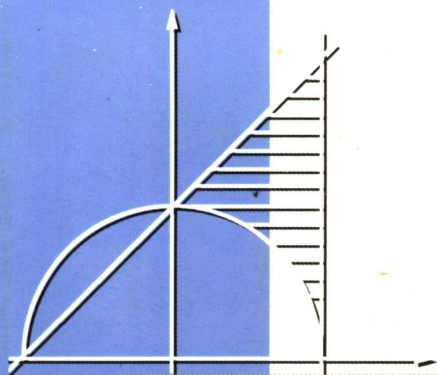


胡传孝 著



# 高等数学的 问题、方法与结构

GAODENG SHUXUE DE WENTI FANGFA YU JIEGOU

武汉大学出版社



# 高等数学的 问题、方法与结构

胡传孝 著

武汉大学出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

高等数学的问题、方法与结构/胡传孝著. —武汉: 武汉大学出版社, 1997. 8

ISBN 7-307-02466-7

I 高…

II 胡…

III 高等数学—教学参考资料

IV O13-42

**武汉大学出版社出版发行**

(430072 武昌 珞珈山)

湖北省安陆市印刷厂印刷

(432600 湖北省安陆市儒学路4号)

1997年8月第1版 2000年7月第2次印刷

开本: 787×1092 1/32 印张: 10

字数: 223千字 印数: 6001—9000

ISBN 7-307-02466-7/O·184 定价: 10.80元

**本书如有印装质量问题, 请寄承印厂调换**

## 内 容 简 介

本书分三编撰写。第一编为“问题篇”。本编选有 100 道作者在 20 年来高等数学教学中提出的设问、反问、置疑等题型。这些问题有助于强化概念、启迪思维,同时介绍了一些新的方法。因此,本编也为导学篇。第二编为“方法篇”。分适用于高等数学所有内容的“一般方法”和针对解各类高等数学问题的“特殊方法”两章撰写。方法新颖,分析透彻,选题典型。因此,本编是助学篇。第三编是“结构篇”。通过“三个两”和“三个一”将高等数学的全部内容抓本质、抓联系地进行了总结,有助于读者将高等数学的内容提纲挈领地储存在自己大脑的记忆库中。本编属总结提高篇。

本书根据国家教委制定的工科院校本科和专科高等数学基本要求来确定内容的深度与广度,个别地方略有提高。本书适合于非数学专业本、专科学生学习参考。

## 代 序

《高等数学》是大专院校各系科普遍设置的一门基础课，对培养学生的科学素质和掌握现代数学工具起着至关重要的作用，历来受到各大专院校领导和师生的重视。

在《高等数学》课的教学过程中，常会遇到一些值得思考的问题。它们不可能在教材中进行详细的讨论，但弄清这些问题，对提高学生的学习质量却又极为重要。胡传孝同志所著的《高等数学的问题、方法与结构》一书，正好能满足这方面的需要。它是作者在总结多年的教学经验之上写成的。

首先，在这本书的“问题篇”中，所列的问题多是根据学生的情况提出的设问、反问与置疑的题型。讨论中不仅注重强化概念，且介绍了考虑问题的方法、程序与着眼点。这有助于启迪学生的思维，提高其抽象思维和解决实际问题的能力。

在“方法篇”中，介绍了高等数学中通用的方法，它们也是学习其他自然科学时常用的方法，并有助于学习一些后续课程。这里还介绍了部分特殊方法。这也是学习高等数学时所必须的。

本书的“结构篇”，从概念间的本质联系出发，阐述了高

等数学的结构，有助于学生提纲挈领地掌握高等数学的全部内容。本篇实质上是对高等数学的一个较好总结。

总之，此书是本、专科各专业学生学习《高等数学》时的一本很好的参考书。对有关的数学教师来说，该书也很值得参考，对教学工作将有所裨益。特此推荐，以飨读者。

路见可于武汉大学

1997年7月10日

# 目 录

|           |   |
|-----------|---|
| 常用符号..... | 1 |
|-----------|---|

## 第一编 问题篇

|                     |   |
|---------------------|---|
| 第 1 章 函数的极限与连续..... | 5 |
|---------------------|---|

