魏兵　江龙　张建新　编

线性代数

XIANXING DAISHU

修订版

4

中国矿业大学出版社

责任编辑　姜志方
责任校对　杜锦芝

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/魏兵等编．—2版(修订版)．—徐州：中国矿业大学出版社，1999.8
高等学校教学用书
ISBN 7-81070-047-2

Ⅰ．线…　Ⅱ．魏…　Ⅲ．线性代数-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．O151

中国版本图书馆CIP数据核字(99)第35896号

中国矿业大学出版社出版发行
(江苏徐州　邮政编码221008)
出版人　解京选
中国矿业大学印刷厂印刷　新华书店经销
开本850×1168　1/32　印张8.625　字数216千字
1999年8月第2版　1999年8月第1次印刷
印数1～5100册　定价10.50元

前　言

科学技术的迅猛发展及计算机技术的普及对“线性代数”课程的教学要求越来越高。现在,“线性代数”已成为高等工科院校必修的一门数学基础课,同时也成为经济数学的重要组成部分。“线性代数”课程的特点是概念、结论密集,理论抽象,对工科学生来说具有一定的难度。为了适应科学技术的发展,培养21世纪科技人才所应具备的数学素养,使学生在短时间内掌握“线性代数”的基本概念和基本方法,我们从1992年开始对通用教材的内容体系进行了改革。

1993年,魏兵、江龙、张建新合编了“线性代数”讲义,在试用的基础上,1995年由魏兵任主编(江龙、张建新参编)出版了《线性代数》教材。该教材的特点是以矩阵的初等变换与消元法作为工具,贯穿于教材的始终。矩阵理论与线性方程组是线性代数的基本内容,而线性方程组解的理论依赖于实线性空间$\mathbf{R}^n$的结构理论,因此从总体上看矩阵理论与线性空间$\mathbf{R}^n$是“线性代数”的“主干”,为了加强这两个重点,书中把矩阵有关概念、计算、理论集中为一章,向量空间$\mathbf{R}^n$单独设章。与通用教材相比,该教材知识结构清晰,做到突出重点,分散难点,对行列式的定义采用递归定义法,行列式作为方阵的一个数字特征来处理。教材试用四年来,受到师生的好评,也受到校外同行专家的充分肯定,使我校“线性代数”教学质量上了一个新的台阶。

本次教材修订,除了保持教材原有特色外,内容选取更加精练;对习题做了适当调整,由浅入深,层次分明,对帮助学生深刻领

悟教材内容、拓宽知识面具有积极作用；本次修订还适当地增加了一些例子，特别是几何方面的例题与习题。

本次教材修订是在听取同行教师建议及学生反馈意见的基础上、经“线性代数”课程建设组成员魏兵、江龙、张建新、宋晓秋、周圣武等集体讨论后进行的。原版书由魏兵编写第三、五、七章，江龙编写第一、二章，张建新编写第四、五、六章，由魏兵统稿、定稿。本次修订魏兵、江龙担任主编，由魏兵执笔对教材进行全面修改、定稿，江龙仔细地审阅了书稿。在此，对关心我校“线性代数”教材建设的同行教师以及系领导的大力支持表示衷心的感谢。

讲授本教材前六章约需 36～40 学时，全书约需 48 学时。对于教材中第三章§3.5～§3.8 以及第七章部分内容，根据教学对象不同，专业要求不同可适当删减。

由于时间仓促，水平有限，难免有不当之处，望读者给以批评指正。

作者

1999 年 3 月

目　录

第一章 消元法

线性方程组是线性代数的重要组成部分，本章以矩阵的初等变换为工具讨论如下三个问题：线性方程组何时有解？若有解，解是否惟一？有解时，如何求出全部的解？

§1.1 矩阵及其初等变换

定义1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为一个 m 行 n 列矩阵，简称为 $m\times n$ 矩阵，简记为 $(a_{ij})_{m\times n}$ 或 (a_{ij})。矩阵通常用大写的英文字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 等表示。若矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，称 a_{ij} 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素，简称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 (i,j) 元。

元素全为实数的矩阵称为实矩阵，元素全为复数的矩阵称为复矩阵。如不特别声明，本书出现的矩阵都是实矩阵。

当 $m=n$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵或 n 阶方阵。

当 $m=1$ 时，矩阵只有一行，称为行矩阵，即

$$\boldsymbol{A}=[a_{11}\quad a_{12}\quad \cdots\quad a_{1n}]$$

当 $n=1$ 时，矩阵只有一列，称为列矩阵，即

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

例 1 设 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$，则 A 是一个 2×3 矩阵，B 是一个 2 阶方阵，A 的(2,3)元是 1。

