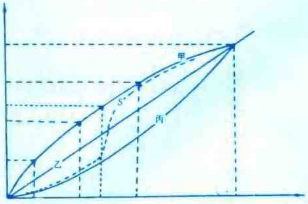
全国高等林业院校试用教材

森工运筹技术

郑登旋　孙广新　文立辰等　编



东北林业大学出版社

（黑）新登字第 10 号

全国高等林业院校试用教材
森 工 运 筹 技 术
Sengong Yunchou Jishu
郑登旋 孙广新 文立辰等 编
东北林业大学出版社出版发行
（哈尔滨市和兴路 26 号）
东北林业大学印刷厂印刷
开本 787×1092 毫米 1/16 印张 17.75 字数 399 千字
1994 年 12 月第 1 版 1994 年 12 月第 1 次印刷
印数 1—1 000 册
ISBN 7-81008-536-0
TB·44 定价：10.00 元

前　言

《森工运筹技术》是高等林业院校森林工程专业的专业基础课统编教材。它是根据1990年9月“林业部森林采运工程专业指导委员会第一次会议”通过的森林工程专业“八五”教材建设规划和1990年12月在内蒙古林学院召开的《森工运筹技术》教材编审研究讨论会通过的教学大纲编写的。

本教材包括线性规划、整数规划、目标规划、动态规划、网络分析、随机服务系统分析、存贮分析、决策分析、技术经济分析的基本方法、优选法等内容。后两部分是本课程教学大纲之外的内容，因考虑到我国南北林区条件有别，在教材选取时需要留有一定余地，所以将它作为备用内容编入统编教材之中，各校在使用时可酌情取舍。

运筹技术是以运筹学为理论基础，旨在筹划、设计和管理中应用的优化技术，是一门方法性的学科。随着运筹学理论的日趋成熟和发展，特别是电子计算机的普及，运筹技术正越来越广泛地被应用到当今社会的各个领域中，它是现代化生产管理和工程优化设计不可缺少的基础之一。鉴于本专业学生的数学理论基础，我们在编写中遵循“重在应用”的原则，尽量结合我国林区生产和科研的实际，偏重于方法和应用方面的阐述，而不过多地强调逻辑推理和理论论证，写法上注意深入浅出，简明扼要，通俗易懂，力求做到理论性、实用性、针对性的统一。

通过本教材的学习，可使学生懂得运筹技术的基本原理；掌握优化问题数学模型的建立及其求解的方法与技能；学会用系统的观点、定量分析的方法处理森林工程的各类优化问题，并做出合理、满意的决策。

本教材是在近年来本课程教学实践的基础上，结合林业生产和科研的实际，并征寻生产和设计研究部门有关人员的意见编写而成的。初稿完成后，通过了教材专题会议的审定(1993年7月在内蒙古林学院审定通过)，并根据会议提出的建议进行了修改和补充。

本书由郑登旋任主编，孙广新、文立辰、姚庆任副主编，张殿忠任主审。编写分工如下：第一、六、十章：郑登旋；第二章：文立辰；第三章：王景欣；第四章：孙广新；第五章：林涛；第七章：张斌；第八章：张兴源、胡建伟；第九章：姚庆。全书由郑登旋、孙广新统一整理，胡建伟绘制全书插图，郑澍编写附录程序。书稿在编审过程中，得到了森林采运工程专业指导委员会和内蒙古林学院的大力支持。刘连民教授、赵美华教授、朱必文教授、周裕掘教授等参加了本教材的编审研讨会和审定会，并提出了宝贵的具体修改意见，对提高本书的编写质量起了重要作用，在此一并表示感谢。

本书内容广泛，通俗易懂，便于自学，除可供森林工程专业作为教材外，也可作为其他有关专业师生及森工技术人员、经营管理人员和设计研究人员的参考书。

由于编者水平有限，不妥之处在所难免，恳请广大读者提出宝贵意见。

编　者

1994年6月

目 录

第一章　线性规划

线性规划是在科学管理中应用最广、收效最大的一种运筹技术，是 20 世纪中期科学进步的最重要标志之一。由于线性规划在理论上已经成熟，在数字计算上可用电子计算机处理（国内已有专用的软件），因此它是现代管理科学的重要基础和手段。