1. 教科书上说：“具有某种性质的事物的全体”这不是集合的定义，但又作为集合的定义在使用，这是为什么？ ..... 5
2. 如何说明有理点与无理点在实数轴上处处稠密？ ..... 6
3. 函数究竟有几大要素？ ..... 7
4. 分段函数客观存在吗？它是否是人为的？ ..... 7
5. 如何确定复合函数的定义域？ ..... 8
6. 怎样着手分解复合函数？ ..... 9
7. 奇偶函数代数和的结论中是否有矛盾？ ..... 10
8. 求极限时零因式为什么可以约分？ ..... 11
9.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}}$  ( $a > 1$ ) 和  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}}$  如何求解？ ..... 12
10. 无穷大是否可以分阶？其意义何在？ ..... 13

|                       |    |
|-----------------------|----|
| 第 2 章 导数、微分及其应用 ..... | 15 |
|-----------------------|----|

11. 用公式法与定义法求导数时，结果有时不一致，这是为什么？ ..... 15
12. 函数不连续的点处导数一定不存在吗？ ..... 16
13. 对幂指函数不用取对数的方法，能不能直接用公式求

|                                                                                                             |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 出其导数? .....                                                                                                 | 16 |
| 14. 根式求导方法十分繁琐, 有无简便方法可循? .....                                                                             | 17 |
| 15. 函数求导中有哪些简单方法? .....                                                                                     | 18 |
| 16. 微分概念很难理解, 其基本思想是什么? .....                                                                               | 20 |
| 17. 在用微分方法作近似计算时, $\Delta x$ 的取值原则是什么? ...                                                                  | 21 |
| 18. 拉格朗日微分中值定理有哪些形式? 其关系是怎样<br>的? .....                                                                     | 21 |
| 19. 用中值定理证明不等式应从哪儿入手? .....                                                                                 | 23 |
| 20. 各微分中值定理的关系是怎样的? .....                                                                                   | 24 |
| 21. 用泰勒公式证明函数不等式的思路是怎样的? .....                                                                              | 24 |
| 22. 不连续变量能不能通过洛必达法则求极限? .....                                                                               | 27 |
| 23. 用洛必达法则求极限有时很繁, 请问有无简化方法? ...                                                                            | 28 |
| 24. “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”、“ $\frac{0}{0}$ ”型极限是否一定能用洛必达法则求解? ...                                      | 30 |
| 25. 为什么无穷小因式可用等价无穷小代换? 而分子与分<br>母中代数和的无穷小项不能轻易用等价无穷小代换? ...                                                 | 31 |
| 26. 用泰勒公式求极限时, 应将函数展为几阶泰勒公式<br>为宜? .....                                                                    | 32 |
| 27. 当用公式求 $f(x)$ 的 $n$ 阶导函数很复杂时, 有没有求<br>$f^{(n)}(x_0)$ 的简便方法? .....                                        | 33 |
| 28. $O(0,0)$ 点的确为曲线 $L: \begin{cases} x=t^2, \\ y=3t+t^3 \end{cases}$ 的凸凹弧的分界<br>点, 但为什么不称它为 $L$ 的拐点? ..... | 34 |
| 29. 用求极值的方法证明不等式的思维过程是怎样的? .....                                                                            | 36 |
| <b>第 3 章  不定积分、定积分及其应用</b> .....                                                                            | 38 |
| 30. 原函数是否必为连续函数? $f(x)$ 的任何两个原函数<br>相差一个常数, 对吗? .....                                                       | 38 |



