数学物理方程

张自立　张韵琴　王文祥　编

Shuxue Wuli Fangcheng

西安交通大学出版社

内 容 简 介

本书是根据国家教委1986年颁发的"高等工业学校数学物理方程课程教学基本要求"编写的。

本书共分六章。第一章导出三类典型偏微分方程，并介绍数学物理方程的一些基本概念及叠加原理。第二章至第六章分别阐述达朗贝尔法与球平均法、分离变量法、贝塞尔函数、勒让德多项式、格林函数法。

本书取材适当，重点突出，推导详细，例题的类型较多，每章都有习题与小结，书末附有综合练习、习题答案、参考书目等，便于教学。本书可作高等工科院校数学物理方程课程的教材，也可供有关科技人员阅读参考。

国家教委工科数学课程教学指导委员会主任陆庆乐教授为本书撰写了序言。

数 学 物 理 方 程

张自立　张韵琴　王文祥　编

责任编辑　王新安

*

西安交通大学出版社出版

（西安市咸宁路28号）

西安交通大学出版社印刷厂印装

陕西省新华书店发行　各地新华书店经售

*

开本 787×1092　1/32　印张7.25　字数：150千字

1989年3月第1版　1989年3月第1次印刷

印数 1——10500

ISBN 7-5605-0126-5/O·27　定价：1.50元

序

数学物理方程是高等工业学校有关专业的一门基础课，通过本门课程的学习，使学生获得有关编微分方程的一些基本概念、解偏微分方程的常用方法和有关贝塞尔函数与勒让德多项式的一些基本知识，为学习后继课程与扩大数学知识面提供必要的数学基础。

本书是作者在他们所编的讲义的基础上，经过多次试用，参照国家教委颁发的“高等工业学校数学物理方程课程教学基本要求”改编而成。本书取材适当，符合教学基本要求。例题与习题的类型较多，既可供教师选用，也可使学生在运用所学知识分析和解决实际问题能力方面得到初步的训练。书中每章末附有习题与小结，便于教学。

目前，公开出版的同类教材为数极少，该书的出版对提高该课程的教学质量定将会起积极作用。故草此数行，权以为序。

陆　庆　乐

1987年9月

前 言

本书是根据国家教委1986年颁发的“高等工业学校数学物理方程课程教学基本要求”和西安交通大学制定的数学物理方程教学大纲编写的。它可作为高等工科院校有关专业、应用力学专业和应用物理专业的数学物理方程课程的教材，也可供有关科技人员参考。

考虑到数学物理方程这门课程的特点，我们在编写中努力做到以下几点：

1) 贯彻理论联系实际的原则，注意概念和方法的物理背景，使读者了解它的来龙去脉。

2) 突出分离变量法这个重点，加强特殊函数同分离变量法的联系。

3) 概念、方法和定理的引出由具体到抽象、由特殊到一般，阐述比较详细，文字叙述通俗易懂，便于自学。

4) 例题与习题的类型比较广泛，每章末还附有小结，便于教学。

此外，本书还增添了第二类傅里叶-贝塞尔级数的展开定理，这在国内同类教材中还是首次出现。

为了适应不同专业的需要，本书的内容略多于国家教委颁发的数学物理方程教学基本要求，超出基本要求的部分都打了“*”号，供有关专业选用。使用本书的教学时数为42学时，各章所需时数分配如下：

章　数	一	二	三	四	五	六
时　数	6	6	10	9	5	6

本书初稿曾在西安交通大学电气工程系、动力机械工程系、工程力学系、机械工程系、优异生班和教改班使用过。

本书由西北工业大学孙家永教授和华中理工大学孙金海副教授主审。国家教委工科数学课程教学指导委员会主任陆庆乐教授为本书撰写了序言。高应才、符天武、侯双根、梁建华、欧斐君等副教授及易发槐老师对本书初稿提了许多宝贵意见。在编写过程中，西安交通大学出版社给予巨大的帮助和支持。在此一并致以衷心的感谢。

