



陈保权 高泰勤 主编

医用高等数学



内容提要

本书内容包括函数与极限、导数与微分、不定积分与定积分、微分方程、多元函数微积分、概率论初步、行列式与矩阵。

本书注意结合医学实际,便于掌握应用,可供医学院校临床医学、预防医学等专业本科生、研究生和医学科研人员使用。

责任编辑:许纪森

封面设计:陈益平

医用高等数学

陈保权 高慕勤 主编

中国纺织大学出版社出版发行

(上海延安西路1882号 邮编200051)

丹阳兴华印刷厂印刷

开本:850×1168 1/32,印张11.25 字数330千字

1996年7月第1版 1996年7月第1次印刷

印数:00001-10000 定价:9.80元

ISBN 7-81038-093-1/O·03

前 言

现代医学的迅速发展,使医学领域的各个学科正日益从定性描述向定量分析深化。高等医学院的本科生和研究生具有一定高等数学知识已成为必需,医用高等数学是医学院校各专业的必修课程之一。

经过多年的教学实践,在原有交流协作的基础上,上海铁道大学医学院,上海第二军医大学,上海医科大学,上海第二医科大学,浙江医科大学,南京医科大学,南京铁道医学院,济南军区医学高等专科学校等数学同仁决定联合编写本书,由陈保权、高慕勤任主编。在发起和联合编写的过程中,得到浙江医科大学周怀梧教授、南京医科大学黄大颀教授和上海医科大学孙伟民教授的关心和指导,在此表示由衷的谢忱。

本书共分八章,内容包括函数与极限,一元函数微积分,常微分方程,多元函数微积分,概率论初步以及行列式与矩阵。

在编写过程中力求做到:基本概念清楚、正确,讲述简明实用,便于教学。本书适合医学院校临床医学、预防医学等各专业作为教材,也可供医学科研人员作为参考书。

限于编者水平,难免有欠缺和不妥之处,恳请读者批评指正。

编者

1996年4月

本书编写人员名单

编者(按章节顺序)

陈诤词 (南京铁道医学院)
张 勤 (南京铁道医学院)
舒 康 (济南军区医学高等专科学校)
王建明 (上海第二医科大学)
高慕勤 (上海第二军医大学)
祝国强 (上海第二军医大学)
赵耐青 (上海医科大学)
丁 勇 (南京医科大学)
金 显 (浙江医科大学)
陈保权 (上海铁道大学医学院)
李春景 (上海铁道大学医学院)
马志敏 (上海铁道大学医学院)

目 录

第一章 函数、极限与连续

第一节 函数	(1)
一、函数的概念	(1)
二、复合函数	(4)
三、初等函数	(4)
习题 1-1	(5)
第二节 极限	(6)
一、数列极限	(6)
二、函数的极限	(7)
三、极限的四则运算法则	(12)
四、两个重要极限	(14)
习题 1-2	(16)
第三节 无穷小量与无穷大量	(17)
一、无穷小量	(17)
二、无穷小量的阶	(18)
三、无穷大量	(19)
习题 1-3	(19)
第四节 函数的连续性	(20)
一、函数连续性的概念	(20)
二、函数的间断点	(22)
三、连续函数的性质	(24)
习题 1-4	(27)

第二章 导数与微分

第一节 导数概念	(29)
一、变化率问题	(29)
二、导数的定义及几何意义	(32)
三、几个基本初等函数的导数	(35)
四、函数的连续性与可导性的关系	(38)
习题 2-1	(40)
第二节 求导法则	(41)
一、函数四则运算的求导法则	(41)
二、复合函数的求导法则	(43)
三、隐函数的求导法	(46)
四、幂函数、指数函数和反三角函数的导数	(47)
五、基本初等函数的导数公式	(48)
六、高阶导数	(50)
习题 2-2	(52)
第三节 中值定理与罗必塔法则	(54)
一、拉格朗日中值定理	(54)
二、罗必塔法则	(56)
习题 2-3	(58)
第四节 导数的应用	(59)
一、函数的单调性	(59)
二、函数的极值	(61)
三、最大值、最小值问题	(65)
四、曲线的凹凸性和拐点	(67)
五、函数图形的描绘	(70)
习题 2-4	(73)
第五节 微分	(74)
一、微分概念	(74)

二、微分的运算法则	(78)
习题 2-5	(80)

第三章 不定积分

第一节 不定积分的概念与性质	(83)
一、不定积分的概念	(83)
二、基本积分公式	(85)
三、不定积分的性质	(87)
习题 3-1	(90)
第二节 换元积分法	(91)
一、第一类换元法	(91)
二、第二类换元法	(98)
习题 3-2	(104)
第三节 分部积分法	(106)
习题 3-3	(111)
第四节 有理函数的积分	(111)
习题 3-4	(115)
第五节 积分表的应用	(116)
习题 3-5	(118)