|                                                                                           |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 31. 积分为什么比微分难学? .....                                                                     | 38 |
| 32. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ 为什么不对? .....                                          | 39 |
| 33. 常用的凑微分公式有哪些? .....                                                                    | 40 |
| 34. 在不定积分的三角代换中, 各教材是否都存在一个<br>共同的错误? .....                                               | 42 |
| 35. 常用的变量替换公式有哪些? .....                                                                   | 44 |
| 36. 分部积分法分部原则是什么? .....                                                                   | 46 |
| 37. 为什么在分部积分法的第一部分积分中 $\int v'(x)dx = v(x)$ ,<br>而不写为 $\int v'(x)dx = v(x) + C_1$ ? ..... | 47 |
| 38. 在分部积分循环时, 所得结果的右边要硬加一个任意<br>常数 $C$ , 这样做的依据是什么? 加 $C$ 后等式还成立吗? ...                    | 48 |
| 39. 有理真分式化为四类简单分式的方法很繁, 有无简便<br>方法? .....                                                 | 49 |
| 40. 有理真分式积分的思维程序是什么? .....                                                                | 51 |
| 41. 三角有理函数积分的解题思路是怎样的? .....                                                              | 52 |
| 42. 既然万能代换一定能将 $\int R(\cos x, \sin x)dx$ 积出, 又何<br>必要考虑那么多其他方法呢? .....                   | 54 |
| 43. 求解简单无理函数的积分的方法有哪些? .....                                                              | 54 |
| 44. 在定积分的定义中, $\lambda \rightarrow 0$ 与 $n \rightarrow \infty$ 等价吗? .....                 | 57 |
| 45. 怎样的极限可用定积分求解? 用定积分求极限怎样定<br>限? .....                                                  | 58 |
| 46. 定积分的值与哪些因素有关? .....                                                                   | 60 |
| 47. 在讲积分区间可加性时, 公式两边的积分区间是不相<br>同的, 但等式为什么成立? .....                                       | 61 |
| 48. $F(x)$ 是一个积分上下限均为 $x$ 的函数的函数, 那么<br>$F(x)$ 的求导公式是怎样的? .....                           | 62 |

|                                                                                                  |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 49. 怎样证明 Cauchy 积分不等式? .....                                                                     | 63 |
| 50. 用 N-L 公式计算定积分不因所选原函数不同而结果<br>不同, 这是为什么? .....                                                | 64 |
| 51. 定积分是极限, 它的值怎么不唯一? .....                                                                      | 64 |
| 52. 同样的变换, 怎么有的结果正确, 有的却不正确呢? ...                                                                | 65 |
| 53. 被积函数的原函数不是初等函数的定积分, 能不能用<br>N-L (牛顿-莱布尼兹) 公式求解? .....                                        | 66 |
| 54. 如何正确表示被积函数为分段函数的积分上限函数? ...                                                                  | 68 |
| 55. 何为广义积分中值定理? 请举出应用实例. ....                                                                    | 69 |
| 56. 在什么条件下, 能由 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 的敛散性确定 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$<br>的敛散性? ..... | 70 |
| 57. 为什么引入这样两道古怪的广义积分? 其解法是怎<br>样的? .....                                                         | 71 |
| 58. 何为定积分的元素法? 元素法使用的条件和程序是<br>怎样的? .....                                                        | 74 |
| 59. 定积分在几何和物理的应用中有哪些公式? .....                                                                    | 76 |
| <b>第 4 章 矢量代数与解析几何</b> .....                                                                     | 79 |
| 60. 为什么要研究自由向量? .....                                                                            | 79 |
| 61. 向量加法与数乘的几何意义是什么? .....                                                                       | 79 |
| 62. 哪些图形的几何量可以用向量运算求解? 如何求解? ...                                                                 | 80 |
| 63. 空间向量与三坐标面夹角的余弦是否存在等量关系? ...                                                                  | 81 |
| 64. 求异面直线的公垂线的长有公式可循吗? .....                                                                     | 82 |
| 65. 如何用向量表示直线方程? 这种表示有什么优越性? ...                                                                 | 83 |
| 66. 何为直纹面? .....                                                                                 | 84 |
| <b>第 5 章 多元函数微分学</b> .....                                                                       | 86 |
| 67. $f(x, y_0) = \varphi(x)$ 与 $f(x, y_0) = f(x)$ 有何区别? .....                                    | 86 |