本书由张自立、张韵琴主编。第一、二、六章由张韵琴编写，第三章、附录和综合练习由王文祥编写，第四、五章由张自立编写。由于我们水平有限，错误与不妥之处在所难免，热忱地希望读者们给予批评指正。

编　者

1987 年 9 月

于西安交通大学

目　录

第一章 绪 论

数学物理方程的研究范围是十分广泛的，它包含描述各种自然现象的微分方程、积分方程和函数方程。而数学物理方程这门课程不可能全部概括这些内容，在此主要研究下面三类典型方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\text{——波动方程}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\text{——热传导方程}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0\text{——拉普拉斯(Laplace)方程}$$

一方面，因为这些典型方程很好地描述了一些基本的物理现象，能解决一般的工程技术问题；另一方面，因为通过对这些典型方程的研究，可以掌握一些解决问题的方法，为进一步研究物理学、力学、天文学等方面提出的新问题奠定必要的基础。

本章将从几个不同的物理模型出发，导出数学物理方程中的上述三类典型方程，并根据不同的物理性质提出相应的定解问题。最后还介绍了数学物理方程的一些基本概念及叠加原理。

§1 弦振动方程及其定解问题的提出

1. 弦振动方程的导出

设有一根两端拉紧的均匀柔软细弦，其长为 l。当弦作

微小横振动时，求该弦上各点的运动规律。

取弦的平衡位置为 ox 轴，弦的两端分别固定在 $x=0$ 及 $x=l$ 处。所谓弦作微小横振动是指弦的运动发生在同一平面内，且弦上各点沿垂直于弦的平衡位置的方向运动。设弦在 x-u 平面上作微小横振动。用 $u(x,t)$ 表示弦上的点 x 在时刻 t 的位移，现求 $u(x,t)$所满足的方程。

导出弦振动方程的物理依据是牛顿(Newton) 定律 $F=m\cdot a$。为了应用牛顿定律，我们把弦分成许多小段，每个小段可抽象为质点，从而把整个弦的振动看成许多互相牵连的质点的运动。现考察弦上任一小段$\overset{\frown}{AB}$（图 1.1）的运动。

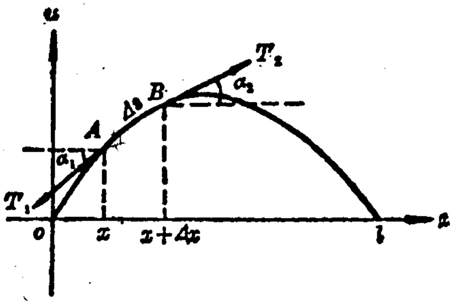

图 1.1

由于弦是柔软的，故没有抗弯力，于是$\overset{\frown}{AB}$的邻段作用在它两端的张力 T_1 及 T_2 为邻段对两端的拉力。由此可知张力 T_1 及 T_2 的方向总是沿弦的切线方向。又由于弦非常轻，故弧段$\overset{\frown}{AB}$的重量与张力相比可以忽略不计。因此弧段$\overset{\frown}{AB}$只受到张力的作用。另外还假定了弦只作横振动，因此张力

沿 x 轴方向分量的代数和为零。于是运动方程为

$$\begin{cases} T_2\cos\alpha_2 - T_1\cos\alpha_1 = 0 \\ T_2\sin\alpha_2 - T_1\sin\alpha_1 = \rho\dfrac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2}\Delta x \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 ρ 为线密度，它为常数，$u(\bar{x},t)$ 表示弦段 $(x,x+\Delta x)$ 在重心 $\bar{x}$ 处的位移。设弧段 $\overset{\frown}{AB}$ 在横标为 x 的点的张力为 $T(x,t)$，则

$$T_1 = T(x,t),\quad T_2 = T(x+\Delta x,t)$$

由于弦在平衡位置附近作微小横振动，故 $\dfrac{\partial u}{\partial x} \ll 1$，因此

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 \approx 1$$

于是有

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha_1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2}} \approx 1$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha_2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}\right)^2}} \approx 1$$

$$\sin\alpha_1 \approx \mathrm{tg}\,\alpha_1 = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x},\qquad \sin\alpha_2 \approx \mathrm{tg}\,\alpha_2 = \frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}$$