第四章 定积分及其应用

第一节 定积分的概念和性质	(119)
一、定积分概念	(119)
二、定积分性质	(125)
习题 4-1	(128)
第二节 定积分的计算	(128)
一、微分学的基本定理	(129)
二、定积分的计算法	(132)
习题 4-2	(136)

第三节 定积分的近似计算	(138)
一、矩形法和梯形法	(138)
二、抛物线法	(140)
习题 4-3	(143)
第四节 积分区间为无限的广义积分	(144)
习题 4-4	(147)
第五节 定积分的应用	(147)
一、微元法	(147)
二、平面图形的面积	(148)
三、旋转体的体积	(152)
四、变力所作的功	(154)
习题 4-5	(157)

第五章 微分方程

第一节 微分方程的基本概念	(159)
习题 5-1	(162)
第二节 一阶可分离变量的微分方程	(162)
习题 5-2	(166)
第三节 一阶线性微分方程	(167)
一、一阶线性微分方程	(167)
二、贝努里方程	(170)
习题 5-3	(172)
第四节 二阶常系数线性微分方程	(174)
一、二阶常系数齐次线性微分方程的性质	(174)
二、二阶常系数齐次线性微分方程的解法	(175)
三、二阶常系数非齐次线性微分方程	(178)
习题 5-4	(182)
第五节 微分方程在医学中的应用	(183)
一、肿瘤生长的数学模型	(183)
二、药物动力学室模型	(185)

习题 5-5	(187)
--------------	-------

第六章 多元函数微积分

第一节 多元函数	(188)
一、空间直角坐标系	(188)
二、多元函数的概念	(190)
三、二元函数的极限与连续性	(194)
习题 6-1	(196)
第二节 偏导数与全微分	(196)
一、偏导数	(196)
二、高阶偏导数	(200)
三、全微分	(201)
习题 6-2	(203)
第三节 多元复合函数的求导法则	(204)
习题 6-3	(207)
第四节 多元函数的极值	(207)
习题 6-4	(211)
* 第五节 最小二乘法	(211)
习题 6-5	(215)
第六节 二重积分	(216)
一、二重积分的概念	(216)
二、二重积分的性质	(217)
三、二重积分的计算	(218)
习题 6-6	(223)

第七章 概率论初步

第一节 随机事件及其运算	(225)
一、随机事件	(225)
二、事件的关系和运算	(227)

习题 7-1	(232)
第二节 概率的概念与计算	(233)
一、概率的概念	(233)
二、概率的性质与计算	(235)
习题 7-2	(238)
第三节 条件概率与事件的独立性	(239)
一、条件概率	(239)
二、事件的独立性	(240)
三、全概率公式和逆概率公式	(242)
四、贝努里概型	(244)
习题 7-3	(246)
第四节 随机变量及其概率分布	(247)
一、随机变量的概念	(247)
二、离散型随机变量及其分布	(248)
三、连续型随机变量及其分布	(252)
习题 7-4	(258)
第五节 随机变量的数字特征	(259)
一、数学期望及其性质	(259)
二、方差及其性质	(261)
三、几个常见分布的数学期望与方差	(262)
习题 7-5	(265)

第八章 行列式与矩阵

第一节 行列式	(267)
一、行列式的概念	(267)
二、行列式的性质	(270)
三、行列式的计算	(272)
四、 n 元线性方程组的行列式解法	(277)
习题 8-1	(279)
第二节 矩阵的概念和运算	(280)

一、矩阵的概念	(280)
二、矩阵的运算	(282)
习题 8-2	(288)
第三节 逆矩阵及其求法	(289)
一、逆矩阵	(290)
二、逆矩阵的求法	(290)
三、逆矩阵的性质	(294)
习题 8-3	(295)
第四节 矩阵的初等变换及其应用	(296)
一、矩阵的秩	(296)
二、矩阵的初等变换	(297)
三、用初等变换求逆矩阵	(299)
四、用行的初等变换解线性方程组	(300)
习题 8-4	(305)
习题答案	(306)
附录一 微积分基本公式和积分表	(330)
附录二 标准正态分布函数数值表	(345)

第一章 函数、极限与连续

函数是微积分学最主要的研究对象. 极限是人们从有限中了解无限, 从近似中得到精确, 从量变中认识质变的一种数学理论和方法, 它深化了人们对客观世界的认识. 极限方法是微积分学的基本研究方法.

