陈保权　高蔡勒　主编

医用高等数学

内容提要

本书内容包括函数与极限、导数与微分，不定积分与定积分，微分方程，多元函数微积分，概率论初步，行列式与矩阵。

本书注意结合医学实际，便于掌握应用，可供医学院校临床医学、预防医学等专业本科生、研究生和医学科研人员使用。

责任编辑：许纪森

封面设计：陈益平

医用高等数学

陈保权　高慕勤　主编

中国纺织大学出版社出版发行

（上海延安西路1882号　邮编200051）

丹阳兴华印刷厂印刷

开本：850×1168　1/32，印张11.25字数330千字

1996年7月第1版　1996年7月第1次印刷

印数：00001-10000　　定价：9.80元

ISBN　7-81038-093-1/O·03

前 言

现代医学的迅速发展,使医学领域的各个学科正日益从定性描述向定量分析深化。高等医学院的本科生和研究生具有一定高等数学知识已成为必需,医用高等数学是医学院校各专业的必修课程之一.

经过多年的教学实践,在原有交流协作的基础上,上海铁道大学医学院,上海第二军医大学,上海医科大学,上海第二医科大学,浙江医科大学,南京医科大学,南京铁道医学院,济南军区医学高等专科学校等数学同仁决定联合编写本书,由陈保权、高嘉勤任主编。在发起和联合编写的过程中,得到浙江医科大学周怀梧教授、南京医科大学黄大观教授和上海医科大学孙伟民教授的关心和指导,在此表示由衷的谢忱.

本书共分八章,内容包括函数与极限,一元函数微积分,常微分方程,多元函数微积分,概率论初步以及行列式与矩阵.

在编写过程中力求做到:基本概念清楚、正确,讲述简明实用,便于教学。本书适合医学院校临床医学、预防医学等各专业作为教材,也可供医学科研人员作为参考书.

限于编者水平,难免有欠缺和不妥之处,恳请读者批评指正.

编者

1996 年 4 月

本书编写人员名单

编 者（按章节顺序）

陈诤词　（南京铁道医学院）
张　勤　（南京铁道医学院）
舒　康　（济南军区医学高等专科学校）
王建明　（上海第二医科大学）
高慕勤　（上海第二军医大学）
祝国强　（上海第二军医大学）
赵耐青　（上海医科大学）
丁　勇　（南京医科大学）
金　显　（浙江医科大学）
陈保权　（上海铁道大学医学院）
李春景　（上海铁道大学医学院）
马志敏　（上海铁道大学医学院）

目　录

第一章　函数、极限与连续

第二章　导数与微分

第三章 不定积分

第四章 定积分及其应用

第五章　微分方程

第六章　多元函数微积分

第七章　概率论初步

第八章　行列式与矩阵

第一章　函数、极限与连续

函数是微积分学最主要的研究对象.极限是人们从有限中了解无限，从近似中得到精确，从量变中认识质变的一种数学理论和方法，它深化了人们对客观世界的认识.极限方法是微积分学的基本研究方法.

第一节　函　　数

一、函数的概念

现实世界中各种不同的变化着的事物不是孤立的，而是相互联系相互制约的，因此我们不但要研究事物的量的变化，更重要的是要研究各个变量之间的相互依赖关系，这种关系反映了事物的内在联系和内部规律.函数概念正是这种变量间依赖关系的抽象和概括.先考察医药生物学中的几个例子.

例 1　外界环境温度对人体代谢率的影响可表达如下：

环境温度(°C)	…4	10	20	30	38…
代谢率($kcal/(h\cdot m^2)$)	…60	44	40	40.5	54…

其中每一对数值可以在直角坐标系中找到相应的点，于是便得到 A、B、C、D、E 五点，见图 1-1.医学中常用折线把它们连起来，这时环境温度和代谢率两个变量之间的相互影响关系从图中便一目了然了.