第一节　线性规划问题及其图解法

一、线性规划问题

生产过程中，通常会受到一些条件如材料、劳力、资金、时间等的限制。规划中将这些限制称为约束条件；生产的效益（或费用）称为目标；表达理想目标的函数称为目标函数。线性规划就是在满足一组线性约束条件下，求得最佳线性目标函数值。现举几个例子加以说明。

例 1　某林场拟在地势陡峻的林地安排木材生产，其集材方式有索道集材和人力集材两种。对这两种不同的集材方式，生产每万立方米木材所需要的条件及利润如表 1-1 所示。若林场可供采伐的林地面积为 600hm²，最大林道投资为 8 万元，可利用的绞盘机总台时为 15（千台时），最多集材工时为 7（千工日），问如何确定两种生产方式的产量，使林场得到的总利润为最大？

解：设 x_1、x_2 分别为索道集材方式和人工集材方式的木材产量（万 m^3），则该问题的数学语言描述如下：

表 1-1　生产每万立方米木材的条件及利润

生产条件 ＼ 需要量 ＼ 生产方式	索道集材	人工集材	可用量
林地面积（百 hm^2）	1	1	6
林道修建费（万元）	1	2	8
绞盘机（千台时）	3	0	15
集材工（千工日）	0	2	7
利　润（万元）	3	5	

考虑伐区面积不得超过 $600hm^2$ 的限制条件，用不等式表示为

$$x_1 + x_2 \leqslant 6$$

同样，考虑林道投资总额，绞盘机台时数和集材工日数的限制条件，可用不等式表示为

$$x_1 + 2x_2 \leqslant 8$$
$$3x_1 \leqslant 15$$
$$2x_2 \leqslant 7$$

由于木材产量不能为负值，故有非负约束

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

在满足上述诸条件的前提下，如何使总利润最大，就是该生产规划的目标。用 Z 表示（万元），使得目标

$$Z = 3x_1 + 5x_2 \text{ 为最大}$$

综上所述，该问题可归纳为：

目标函数：　$Z = 3x_1 + 5x_2$ 为最大

满足约束条件：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ 3x_1 \leqslant 15 \\ 2x_2 \leqslant 7 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

例 2　设今年木材生产安排在甲、乙两个林场进行，已知两林场生产的木材中，每万立方米含有的松木、柞木、杨木、桦木数量及每万立方米成本如表 1-2 所示。如果今年需要松木、柞木、杨木、桦木的数量分别不少于 120、45、20、90k(m^3)，问如何确定甲、乙两林场的木材产量，才能使总的生产成本最小？

表 1-2　每万立米木材中的树种含量及成本

树种 \ 含量 \ 林场	甲	乙	需材量 k(m^3)
松木 k(m^3)	1	4	≥120
柞木 k(m^3)	1	1	≥45
杨木 k(m^3)	2	0	≥20
桦木 k(m^3)	3	2	≥90
成本（百万元）	1	2	

假设：x_1、x_2 分别为甲、乙两林场生产的木材量（万 m^3）。考虑到今年对 4 个树种需材量的要求，即可列出 4 个不等式：

$$x_1 + 4x_2 \geqslant 120$$
$$x_1 + x_2 \geqslant 45$$
$$2x_1 \geqslant 20$$
$$3x_1 + 2x_2 \geqslant 90$$

考虑非负约束，即有

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

在满足上述条件下，如何使得总成本最小是该问题的目标。用 Z 表示总成本（百万元），即

$$Z = x_1 + 2x_2 \text{ 为最小}$$

综上所述，该问题可归纳为：

目标函数：

$$Z = x_1 + 2x_2 \text{ 为最小}$$

约束条件：

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geqslant 120 \\ x_1 + x_2 \geqslant 45 \\ 2x_1 \geqslant 20 \\ 3x_1 + 2x_2 \geqslant 90 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

例 3 设有 3 个木材产地 A_1、A_2、A_3，需要运出木材量分别为 7、5、9（万 m^3）；另有 4 个需材点 B_1、B_2、B_3、B_4，其需要购入木材量分别为 3、7、5、6（万 m^3）。各木材产地与销地之间都可运材，其单位运价如表 1-3 所示。问在满足产销（平衡）要求的条件下，如何组织调运，使总运费最省？