例 2 （价格矩阵）三种食品（依次记作 F_1,F_2,F_3）在两家商店（用 S_1,S_2 表示）中单位量的售价（用人民币元记），可用如下矩阵表示

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} F_1 & F_2 & F_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 17 & 7 & 11 \\ 15 & 9 & 13 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \end{array}$$

例 3 某地有一座煤矿，一座发电厂和一条铁路。经过成本核算，每生产价值为一元钱的煤，需要消耗 0.25 元的电，为了把这一元钱的煤运出去，需要花费 0.15 元的运输费用。每生产价值一元钱的电，需要 0.65 元的煤作为燃料，为了运行电厂的辅助设备，要消耗本身 0.05 元的电，还要花费 0.05 元的运输费。作为铁路局，每提供一元钱的运输，要消耗 0.55 元的煤，辅助设备要消耗 0.10 元的电。煤矿、电厂和铁路局相互之间产值一元钱与消耗金额（单位：元）的关系可用下列矩阵表示

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{煤} & \text{电} & \text{运输} \end{array} \\ A=\begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0.15 \\ 0.65 & 0.05 & 0.05 \\ 0.55 & 0.10 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{煤矿} \\ \text{电厂} \\ \text{铁路局} \end{array}$$

下列各种特殊矩阵经常使用：

(1) 元素全为零的 $m\times n$ 矩阵称为**零矩阵**，记作 $O_{m\times n}$ 或 O；

(2) 对角线以外元素全为 0 的方阵，即形如

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

的矩阵称为**对角矩阵**(矩阵中未写元素的地方皆为零元素),简记为 $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$。

例如,矩阵 $\Lambda=\mathrm{diag}(-5,0,3)=\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$是对角矩阵。

(3) 对角线上元素全为 1 的 n 阶对角矩阵,即形如

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

的 n 阶方阵,称为 n 阶**单位矩阵**。记作 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{E}$。

(4) 形如

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

的方阵,称为**上三角矩阵**(主对角线左下方元素全为 0)。

(5) 形如

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

的方阵,称为**下三角矩阵**(主对角线右上方元素全为 0)。

定义 2 若两个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$的所有对应元

素相等：$a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，则称这两个矩阵相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$。

定义 3 下列三种变换称为矩阵的**初等行变换**：

(i) 对调两行（对调第 i 行与第 j 行，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$）；

(ii) 以数 $k(k\neq 0)$ 乘某行中的所有元素（第 i 行乘以 k，记作 $r_i \times k$）；

(iii) 以数 k 乘某行的每个元素加到另一行的对应元素上去（用数 k 乘第 j 行加到第 i 行去，记作 r_i+kr_j）。

将定义中的"行"换成"列"，就得到矩阵的初等列变换的定义，将"r"换成"c"，就得到列变换的表示方法。

矩阵的初等行变换与初等列变换，统称为矩阵的**初等变换**。

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换能变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **等价**，记作 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$。

观察下列矩阵（注意虚线画出的"台阶"）：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 5 & 7\\ 0 & 3 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 6 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

上述两个矩阵具有如下特点：

（Ⅰ）每个台阶上只有一行；

（Ⅱ）每个台阶上第一个数不等于零；

（Ⅲ）台阶的左下方的元素全为零。

具有以上三个特点的矩阵，称为**行阶梯形矩阵**。

再观察以下两个阶梯形矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 3 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

这两个行阶梯形矩阵都具有如下特点：

（Ⅳ）每个台阶上的第一个数都是1，并且这些1所在列的其它元素全为零。

具有特点（Ⅳ）的行阶梯形矩阵称为**行最简阶梯形矩阵**。

定理 1.1.1 每个矩阵都可以经过有限次初等行变换化为行阶梯形矩阵，进而化为行最简阶梯形矩阵。

我们通过一个例子来说明这个定理的证明过程以及如何将矩阵化为行阶梯形矩阵。

例 4 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 6 & -2\\1 & -2 & -1 & 1 & 2\\2 & -1 & 0 & 4 & 3\\3 & 3 & 3 & 6 & 4\end{bmatrix},$$