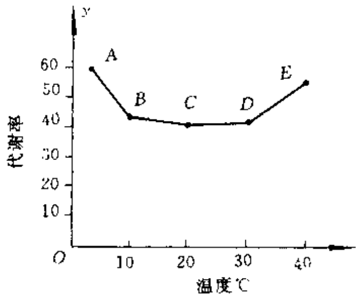

图 1-1

例 2　设某种细菌的繁殖个数 N 与时间呈指数生长规律

$$N=N_0e^{\frac{t}{T_c}}$$

其中 N_0 为繁殖开始时细菌数，T_c 为生长周期，均为正的常数.

综合上面两个例子，我们得到这样一个共同点：每个问题都包含着两个变量和一个确定的对应关系，尽管这个对应关系的表达方式各有不同(如例 1 中由表格或图像表示，例 2 中由公式表示)，但都指明了两个变量间相互对应的具体内容. 这种两个变量间的对应关系就是函数概念的实质.

定义　设 x 与 y 是某个变化过程中的两个变量，如果对于变量 x 的每一个允许取的值，变量 y 依照一定的对应关系，有唯一确定的值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数(function)，记作

$$y=f(x)$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量. 自变量所有允许取的值的集合称为函数的定义域. 与自变量的值相对应的因变量的值称为函数值，函数值的全体称为函数的值域.

关于函数定义的几点说明：

(1)确定函数的要素有两条：一是对应规律；二是函数的定义

域.要确定两个函数相同,必须保证这两个要素相同.例如 $y=1$ 与 $y=\sin^2x+\cos^2x, x\in(-\infty,+\infty)$,是相同的函数.又如 $y=x+1$ 与 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$,虽然对应规律相同,但定义域不同,因此两个函数是不相同的.

(2)关于函数的表示.在函数定义中,对函数的表示方法未加任何限制,它可以用解析式于表达,也可通过表格、图示或其它方式.

(3)函数定义域的确定.当 x 取 x_0 时,函数有确定的对应值 $f(x_0)$,那么就称函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义.因此,函数的定义域就是使函数有定义的自变量取值的全体.

例 3 求函数 $y=\frac{\sqrt{x+1}}{\sin\pi x}$ 的定义域.

解: 使该函数有定义的 x 值须满足

$$\begin{cases} x+1\geqslant 0 \\ \sin\pi x\neq 0 \end{cases}$$

即 $$x\geqslant -1 \text{ 且 } x\neq n, (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

或用区间表示为 $(n,n+1),(n=-1,0,1,2,\cdots)$

例 4 有人在一项研究中测得的血液中胰岛素浓度 $c(t)$(单位/ml)随时间 t(min)的变化数据,建立如下经验公式:

$$c(t)=\begin{cases} t(10-t), & 0\leqslant t\leqslant 5 \\ 25e^{-k(t-5)}, & t>5 \end{cases}$$

其中 k 为常数.

这里,函数 $c(t)$ 的表达式与我们通常遇到的函数表达式有所不同.其函数关系是用两个解析式表示的.有时,还会遇到用两个以上解析式表示的函数,这种在函数定义域的不同部分用不同的解析式表示的是一个函数,它称为分段函数.在求分段函数的函数值时,必须将自变量的值代入它所对应的解析式计算.例 4 中,函

数的定义域为$[0,+\infty)$，当 $t=2$ 时，对应的浓度 $c(2)=2\times(10-2)=16$，当 $t=10$ 时，对应的浓度 $c(10)=25e^{-k(10-5)}=25e^{-5k}$.

二、复合函数

定义 设 $y=f(u)$，而 $u=\varphi(x)$，且 x 在函数 $\varphi(x)$ 的定义域或其一部分上取值时所对应的 u 值，函数 $y=f(u)$ 是有定义的，则称 y 是 x 的复合函数，记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

其中 u 称为中间变量.

例如，$y=\sin u$，$u=\sqrt{x}$，经复合可以得到 y 关于 x 的复合函数 $y=\sin\sqrt{x}$.