表 1-3 单位运价表　　单位：万元/万 m^3

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	3	10
A_2	1	9	2	8
A_3	7	4	10	5

解：设在满足产销平衡的条件下，调运量如产销平衡表所示（见表 1-4）。表中 x_{ij} 表示由 A_i 运至 B_j 的运量（万 m^3），则该问题用数学语言可描述为：

表 1-4 产量平衡表　　单位：万 m^3

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	7
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	5
A_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	9
销量	3	7	5	6	

目标函数

$$\begin{aligned} Z = \ & 3x_{11} + 11x_{12} + 3x_{13} + 10x_{14} + x_{21} + 9x_{22} + 2x_{32} + 8x_{24} \\ & + 7x_{31} + 4x_{32} + 10x_{33} + 5x_{34} \text{ 为最小} \end{aligned}$$

满足约束条件

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 7 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 5 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 9 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 3 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 7 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 5 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 6 \\ x_{ij} \geqslant 0 \quad (i = 1,2,3; \quad j = 1,2,3,4) \end{cases}$$

可以看出，该问题的约束方程系数矩阵有其特殊性：每列只有两个元素为1，其余元素都为零。这类规划问题称为运输问题。

以上几个例子所涉及的问题均是线性规划问题，属于同一类的优化问题，其共同的特征是：

1. 用一组决策变量（x_1，x_2，…，x_n）表示其规划方案。通常决策变量取值为非负。

2. 存在一定约束条件，并用等式或不等式表示。

3. 要求目标函数实现最大化或最小化。

4. 满足三个基本假设：

(1) 比例性：资源的利用量和由此产生的收益（或费用）必须同每一个决策变量成正比。

(2) 可分性：决策变量的最佳值可以是一个分数（或小数），即最优解无论是整数或分数都有实际意义。

(3) 可加性：所利用（或提供）的资源总量及总收益（或总费用）等于每种产品相应的各分量之和。

上述的三个基本假设表示所有的约束和目标函数必须是决策变量的线性组合。另外还假定，约束条件和目标函数中，所有的系数均为已知的常数而不取随机值。

线性规划问题的数学表达式为

$$\max(\text{或}\ \min)Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{1-1}$$

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_n \end{aligned}\right\} \quad (1\text{-}2) \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \quad (1\text{-}3) \end{cases}$$

称之为线性规划的数学模型。

式（1-1）称为目标函数；式（1-2）与（1-3）称为约束条件，其中式（1-3）也称为非负条件。

式中：c_1，c_2，…，c_n——价值系数；

a_{11}，a_{12}，…，a_{ij}，…，a_{mn}——约束条件系数；

b_1，b_2，…，b_m——限定常数。

二、图解法

图解法是在直角坐标系中用图解方法求线性规划问题的解。

现以例 1 为例说明图解法的过程。例 1 的数学模型为：

$$\max Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ 3x_1 \leqslant 15 \\ 2x_2 \leqslant 7 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

它的约束条件可看成 6 个半平面交成的六边形（图 1-1 中阴影部分）。其 6 条边界线方程分别为：

① $x_1 + x_2 = 6$　　② $x_1 + 2x_2 = 8$

③ $3x_1 = 15$　　④ $2x_2 = 7$

⑤ $x_1 = 0$　　⑥ $x_2 = 0$

阴影范围内任一点 (x_1, x_2) 都是该问题的一个解（可行解），整个六边形区域为解的集合（可行域）。

从目标函数 $Z=3x_1+5x_2$ 看，可认为是一簇以 Z 为参数的平行线（图 1-1 虚线所示）。将其改写成 $x_2=-\frac{3}{5}x_1+\frac{Z}{5}$ 后即可看出，直线的斜率为 $\frac{3}{5}$，截距为 $\frac{Z}{5}$. 每条虚线都有个确定的 Z 值与之对应。就是说，位于同一直线的点，具有相同的 Z 值。因此，这些平行线称之为等值线。显然，等值线上移时，Z 值相应地增大。在所有通过可行域（六边形）的各条等值线中，以通过 A 点的等值线的 Z 值最大（截距 $\frac{Z}{5}$ 最大）。所以，A 点的坐标值即为最优解，相应的 Z 值为目标函数值。A 点坐标可由方程组