从而在微小横振动条件下，方程(1.1)化为

$$\begin{cases} T_2 - T_1 = 0 \\ T_2\dfrac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - T_1\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \rho\dfrac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2}\Delta x \end{cases} \tag{1.2}$$

由(1.2)式第一个方程可知

$$T_1 = T_2$$

即对于固定的时间 t 而言，在没有沿 x 轴方向的外力作用时，弦上各点的张力是相同的，故张力与 x 无关。又由于

$$\Delta s=\int_x^{x+\Delta x}\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,dx\approx\Delta x$$

其中 Δs 表示弧段 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度，因此可以认为这段弦在振动过程中并未伸长，由胡克(Hooke)定律可知，弦上每一点的张力又与时间 t 无关。故弦作微小横振动时，张力 T 为常数，设 $T=T_0$。于是由(1.2)式中第二个方程得到

$$T_0\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]=\rho\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2}\Delta x$$

应用微分中值定理得到

$$T_0\frac{\partial^2 u(x+\theta\cdot\Delta x,t)}{\partial x^2}\Delta x=\rho\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2}\Delta x,\quad 0<\theta<1$$

两边除以 Δx，再令 $\Delta x\to 0$，此时 $x+\theta\cdot\Delta x\to x$，$u(\bar{x},\ t)\to u(x,t)$，于是有

$$\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=T_0\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

记 $\frac{T_0}{\rho}=a^2$，就得到不受外力作用时弦振动所满足的方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad(1.3)$$

(1.3)式称为弦的自由振动方程或齐次一维波动方程。

如果在振动过程中，弦还受到横向外力的作用。设力密度为 $F(x,t)$，则(1.3)式应改为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)\qquad(1.4)$$

$\frac{\partial u}{\partial x}$ $\frac{\partial u}{\partial x}$ $1+tg^2 x$ $=1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

其中$f(x,t)=\frac{1}{\rho}F(x,t)$。(1.4) 式称为弦的受迫振动方程或非齐次一维波动方程。

上面我们从弦的横振动这个物理模型出发，推导出了一维波动方程。在研究其他的物理、力学问题中，也会遇到同样类型的方程。例如，杆的纵振动问题及高频传输线问题等，它们的方程也是一维波动方程。这说明了同一个方程可以用来描述不同的物理现象。

在流体力学及电磁场理论等领域中，还会遇到高维波动方程。例如，均匀薄膜的横振动方程就是二维波动方程，它的形式为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t) \qquad (1.5)$$

声波方程及电磁波方程就是三维波动方程，它的形式为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t) \quad (1.6)$$

2. 定解条件

前面建立了弦振动方程。由于这个方程中出现了未知函数的偏导数，故它是偏微分方程。在建立方程的过程中，没有涉及到弦所处的边界状况及初始状况，因此它是弦作微小横振动时位移$u(x,t)$所满足的一般规律。一般地讲，偏微分方程和常微分方程一样，它也有无穷多的解。因此，要确定一个具体的物理过程，还必须添加某些附加条件。在解常微分方程时，方程的解要由初始条件或其他形式的附加条件来确定。同样，对于偏微分方程的解，也要由各种形式的附加条件来确定。偏微分方程的附加条件，包括了初始条件及边