|                                                                                                        |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 68. 多元函数的极限与一元函数的极限可否有统一定义? ...                                                                        | 86        |
| 69. 若多元函数在闭区域 $D$ 上连续, 则多元函数在 $D$ 上<br>必有最值存在吗? .....                                                  | 87        |
| 70. 在 $u=f(x,y,z)$ 中, $\frac{\partial u}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 有何区别与联系? ..... | 88        |
| 71. 全微分公式 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$ 恒成立吗? .....             | 88        |
| 72. 多元函数的极限、连续、可导、可微的详细关系是<br>怎样的? .....                                                               | 89        |
| 73. 若 $x_0$ 为 $f(x,y_0)$ 的极值点, 点 $(x_0,y_0)$ 是否为 $z=f(x,y)$<br>的极值点? .....                             | 91        |
| <b>第 6 章 多元函数积分学</b> .....                                                                             | <b>93</b> |
| 74. 重积分与累次积分的关系是怎样的? .....                                                                             | 93        |
| 75. 二次积分一定能交换次序吗? .....                                                                                | 95        |
| 76. 何为确定重积分的积分区域的共同参与原则? .....                                                                         | 95        |
| 77. 化重积分为累次积分的原则是什么? .....                                                                             | 97        |
| 78. 在极坐标下, 函数的周期与函数图像的周期是否<br>相同? .....                                                                | 101       |
| 79. 何为画极坐标表示的曲线的四步作图法? .....                                                                           | 102       |
| 80. 何时化二重积分为极坐标下的二次积分计算比较<br>方便? .....                                                                 | 106       |
| 81. 如何交换三次积分的积分次序? .....                                                                               | 109       |
| 82. 在计算三重积分时, 何时使用先二后一法? 何时<br>使用先一后二法? .....                                                          | 111       |
| 83. 在讨论对坐标的(二型)曲线积分与路径无关时,<br>要加上条件“在单连通区域内”, 其作用是什么? .....                                            | 114       |
| 84. 积分 $\int_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 沿多条路径的值均                                                          |           |

|                                                                                               |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 相等, 能否说该积分与路径无关? .....                                                                        | 115 |
| 85. 不用行列式方法如何记住斯托克斯公式? .....                                                                  | 116 |
| 86. “三度”、“二量”的关系是怎样的? .....                                                                   | 117 |
| <b>第 7 章 级数</b> .....                                                                         | 120 |
| 87. 为什么求级数和的方法很少, 而判敛法却这么多呢? ...                                                              | 120 |
| 88. 在什么条件下有限个数的算术运算法则可以推广到<br>级数运算之中? .....                                                   | 120 |
| 89. 如何将循环小数写成级数的形式? .....                                                                     | 122 |
| 90. 用比较判别法时, 作为参照的级数有哪些, 一般以<br>什么形式最好? .....                                                 | 122 |
| 91. 在判别交错级数收敛时, 能否仅用条件: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$<br>来判定? .....                   | 123 |
| 92. 常数项级数判敛法的思维程序是怎样的? .....                                                                  | 124 |
| 93. 函数 $f(x)$ 的泰勒级数的和函数 $S(x)$ 等于 $f(x)$ 吗? ...                                               | 124 |
| 94. 用幂级数作近似计算时, 应注意什么? 如何才能加<br>快其收敛速度? .....                                                 | 126 |
| 95. 已知函数 $f(x)$ 在 $[-L, L]$ 上的表达式, 如何求 $f(x)$ 的<br>Fourier 级数的和函数 $S(x)$ 在任意一点 $x_0$ 处的值? ... | 128 |
| 96. 有人说, 级数一章, 体现了许多重要的哲学思想, 请<br>问其详? .....                                                  | 129 |
| 97. 如何判别无穷乘积的敛散性? .....                                                                       | 130 |
| <b>第 8 章 常微分方程</b> .....                                                                      | 133 |
| 98. 过 $xOy$ 平面上任何一点最多只有微分方程的一条积<br>分曲线吗? .....                                                | 133 |
| 99. 微分方程中的齐次方程与线性齐次方程中的“齐次”<br>二字的含义相同吗? .....                                                | 133 |