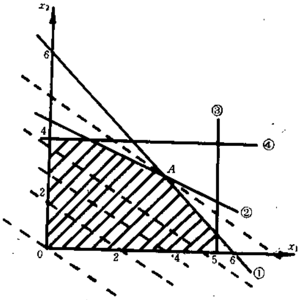


图 1-1　图解法

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$$

解得：　　$x_1 = 4$，　$x_2 = 2$，　相应地

目标函数值　$Z=3\times4+5\times2=22$.

结果说明，例1问题最优的生产方案是：索道集材方式生产4万 m^3，人工集材方式生产2万 m^3，可得最大利润22万元。

通过图解法可得出如下结论（此处不证）：

(1) 线性规划问题的可行域一般是凸多边形（凸集），若存在最优解，则一定在可行域的某顶点处得到。这是线性规划的基本原理之一。

(2)若有两个顶点同时得到最优解，则这两顶点连线上的任意一点都是最优解（有无穷多组解）。

(3) 若可行域为空集，则问题无解。

(4) 若可行域无界，则最优解可能无界。如图1-2所示，其可行域相应的约束条件为

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ x_1 - x_2 \leqslant 2 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

显然，在该可行域内求极大化问题，等值线将无限上移，故最优解无界。

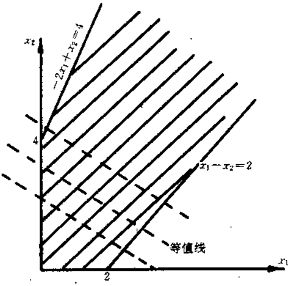


图1-2 可行域无界

图解法虽然简单、直观，但它只适用于解两个决策变量的问题，对多变量的线性规划问题，图解法是无能为力的。

第二节 线性规划问题的求解法

一、线性规划数学模型的标准化

线性规划的数学模型有各种不同的形式，为了便于以后讨论，规定了线性规划问题的标准型为

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{1-4}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \tag{1-5}$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \tag{1-6}$$

式中：n——变量个数；

m——约束条件数（不包括非负约束条件）。

其缩写形式为：

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & i = 1,2,\cdots,m \\ x_j \geqslant 0 & j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

这里规定 $b_i \geqslant 0$，否则等式两端同乘以（-1）。

有时也可以用向量和矩阵表示为：

$$\max Z = CX$$

$$\begin{cases} AX = b \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

其中：

$C=(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 称为价值向量；

$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 称为决策向量；

$b=(b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$ 为限定向量；

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ 称为约束方程组系数矩阵。

若

$$P_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \cdots, P_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

则 $A=(P_1, P_2, \cdots, P_n)$。

向量 P_j 称对应于 x_j 的系数向量。

为了便于公式化求解线性规划问题，一般先要将各种形式的线性规划模型化成标准型。

(1) 若目标函数要实现最小化，即

$$\min Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

只须令 $$Z' = -Z = -c_1x_1 - c_2x_2 \cdots - c_nx_n$$

即可得到标准型

$$\max(-Z) = -c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n$$

如例 2 的目标函数化为标准型，即为

$$\max(-Z) = -x_1 - 2x_2$$

(2) 若约束条件为不等式，则在“$\leqslant$”的左端加入非负的松弛变量，在“$\geqslant$”的左端减去非负的剩余变量，从而把不等式化成等式。这时松弛变量或剩余变量目标函数中的价值系数应为零。

如例 1 的数学模型化为标准型后，即为

$$\max Z = 3x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\
x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\
3x_1 + x_5 = 15 \\
2x_2 + x_6 = 7 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geqslant 0
\end{cases}
\tag{1-7}
$$

这里松弛变量 x_3、x_4、x_5、x_6 表示没有被利用的资源数量。

又如例 2 的数学模型化成标准型后即为

$$
\max(-Z) = -x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6
$$

$$
\begin{cases}
x_1 + 4x_2 - x_3 = 120 \\
x_1 + x_2 - x_4 = 45 \\
2x_1 - x_5 = 20 \\
3x_1 + 2x_2 - x_6 = 90 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geqslant 0
\end{cases}
\tag{1-8}
$$