以上是两个函数的"嵌套"关系构成的复合函数，不难将其推广到有限个函数的层层"嵌套"关系构成的复合函数. 例如，$y=\lg u$，$u=1+\sqrt{v}$，$v=1+x^2$，可以复合成 y 关于 x 的复合函数 $y=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$.

但须注意，不是任意两个函数都可以复合的. 例如，$y=\sqrt{1-u^2}$，$u=x^2+2$ 就不能复合成 $y=\sqrt{1-(x^2+2)^2}$，因为 $u=x^2+2$ 的值域为$[2,+\infty)$与 $y=\sqrt{1-u^2}$ 的定义域$[-1,1]$的交集是空集，因此不能复合.

将若干个简单函数"复合"只是一种层层"代入"的运算. 我们还应掌握把一个复杂的复合函数分解为若干个简单的函数. 例如，$y=(\mathrm{arctg}e^x)^2$ 是由 $y=u^2$，$u=\mathrm{arctg}v$，$v=e^x$ 复合而成. 这种从外到里层层分解，以后的微分运算中经常用到.

三、初等函数

中学里学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，统称为基本初等函数.

定义 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的复合所构成的由一个解析式子表示的函数,称为初等函数.

例如,多项式函数 $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$,有理分式函数 $y=\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}$,以及 $y=\sqrt{\mathrm{ctg}3x}+\mathrm{e}^{1+x}$,等都是初等函数.但须注意:分段函数不是初等函数.

习题 1-1

1. 下列各题中的两个函数是否相同?为什么?

(1) $y=x$,　　$y=\sqrt{x^2}$;

(2) $y=\lg x^2$,　　$y=2\lg x$;

(3) $y=\sqrt{1-x^2}$,　　$x^2+y^2=1$.

2. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$;　　(2) $y=\dfrac{1}{|x|-x}$;

(3) $y=\dfrac{1}{\lg x}$;　　(4) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$;

(5) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$;　　(6) $y=\arcsin\dfrac{x-2}{5-x}$.

3. 设 $f(x)$的定义域是$[0,1]$,问 $f(x^2)$, $f(\sin x)$, $f(x+a)$ $(a>0)$的定义域各是什么?

4. 设 $f(x)=\ln x$,证明

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

5. 设

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 2x, & x>0\end{cases}$$

求 $f(-2)$、$f(0)$、$f(2)$，并作函数的图形.

6. 设婴儿出生时的体重平均为 3000g，从出生起至 6 个月，每月长 600g，6 个月后至 12 个月，每月长 500g. 试写出婴儿从出生至一岁其体重与月龄的关系式，若一婴儿刚满 10 个月，试估计其体重.

7. 在下列各题中，求由所给函数复合而成的函数

(1) $y=u^2$, $u=\sin x$;

(2) $y=\sin u$, $u=x^2$;

(3) $y=e^u$, $u=x^2$;

(4) $y=u^2$, $u=e^x$.

8. 将下列复合函数分解成基本初等函数，或基本初等函数的和、差、积、商

(1) $y=\sin 2x$; (2) $y=\cos^2 x$;

(3) $y=\sin^3\dfrac{x}{2}$; (4) $y=\sqrt[3]{(1+x)^2}$;

(5) $y=\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$; (6) $y=e^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$;

(7) $y=\arcsin\dfrac{1-x}{1+x}$; (8) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

(9) $y=\sqrt{\ln\dfrac{1-x}{1+x}}$; (10) $y=\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$.

第二节 极 限

极限是描述在自变量的某个变化过程中，对应的函数值的变化趋势.

一、数列极限

因为数列是以自然数为自变量的一种特殊函数，它的自变量 n 是离散取值的，$n=1,2,\cdots$. 因此对数列 $\{u_n\}$，只需讨论当自变量 n 无限增大时，因变量 u_n 的变化趋势.