界条件，统称定解条件。

弦振动方程的初始条件，即弦在初始时刻 $t=0$ 时的位移及速度

$$\begin{cases} u(x,0)=\varphi(x) \\ u_t(x,0)=\psi(x) \end{cases} \tag{1.7}$$

其中 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 均为已知函数。

下面研究弦振动方程的边界条件。当弦的两端固定在 $x=0$ 及 $x=l$ 两点时，它的边界条件为

$$u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0 \tag{1.8}$$

若弦的一端(例如 $x=0$)不受垂直方向外力的作用而在垂直于 x 轴的直线上自由滑动，这种边界称为自由边界。此时边界微元右端受到张力 T_0 的作用。张力 T_0 在垂直方向的分量是 $T_0\dfrac{\partial u(\Delta x,t)}{\partial x}$，令 $\Delta x\to 0$，于是得到该端所应满足的边界条件

$$u_x(0,t)=0 \tag{1.9}$$

同样，若弦的另一端 $x=l$ 为自由边界时，它所满足的边界条件为

$$u_x(l,t)=0 \tag{1.10}$$

弦振动方程的边界条件通常有以下三种类型：

1) 第一类边界条件：给定未知函数 $u(x,t)$ 在边界上的值，称为第一类边界条件。它可表示为

$$u(0,t)=\mu_1(t),\ u(l,t)=\mu_2(t) \tag{1.11}$$

其中 $\mu_1(t)$、$\mu_2(t)$ 均为已知函数。

2) 第二类边界条件：给定未知函数 $u(x,t)$ 在边界上的导数值，称为第二类边界条件。它可表示为

$$u_x(0,t)=\nu_1(t),\quad u_x(l,t)=\nu_2(t) \tag{1.12}$$

其中 $\nu_1(t)$、$\nu_2(t)$均为已知函数。

3) 第三类边界条件：给定未知函数 $u(x,t)$ 及其导数 $u_x(x,t)$ 的线性组合在边界上的值，称为第三类边界条件。它可表示为

$$\begin{cases} u_x(0,t)-\alpha u(0,t)=\omega_1(t) \\ u_x(l,t)+\beta u(l,t)=\omega_2(t) \end{cases} \tag{1.13}$$

其中 α、β 为正常数，$\omega_1(t)$、$\omega_2(t)$为已知函数。

以上三类边界条件都是从不同的物理条件归结出来的。下面我们来说明它们的物理意义。

若弦的一端（设 $x=l$）固定在弹性支承上，且该端不受垂直方向外力的作用。设支承原来的位置为 $u=0$，则 u 的值表示支承在该点的伸长（或压缩）。在 $x=l$ 附近取一点 x_1，于是在 (x_1,l) 这一段弦的两端分别受到张力及弹性力的作用。张力在垂直方向的分量为 $-T_0\dfrac{\partial u(x_1,t)}{\partial x}$，弹性力为 $-k_l u(l,t)$，其中T_0为张力，k_l 为支承的弹性系数。根据牛顿定律，当 $x_1\to l$ 时，得到

$$T_0 u_x(l,t)+k_l u(l,t)=0$$

即
$$u_x(l,t)+\beta u(l,t)=0$$

其中 $\beta=\dfrac{k_l}{T_0}$。同理，若 $x=0$ 一端固定在弹性支承上，且不受垂直方向外力的作用，则边界条件为

$$u_x(0,t)-\alpha u(0,t)=0$$

其中 $\alpha=\dfrac{k_0}{T_0}$。这样若弦的两端固定在弹性支承上，且不受垂直方向外力的作用，则其边界条件为

$$\begin{cases} u_x(0,t)-\alpha u(0,t)=0 \\ u_x(l,t)+\beta u(l,t)=0 \end{cases} \tag{1.14}$$

更一般的情形，如果弦的两端固定在弹性支承上，且还受到垂直方向的持续外力的作用，则边界条件为

$$\begin{cases} u_x(0,t)-\alpha u(0,t)=\omega_1(t) \\ u_x(l,t)+\beta u(l,t)=\omega_2(t) \end{cases}$$

这就是第三类边界条件。第一、二类边界条件是第三类边界条件的特殊情况。事实上，若$k_0\gg T_0$、$k_l\gg T_0$时，这时$T_0/k_0\ll 1$、$T_0/k_l\ll 1$，可近似地认为T_0/k_0和T_0/k_l为零，则(1.13)式就化为(1.11)式，这就是第一类边界条件，这时弹性支承约束力很大；同理，若$k_0\ll T_0$、$k_l\ll T_0$时，可近似地认为k_0/T_0和k_l/T_0为零，则(1.13)式就化为(1.12)式，这就是第二类边界条件，这时弹性支承约束力很小。如果这时不受垂直方向持续外力的作用，则第一、二类边界条件就分别表示弦两端固定及两端自由的情况。