这里剩余变量 x_3、x_4、x_5、x_6 表示满足最低需求后多出的产品数量。

二、线性规划问题的解

线性规划问题的数学模型经标准化后都可变成如式 (1-4)、(1-5)、(1-6) 的形式。仅满足约束条件 (1-5)、(1-6) 的解称为可行解，而满足目标 (1-4) 的解则称为最优解。

式 (1-5) 中，有这样一类变量：只有在某一行，其系数为 1，在其他行其系数全为零，这种变量在 m 行中全都存在，这 m 个变量统称为基变量，基变量的集合称为基底，基底之外的其他变量统称为非基变量。

若令非基变量的值都为零，由 (1-5) 式直接得出各基变量等于相应所在行的限定常量，这样的一组解称为基本解。显然基本解满足式 (1-5)。如果基本解满足非负条件 (1-6)，则称之为基可行解。

可以论证 (此处不证)，每组基可行解就是可行域的一个顶点，由于顶点的个数是有限的，故基可行解的组数也是有限的。这就是线性规划的基本原理之二。

由线性规划基本原理可知，若线性规划存在最优解，则一定在可行域的某顶点处得到。所以，满足目标函数 (1-4) 的基可行解必然是最优解。

例如，在例 1 的标准型 (1-7) 中，x_3、x_4、x_5、x_6 是初始的基变量，则 x_1、x_2 是非基变量，若令 $x_1=x_2=0$，由约束方程组可得 $x_3=6$，$x_4=8$，$x_5=15$，$x_6=7$，显然它满足非负条件 (1-6)，故初始解 $X^{(0)}=(0, 0, 6, 8, 15, 7)^T$ 是基可行解。由于它的目标函数值 $Z=3\times0+5\times0+0\times6+0\times8+0\times15+0\times7=0$，并不满足最大值的要求，因此并非最优解。

三、单纯形法

单纯形法是解决从基可行解中找出最优解的方法，也是求解线性规划问题的最基本的方法。根据上述线性规划的两个基本原理，自然会想到求最优解的途径：选取一个初

始基可行解 $X^{(0)}$，代入目标函数得 $Z(X^{(0)})$，然后在 $X^{(0)}$ 的基础上换一个基可行解 $X^{(1)}$，使 $Z(X^{(1)})>Z(X^{(0)})$。照此，用迭代法逐次迭代，经有限个步骤就可求得使目标函数值达最大的基可行解，从而求得线性规划问题的最优解。这就是单纯形法的指导思想。为此，首先要确定初始基可行解，也就是找出初始的基底，其方法如下：

(1) 当原数学模型的约束条件是"≤"形式的不等式时，经标准化后，正好令松弛变量为初始基变量。

(2) 观察原数学模型中约束方程组系数矩阵，若有线性独立的单位列向量，则可令其相应的变量为初始基变量。

(3) 当上述两个过程确定的基变量个数不足约束条件数 m 时，可在不含基变量的约束方程等式左端分别加上非负的人工变量。若原问题有解，则人工变量必须为零，故它的价值系数应取 $-M$（M 为充分大的正数)，这样，总能得到一个初始基底。

有时为了方便起见，可不经过程 (2) 而直接由方法 (1) 或 (3) 求得初始基底。

例如，例 1 问题的模型 (1-7) 中，就可取松弛变量 x_3、x_4、x_5、x_6 为初始基变量构成初始基底。

初始基底确定后，重新编排变量序号，总能使初始基变量为 x_{n+1}，x_{n+2}，…，x_{n+m}，非基变量为 x_1，x_2，…，x_n。这样，线性规划问题可表示成下列联立方程组的形式：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+x_{n+1} & =b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \qquad +x_{n+2} & =b_2 \\ \qquad \cdots \qquad\qquad\qquad \ddots & \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \qquad\qquad +x_{m+n} & =b_m \\ c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n+c_{n+1}x_{n+1}+\cdots+c_{n+m}x_{n+m}-Z & =0 \end{cases}$$

