=\frac{x^3+x}{x}$ 与 $y=x^2+1$；(2) $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$；

(3) $y=\begin{cases}x+1, x\leqslant 0,\\ 2x+1, x>0\end{cases}$ 与 $y=\frac{1}{2}(3x+\sqrt{x^2})+1$.

［答］ 两个函数应满足下列两个条件才是相同的.

1. 它们有相同的定义域;

2. 对应于定义域中的任意一个值,两个函数有相同的函数值.

(1) $y=\frac{x^3+x}{x}$与$y=x^2+1$不同,因为两个函数的定义域不同. $y=\frac{x^3+x}{x}$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,而$y=x^2+1$的定义域为$(-\infty,+\infty)$;

(2) $y=\lg x^2$与$y=2\lg x$不同,因为前者的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,而后者的定义域为$(0,+\infty)$;

(3) 两个函数是相同的,因为它们的定义域是相同的,都是$(-\infty,+\infty)$;而且,由于当$x>0$时,$\sqrt{x^2}=x$;$x\leqslant 0$时,$\sqrt{x^2}=-x$,所以

$$y=\frac{1}{2}(3x+\sqrt{x^2})+1=\begin{cases} x+1, x\leqslant 0, \\ 2x+1, x>0. \end{cases}$$

因此,两个函数的表达式实际上是一样的,从而上述两个条件都得到满足,故两者相同.

4. 如果$g(x)=\sqrt{x}$,证明

$$\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}.$$

[证] $$\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}}{\Delta x}$$

$$=\frac{(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0})}{\Delta x(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0})}$$

$$=\frac{(x_0+\Delta x)-x_0}{\Delta x(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0})}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}.$$

5. 求下列各函数在指定点处的函数值:

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\left(1-\dfrac{a-x}{\sqrt{a^2-2ax+x^2}}\right),a>0,$

求 $f\left(\dfrac{a}{2}\right),f(2a)$;

(2) $f(t)=2t^2+\dfrac{2}{t^2}$,求 $f(a),f\left(\dfrac{1}{a}\right),(a\neq 0)$.

[解] 如果函数的表达式中含有根式,而根式内又为一完全平方,那末在求函数值时要注意根式的正、负.

$$(1)\ f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{a-x}{\sqrt{a^2-2ax+x^2}}\right)\Bigg|_{x=\frac{a}{2}}$$

$$=\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2}}\right)\Bigg|_{x=\frac{a}{2}}$$

$$=\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{a-x}{a-x}\right)\Bigg|_{x=\frac{a}{2}}=0;$$

$$f(2a)=\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{a-x}{\sqrt{a^2-2ax+x^2}}\right)\Bigg|_{x=2a}$$

$$=\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{a-x}{\sqrt{(x-a)^2}}\right)\Bigg|_{x=2a}$$

$$=\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{a-x}{x-a}\right)\Bigg|_{x=2a}=\frac{2}{x^2}\Bigg|_{x=2a}=\frac{1}{2a^2}.$$

$$(2)\ f(a)=\left(2t^2+\frac{2}{t^2}\right)\Bigg|_{t=a}=2a^2+\frac{2}{a^2};$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=\left(2t^2+\frac{2}{t^2}\right)\Bigg|_{t=\frac{1}{a}}=\frac{2}{a^2}+2a^2.$$

6. 函数 $y=f(x)$的自变量增量 Δx 是否一定大于零?如果 $\Delta x>0$,那末函数的增量 Δy 是否也一定大于零?结合函数的图形加以说明.

[答] 函数自变量的增量 Δx 不一定要大于零,因为它是由我们随意给定的.当 $\Delta x>0$ 时,函数的增量 Δy 也不一定大于零,它可以为正,也可以为负或零,如图 1－6 所示.