边界条件(1.11)、(1.12)、(1.13)称为非齐次边界条件。若等式右端的已知函数（称为自由项）恒为零，则称为齐次边界条件。

3. 定解问题

求一个偏微分方程满足某些定解条件的解的问题称为定解问题。

在上述弦振动方程中，若弦的两端点分别固定在$x=0$及$x=l$处，且初始位移及初始速度分别为$\varphi(x)$及$\psi(x)$，我们把方程(1.3)及定解条件(1.8)和(1.7)结合起来就得到下面的定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & 0<x<l, t>0 \\ u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0 \\ u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x) \end{cases} \tag{1.15}$$

称这种既有初始条件，又有边界条件的定解问题为混合问题。如果定解问题中，其定解条件只包含初始条件而没有边界条件，则此定解问题称为初值问题或柯西 (Cauchy)问题。

§2 热传导方程及其定解问题的提出

1. 热传导方程的导出

设空间有一导热物体Ω，若其内部各点的温度不尽相同，那末就会产生热传导现象。用$u(x,y,z,t)$表示Ω内点(x,y,z)处在时刻t的温度，现求$u(x,y,z,t)$所满足的方程。

与导出弦振动方程类似，我们来研究物体内的一个微元的热传导情况。在物体内任取一个封闭曲面S，它所围成的区域记为V(如图 1.2)。用dS表示封闭曲面S上的面积元素，n表示dS的法线向量，它的正向指向曲面S的外侧。根据热传导的傅里叶(Fourier)定律，物体在无穷小段时间dt内，流过一个无穷小面积dS的热量dQ，与物体温度沿dS的法线方向的方向导数$\frac{\partial u}{\partial n}$成正比，即

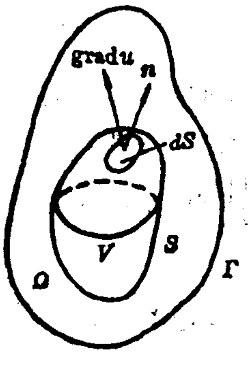

图 1.2

$$dQ=-k(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial n}dSdt \tag{2.1}$$

其中 $k(x,y,z)$ 称为物体在点 (x, y, z) 处的热传导系数，它取正值。式中的负号表示热量流动的方向与温度梯度 grad$u$ 的方向相反*)。即当 grad$u$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角为锐角时，

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\mathrm{grad}u\cdot\boldsymbol{n}>0$$

这时热量由曲面正侧流向负侧，dQ 应取负值；当 grad$u$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角为钝角时

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\mathrm{grad}u\cdot\boldsymbol{n}<0$$

这时热量由曲面负侧流向正侧，dQ 应取正值。

根据 (2.1) 式，可以得到单位时间内由封闭曲面 S 的外侧流入区域 V 的热量

$$\iint_S k(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial n}dS$$

从而由时刻 t_1 到时刻 t_2 流入封闭曲面 S 的总热量为

$$Q_1=\int_{t_1}^{t_2}\left[\iint_S k\frac{\partial u}{\partial n}dS\right]dt \tag{2.2}$$

流入的热量使物体内部温度升高。设封闭曲面 S 内部在时间间隔 $[t_1, t_2]$ 内温度升高所吸收的热量为 Q_2，则

$$Q_2=\iiint_V c(x,y,z)\rho(x,y,z)[u(x,y,z,t_2)-u(x,y,z,t_1)]dv \tag{2.3}$$

其中 $c(x,y,z)$ 为区域 V 内点 (x,y,z) 处的比热，$\rho(x,y,z)$ 为

---

* grad$u$ 的方向为函数 u 变化率最大的方向。