这里，x_1，x_2，…，$x_{n+m}\geqslant 0$，要求 Z 取极大值。

用矩阵和向量可表示为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & & & & & \ddots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n & c_{n+1} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{n+m} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+m} \\ -Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \end{bmatrix}$$

为了便于迭代计算，将联立方程组写成系数的增广矩阵形式，即

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x_{n+1} & x_{n+2} & \cdots & x_{n+m} & -Z & b \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & b_2 \\ \cdots & & & & & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & b_m \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n & c_{n+1} & c_{n+2} & \cdots & c_{n+m} & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

将 $-Z$ 看作不参与基底变换的基变量，为保持 x_{n+1}，x_{n+2}，…，x_{n+m} 仍为基变量，可利用矩阵的初等变换使 c_{n+1}，c_{n+2}，…，c_{n+m} 全变为零，即

$$
\begin{array}{cccccccccc}
x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x_{n+1} & x_{n+2} & \cdots & x_{n+m} & -Z & b \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccccccccc:c}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & b_2 \\
 & & \cdots & & & & & & & \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & b_m \\
\sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -\sum_{i=1}^{m} c_{n+i} b_i
\end{array}\right]
$$

其中：

$$\sigma_1 = c_1 - \sum_{i=1}^{m} c_{n+i} a_{i1}$$

$$\sigma_2 = c_2 - \sum_{i=1}^{m} c_{n+i} a_{i2}$$

$$\cdots$$

$$\sigma_n = c_n - \sum_{i=1}^{m} c_{n+i} a_{in}$$

即

$$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_{n+i} a_{ij} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

由矩阵最后一行可看出

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_j x_j - Z = - \sum_{i=1}^{m} c_{n+i} b_i$$

即

$$Z = \sum_{i=1}^{m} c_{n+i} b_i + \sum_{j=1}^{n} \sigma_j x_j$$

由此说明，σ_j ($i=1, 2, \cdots, n$) 相当于目标函数中非基变量 x_j 的系数，若所有 $\sigma_j \leqslant 0$，则该基可行解为最优解。其目标函数值 $Z = \sum_{i=1}^{m} c_{n+i} b_i$ 为最大。否则，若存在有 $\sigma_j > 0$，则该基可行解不是最优解，所以称 σ_j 为检验数。当检验数出现正值时，必须利用增广矩阵的初等变换进行基底变换，选择新的基可行解，重复检查检验数，如此反复迭代运算直至求得最优解。

单纯形法可以通过单纯形表计算。表1-5列出了初始单纯形表(迭代步0)的编制形式。表中 x_B、c_B 两栏分别为基变量及其价值系数。有了初始单纯形表，就可以在表上逐步进行迭代运算以求得最优解。

下面结合例1说明单纯形法计算的具体步骤：

第Ⅰ步：建立初始单纯形表。

(i) 根据模型 (1-7)，将 A，b，c 值按表1-5规定，逐项填入表1-6迭代步0中的相应位置。这里 $n=2$，$m=4$。

(ii) 确定初始基变量为 x_3、x_4、x_5、x_6。将所有基变量及其价值系数填入表1-6的 x_B、c_B 所在列的相应位置上。这时在表上就可以直接得到一组初始基可行解：

表1-5　初始单纯形表

迭代号	c_B	x_B	c_j: c_1	c_2	$\cdots$	c_n	c_{n+1}	$\cdots$	c_{n+m}	b	θ
			x_j: x_1	x_2	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	$\cdots$	x_{n+m}		
0	c_{n+1}	x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	1		0	b_1	θ_1
	c_{n+2}	x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	0	1		b_2	θ_2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$							$\vdots$	$\vdots$
	c_{n+m}	x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	0		1	b_m	θ_m
			σ_1	σ_2	$\cdots$	σ_n				$Z\,(X^{(0)})$	
1											