第一节 函 数

一、函数的概念

现实世界中各种不同的变化着的事物不是孤立的, 而是相互联系相互制约的, 因此我们不但要研究事物的量的变化, 更重要的是要研究各个变量之间的相互依赖关系, 这种关系反映了事物的内在联系和内部规律. 函数概念正是这种变量间依赖关系的抽象和概括. 先考察医药生物学中的几个例子.

例 1 外界环境温度对人体代谢率的影响可表达如下:

环境温度($^{\circ}\text{C}$)	...4	10	20	30	38...
代谢率($\text{kcal}/(\text{h} \cdot \text{m}^2)$)	...60	44	40	40.5	54...

其中每一对数值可以在直角坐标系中找到相应的点, 于是便得到 A, B, C, D, E 五点, 见图 1-1. 医学中常用折线把它们连起来, 这时环境温度和代谢率两个变量之间的相互影响关系从图中便一目了然了.

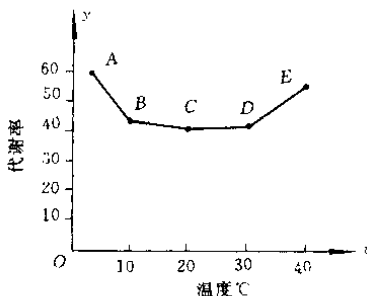


图 1-1

例 2 设某种细菌的繁殖个数 N 与时间呈指数生长规律

$$N = N_0 e^{\frac{t}{T_c}}$$

其中 N_0 为繁殖开始时细菌数, T_c 为生长周期, 均为正的常数.

综合上面两个例子, 我们得到这样一个共同点: 每个问题都包含着两个变量和一个确定的对应关系, 尽管这个对应关系的表达方式各有不同 (如例 1 中由表格或图像表示, 例 2 中由公式表示), 但都指明了两个变量间相互对应的具体内容. 这种两个变量间的对应关系就是函数概念的实质.

定义 设 x 与 y 是某个变化过程中的两个变量, 如果对于变量 x 的每一个允许取的值, 变量 y 依照一定的对应关系, 有唯一确定的值与之对应, 则称变量 y 为变量 x 的函数 (function), 记作

$$y = f(x)$$

其中 x 称为自变量, y 称为因变量. 自变量所有允许取的值的集合称为函数的定义域. 与自变量的值相对应的因变量的值称为函数值, 函数值的全体称为函数的值域.

关于函数定义的几点说明:

(1) 确定函数的要素有两条: 一是对应规律; 二是函数的定义

域. 要确定两个函数相同, 必须保证这两个要素相同. 例如 $y=1$ 与 $y=\sin^2x+\cos^2x, x\in(-\infty, +\infty)$, 是相同的函数. 又如 $y=x+1$ 与 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$, 虽然对应规律相同, 但定义域不同, 因此两个函数是不相同的.

(2) 关于函数的表示. 在函数定义中, 对函数的表示方法未加任何限制, 它可以用解析式于表达, 也可通过表格、图示或其它方式.

(3) 函数定义域的确定. 当 x 取 x_0 时, 函数有确定的对应值 $f(x_0)$, 那么就称函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义. 因此, 函数的定义域就是使函数有定义的自变量取值的全体.

例 3 求函数 $y=\frac{\sqrt{x+1}}{\sin\pi x}$ 的定义域.

解: 使该函数有定义的 x 值须满足

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ \sin\pi x \neq 0 \end{cases}$$

即 $x \geq -1$ 且 $x \neq n, (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

或用区间表示为 $(n, n+1), (n=-1, 0, 1, 2, \dots)$

例 4 有人在一项研究中测得的血液中胰岛素浓度 $c(t)$ (单位/ml) 随时间 t (min) 的变化数据, 建立如下经验公式:

$$c(t) = \begin{cases} t(10-t), & 0 \leq t \leq 5 \\ 25e^{-k(t-5)}, & t > 5 \end{cases}$$

其中 k 为常数.

这里, 函数 $c(t)$ 的表达式与我们通常遇到的函数表达式有所不同. 其函数关系是用两个解析式表示的. 有时, 还会遇到用两个以上解析式表示的函数, 这种在函数定义域的不同部分用不同的解析式表示的是一个函数, 它称为分段函数. 在求分段函数的函数值时, 必须将自变量的值代入它所对应的解析式计算. 例 4 中, 函

数的定义域为 $[0, +\infty)$, 当 $t=2$ 时, 对应的浓度 $c(2)=2 \times (10-2)=16$, 当 $t=10$ 时, 对应的浓度 $c(10)=25e^{-k(10-5)}=25e^{-5k}$.