|                                       |     |
|---------------------------------------|-----|
| 160. 解一阶线性非齐次方程的常数变易法的思想是怎样产生的? ..... | 134 |
|---------------------------------------|-----|

## 第二编 方法篇

|                             |     |
|-----------------------------|-----|
| 第9章 通用方法 .....              | 139 |
| § 9.1 概念法 .....             | 139 |
| § 9.2 美的启迪——对称性方法 .....     | 141 |
| 一、美中的数学与数学中的美 .....         | 144 |
| 二、利用奇偶性画图 .....             | 145 |
| 三、利用函数奇偶性与区域对称性计算各种积分 ..... | 146 |
| 四、利用函数的对称性求导数 .....         | 154 |
| 五、区域对称性与函数对称性的综合应用 .....    | 155 |
| § 9.3 归纳类比法 .....           | 156 |
| 一、类比法 .....                 | 156 |
| 二、归纳法 .....                 | 159 |
| § 9.4 变量替换法 .....           | 163 |
| § 9.5 反证法与反驳 .....          | 169 |
| 一、反证法 .....                 | 169 |
| 二、20个反例 .....               | 173 |
| § 9.6 逆向思维法 .....           | 182 |
| § 9.7 观察 分析、猜想、验证法 .....    | 186 |
| 一、由不完全归纳产生猜想 .....          | 187 |
| 二、由直观产生猜想 .....             | 189 |
| 三、由理论产生猜想 .....             | 190 |
| 四、由类比产生猜想 .....             | 190 |
| § 9.8 执果索因法 .....           | 193 |

|                             |     |
|-----------------------------|-----|
| § 9.9 数学模型化方法 .....         | 197 |
| <b>第 10 章 特殊方法</b> .....    | 206 |
| § 10.1 求极限的方法 .....         | 206 |
| 一、通项分解法 .....               | 206 |
| 二、通项归一法 .....               | 208 |
| 三、有理化方法 .....               | 209 |
| 四、等价无穷小（无穷大）代换法 .....       | 211 |
| 五、两边夹法则（优界法） .....          | 212 |
| 六、利用两个重要极限求极限 .....         | 213 |
| 七、利用洛必达法则求极限 .....          | 215 |
| 八、利用函数的连续性求极限 .....         | 216 |
| 九、利用极限四则运算法则求极限 .....       | 217 |
| 十、利用定理求极限 .....             | 218 |
| 十一、利用变量替换法求极限 .....         | 218 |
| 十二、利用泰勒展开式求极限 .....         | 219 |
| 十三、用定积分求极限 .....            | 220 |
| 十四、利用导数求极限 .....            | 221 |
| 十五、利用级数收敛求极限 .....          | 222 |
| 十六、验证极限存在后用解方程的方法求其极限 ..... | 223 |
| 十七、分析、验算法求极限 .....          | 223 |
| 十八、利用极限存在的充分必要条件求极限 .....   | 226 |
| 十九、通项估算求极限 .....            | 227 |
| § 10.2 求极限时常出现的错误 .....     | 228 |
| 一、从有限到无限而产生的错误 .....        | 228 |
| 二、只注重形式而忽略本质产生的错误 .....     | 229 |
| 三、对定理理解不透而产生的错误 .....       | 230 |