表1-6　（例1）问题的单纯形计算表

迭代号	c_B	x_B	c_j: 3	5	0	0	0	0	b	θ
			x_j: x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
0	x_3	x_3	1	1	1	0	0	0	6	6
	x_4	x_4	1	2	0	1	0	0	8	4
	x_5	x_5	3	0	0	0	1	0	15	
	x_6	x_6	0	[2]	0	0	0	1	7	3.5
			3	5	0	0	0	0	0	
1	0	x_3	1	0	1	0	0	−0.5	2.5	2.5
	0	x_4	[1]	0	0	1	0	−1	1	1
	0	x_5	3	0	0	0	1	0	15	5
	0	x_2	0	1	0	0	0	0.5	3.5	
			3					−2.5	17.5	
2	0	x_3	0	0	1	−1	0	[0.5]	1.5	3
	3	x_1	1	0	0	1	0	−1	1	
	0	x_5	0	0	0	−3	1	3	12	4
	5	x_2	0	1	0	0	0	0.5	3.5	7
			0	0	0	−3	0	0.5	20.5	
3	0	x_6	0	0	2	−2	0	1	3	
	3	x_1	1	0	2	−1	0	0	4	
	0	x_5	0	0	−6	3	1	0	3	
	5	x_2	0	1	−1	1	0	0	2	
			0	0	−1	−2	0	0	22	

$$X^{(0)} = (0,0,6,8,15,7)^{\mathrm{T}}$$

（iii）计算目标函数值，目标函数值可按下式计算

$$Z = \sum_{i=1}^{n} c_i b_i \tag{1-9}$$

式中：c_i——c_B 列上第 i 行的价值系数（在初始单纯形表上即 c_{n+i}）；

b_i——b 列上第 i 行的限定常数。

将表1-6中有关数字代入公式，可得初始基可行解相应的目标函数值：

$$Z = (X^{(0)}) = \sum_{i=1}^{4} c_i b_i = 0 \times 6 + 0 \times 8 + 0 \times 15 + 0 \times 7 = 0$$

将 $Z=(X^{(0)})=0$ 填入迭代步0中的相应位置上。

第Ⅰ步：计算并检查检验数 σ_j。

检验数相当于目标函数中非基变量的价值系数，检验数若大于零，说明当非基变量变为可以取正值的基变量时，目标函数值将增大，所以检验数大于零的基可行解不是最优解，应进一步施行基底变换。反之，检验数为负数或零，即使非基变量为正值时也不能使目标函数值增大，故该基可行解必为最优解。因此，检验数是判断本迭代步的基可行解是否为最优解的依据，它的计算可按下列公式进行：

$$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} \tag{1-10}$$

式中：σ_j、c_j——x_j 所在列的检验数和价值系数；

c_i——c_B 列上第 i 行的价值系数（在初始单纯形表上即为 c_{n+i}）；

a_{ij}——约束方程组系数矩阵的第 i 行第 j 列元素。

如表1-6可算出：

$$\sigma_1 = c_1 - \sum_{i=1}^{4} c_i a_{i1} = 3 - (0 \times 1 + 0 \times 1 + 0 \times 3 + 0 \times 0) = 3$$

$$\sigma_2 = c_2 - \sum_{i=1}^{4} c_i a_{i2} = 5 - (0 \times 1 + 0 \times 2 + 0 \times 0 + 0 \times 2) = 5$$

若用 Z_j 表示 $\sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$，则公式（1-10）可写成 $\sigma_j = c_j - Z_j$。

可以验证，基变量对应的检验数恒为零。即 $\sigma_3=\sigma_4=\sigma_5=\sigma_6=0$。

对每组基可行解都需要检查检验数，若：

(i) 所有检验数 $\sigma_j \leqslant 0$（$j=1$，2，…，n），则已得到最优解。计算到此结束。

(ii) 存在一个 $\sigma_k > 0$，它所对应的列向量元素均有 $a_{ik} \leqslant 0$（$i=1$，2，…，m），则原问题无最优解，否则转下步。由于表1-6迭代步0中 $\sigma_1=3>0$，$\sigma_2=5>0$，而且其所在的列向量 P_1、P_2 均有正分量，故转下步。

第Ⅱ步：确定换入变量。

为了使目标函数尽快增大，自然就想到应选择 $\sigma_j>0$ 中最大者所对应的变量为换入变量。

即
$$\sigma_k = \max_{\sigma_j > 0}(\sigma_j) \tag{1-11}$$

则 σ_k 对应的（第 k 列对应的）x_k 确定为换入变量。由表1-6知：$\sigma_k=\max(3,5)=5$，而