二、复合函数

定义 设 $y=f(u)$, 而 $u=\varphi(x)$, 且 x 在函数 $\varphi(x)$ 的定义域或其一部分上取值时所对应的 u 值, 函数 $y=f(u)$ 是有定义的, 则称 y 是 x 的复合函数, 记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

其中 u 称为中间变量.

例如, $y=\sin u$, $u=\sqrt{x}$, 经复合可以得到 y 关于 x 的复合函数 $y=\sin \sqrt{x}$.

以上是两个函数的“嵌套”关系构成的复合函数, 不难将其推广到有限个函数的层层“嵌套”关系构成的复合函数. 例如, $y=\lg u$, $u=1+\sqrt{v}$, $v=1+x^2$, 可以复合成 y 关于 x 的复合函数 $y=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$.

但须注意, 不是任意两个函数都可以复合的. 例如, $y=\sqrt{1-u^2}$, $u=x^2+2$ 就不能复合成 $y=\sqrt{1-(x^2+2)^2}$, 因为 $u=x^2+2$ 的值域为 $[2, +\infty)$ 与 $y=\sqrt{1-u^2}$ 的定义域 $[-1, 1]$ 的交集是空集, 因此不能复合.

将若干个简单函数“复合”只是一种层层“代入”的运算. 我们还应掌握把一个复杂的复合函数分解为若干个简单的函数. 例如, $y=(\operatorname{arctg} e^x)^2$ 是由 $y=u^2$, $u=\operatorname{arctg} v$, $v=e^x$ 复合而成, 这种从外到里层层分解, 以后的微分运算中经常用到.

三、初等函数

中学里学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数, 统称为基本初等函数.

定义 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的复合所构成的由一个解析式子表示的函数,称为初等函数.

例如,多项式函数 $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$, 有理分式函数 $y=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}$, 以及 $y=\sqrt{\operatorname{ctg} 3x}+e^{1+x}$, 等都是初等函数. 但须注意: 分段函数不是初等函数.

习题 1-1

1. 下列各题中的两个函数是否相同? 为什么?

$$(1) y=x, \quad y=\sqrt{x^2};$$

$$(2) y=\lg x^2, \quad y=2\lg x;$$

$$(3) y=\sqrt{1-x^2}, \quad x^2+y^2=1.$$

2. 求下列函数的定义域:

$$(1) y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2};$$

$$(2) y=\frac{1}{|x|-x};$$

$$(3) y=\frac{1}{\lg x};$$

$$(4) y=\ln(x+\sqrt{x^2+1});$$

$$(5) y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2};$$

$$(6) y=\arcsin \frac{x-2}{5-x}.$$

3. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 问 $f(x^2)$, $f(\sin x)$, $f(x+a)$ ($a>0$) 的定义域各是什么?

4. 设 $f(x)=\ln x$, 证明

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$

5. 设

$$f(x)=\begin{cases} -1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 2x, & x>0 \end{cases}$$

求 $f(-2), f(0), f(2)$, 并作函数的图形.

6. 设婴儿出生时的体重平均为 3000g, 从出生起至 6 个月, 每月长 600g, 6 个月后至 12 个月, 每月长 500g, 试写出婴儿从出生至一岁其体重与月龄的关系式, 若一婴儿刚满 10 个月, 试估计其体重.

7. 在下列各题中, 求由所给函数复合而成的函数

$$(1) y=u^2, \quad u=\sin x;$$

$$(2) y=\sin u, \quad u=x^2;$$

$$(3) y=e^u, \quad u=x^2;$$

$$(4) y=u^2, \quad u=e^x.$$

8. 将下列复合函数分解成基本初等函数, 或基本初等函数的和、差、积、商

$$(1) y=\sin 2x;$$

$$(2) y=\cos^2 x;$$

$$(3) y=\sin^3 \frac{x}{2};$$

$$(4) y=\sqrt[3]{(1+x)^2};$$

$$(5) y=\operatorname{tg} \frac{x}{2};$$

$$(6) y=e^{\frac{1}{x}};$$

$$(7) y=\arcsin \frac{1-x}{1+x};$$

$$(8) y=\ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}};$$

$$(9) y=\sqrt{\ln \frac{1-x}{1+x}};$$

$$(10) y=\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}.$$

第二节 极 限

极限是描述在自变量的某个变化过程中, 对应的函数值的变化趋势.

一、数列极限

因为数列是以自然数为自变量的一种特殊函数, 它的自变量 n 是离散取值的, $n=1, 2, \dots$. 因此对数列 $\{u_n\}$, 只需讨论当自变量 n 无限增大时, 因变量 u_n 的变化趋势.