|                                    |     |
|------------------------------------|-----|
| 四、由片面感性认识而产生的错误 .....              | 231 |
| 五、洛必达法则使用不当而产生的错误 .....            | 232 |
| § 10.3 求导数的方法与常见错误 .....           | 233 |
| 一、复合函数求导法 .....                    | 234 |
| 二、隐函数的求导法则 .....                   | 236 |
| 三、取对数求导法及注意事项 .....                | 239 |
| 四、利用微分形式的不变性求导 .....               | 240 |
| 五、化和求导法 .....                      | 241 |
| 六、用 Leibniz 公式求导 .....             | 242 |
| 七、用进行性方法求参数方程确定的函数的二阶<br>导数 .....  | 243 |
| 八、利用导数存在的充要条件求导数 .....             | 244 |
| 九、求导数时易出的错误 .....                  | 245 |
| § 10.4 计算积分的特殊方法 .....             | 246 |
| 一、变项法 .....                        | 246 |
| 二、解方程法 .....                       | 251 |
| 三、非初等函数相消法 .....                   | 252 |
| 四、计算三重积分的观察试算定限法 .....             | 254 |
| § 10.5 积分计算中常出现的错误及产生的<br>原因 ..... | 257 |
| 一、“ $0=1$ ”与“正数之和为负数”——概念错误 .....  | 257 |
| 二、由变量代换产生的错误 .....                 | 259 |
| 三、中间运算环节错误 .....                   | 262 |
| 四、计算多元积分时常出现的错误 .....              | 264 |
| § 10.6 级数计算的特殊方法与技巧 .....          | 270 |
| 一、通项变形判敛法 .....                    | 271 |
| 二、级数判敛的优劣界法 .....                  | 274 |

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| 三、函数项级数动态判敛法 .....       | 276 |
| 四、用变量替换法求函数项级数的收敛域 ..... | 278 |
| 五、函数展开成幂级数的间接方法 .....    | 280 |
| 六、数项级数间接求和法 .....        | 284 |
| 七、级数计算中的常见错误 .....       | 285 |

## 第三编 结构篇

|                        |     |
|------------------------|-----|
| 第 11 章 高等数学的结构 .....   | 291 |
| § 11.1 三个“两” .....     | 291 |
| 一、两个极限 .....           | 291 |
| 二、两个代表 .....           | 294 |
| 三、两种方法 .....           | 298 |
| § 11.2 三个“一” .....     | 299 |
| 一、一条纽带 .....           | 299 |
| 二、一个关系 .....           | 300 |
| 三、一个对象 .....           | 300 |
| § 11.3 高等数学的知识结构 ..... | 303 |
| 主要参考文献 .....           | 305 |



## 常用符号

1.  $\in$  —— 属于;  $\notin$  或  $\notin$  —— 不属于.

如: 设集合  $A = \{x | 0 < x < 10\}$ , 则  $5 \in A$ ,  $10 \notin A$ .

2.  $\forall$  —— 对于任意的.

3.  $\exists$  —— 存在;  $\exists!$  —— 存在且唯一.

4.  $\triangleq$  —— 定义, 常用符号“ $\triangleq$ ”右边的内容来定义左边的概念.

5.  $\max\{N_1, N_2, \dots, N_k\}$  —— 表示  $N_1, N_2, \dots, N_k$  中最大者;  $\min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$  —— 表示  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  中最小者.

如:  $\min\{\max\{1, 2\}, \max\{-1, 0\}\} = \min\{2, 0\} = 0$ .

6.  $\sum$  —— 连加符号, 即

$$\sum_{i=1}^n x_i \triangleq x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

且显然有

$$\textcircled{1} \quad \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i;$$

$$\textcircled{2} \quad \sum_{i=1}^n a x_i = a \sum_{i=1}^n x_i \quad (a \text{ 为常数}).$$

7.  $\prod$  —— 连乘号, 即  $\prod_{i=1}^n x_i \triangleq x_1 x_2 \dots x_n$ .

如: 当  $x_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  时, 有

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}.$$