试用初等行变换将 A 化为行阶梯形，进而化为行最简阶梯形。

解 $$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & 1 & 2\\0 & 0 & 0 & 6 & -2\\2 & -1 & 0 & 4 & 3\\3 & 3 & 3 & 6 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_1]{r_3-2r_1}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & 1 & 2\\0 & 0 & 0 & 6 & -2\\0 & 3 & 2 & 2 & -1\\0 & 9 & 6 & 3 & -2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & 1 & 2\\0 & 3 & 2 & 2 & -1\\0 & 0 & 0 & 6 & -2\\0 & 9 & 6 & 3 & -2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4-3r_2}$$

$$\begin{bmatrix}1&-2&-1&1&2\\0&3&2&2&-1\\0&0&0&6&-2\\0&0&0&-3&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4+\frac{1}{2}r_3}$$

$$\begin{bmatrix}1&-2&-1&1&2\\0&3&2&2&-1\\0&0&0&6&-2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}\quad（行阶梯形矩阵）$$

继续使用初等行变换，将 $\boldsymbol{B}$ 化为行最简阶梯形矩阵：

$$\boldsymbol{B}\xrightarrow[\substack{r_2-2r_3\\ r_1-r_3}]{\frac{1}{6}r_3}\begin{bmatrix}1&-2&-1&0&\frac{7}{3}\\0&3&2&0&-\frac{1}{3}\\0&0&0&1&-\frac{1}{3}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1+2r_2]{r_2\times\frac{1}{3}}\begin{bmatrix}1&0&\frac{1}{3}&0&\frac{19}{9}\\0&1&\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{9}\\0&0&0&1&-\frac{1}{3}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

从上例变换过程可以看出，矩阵的初等行(列)变换是可逆的，以行变换为例：

$$\boldsymbol{A}\underset{r_i\leftrightarrow r_j}{\overset{r_i\leftrightarrow r_j}{\rightleftharpoons}}\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{A}\underset{r_i\times\frac{1}{k}}{\overset{r_i\times k(k\neq0)}{\rightleftharpoons}}\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{A}\underset{r_j-kr_i}{\overset{r_j+kr_i}{\rightleftharpoons}}\boldsymbol{B}$$

§1.2 消 元 法

在初等代数中已经介绍了用加减消元法、代入消元法解二元、三元一次线性方程组。现在我们讨论 m 个方程 n 个未知量的线性方程组的求解问题。

设有 n 个未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\tag{1.1}$$

当 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 不全为 0 时，称(1.1)为非齐次线性方程组。若存在 $x_1=c_1,x_2=c_2,\cdots,x_n=c_n$ 使(1.1)每个方程成为恒等式，称(1.1)**有解**或**相容**，否则称之为**无解**或**不相容**。

称右端常数全为 0 的线性方程组为齐次线性方程组。

对于给定的方程组(1.1)，把右端常数全换为 0 得到的齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}\tag{1.2}$$

称之为(1.1)导出的齐次线性方程组。

由线性方程组(1.1)的系数组成的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

称为方程组(1.1)的**系数矩阵**。由方程组(1.1)的系数与常数项组

成的矩阵

$$
\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}
$$

称为方程组(1.1)的**增广矩阵**。显然，线性方程组与它的增广矩阵是一一对应的。

下面通过具体例子来说明用消元法解线性方程组的求解过程。在求解过程中我们将使用方程组的三种初等变换：

(1) 两个方程互换位置；

(2) 用一个非零数 k 乘某个方程；

(3) 某个方程的常数倍加到另一个方程上去。

例 1 解线性方程组

$$
\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}
$$

解 以下用①、②、③分别代表第一、第二、第三个方程，注意方程组的初等变换与方程组的增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的初等行变换的联系。

$$
\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}
$$

互换①与②的位置得 $\qquad \downarrow r_1 \leftrightarrow r_2$

$$
\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}
$$

②－①×2，③－①×4(消去②、③中的 x_1 项) $\qquad \downarrow \begin{matrix} r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 4r_1 \end{matrix}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ -3x_2 - 2x_3 = 2 \\ -3x_2 - 4x_3 = -2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

③－②（消去③中的 x_2 项）　　　　$\downarrow r_3 - r_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ -3x_2 - 2x_3 = 2 \\ -2x_3 = -4 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

（阶梯形方程组）　　　　（行阶梯形矩阵）

消元过程结束，以下过程称为“回代过程”。

③×$\left(-\frac{1}{2}\right)$　　　　$\downarrow r_3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ -3x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

① － ③ × 2，② ＋ ③ × 2　　　　$\downarrow \begin{matrix} r_1 - 2r_3 \\ r_2 + 2r_3 \end{matrix}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ -3x_2 = 6 \\ x_3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

②×$\left(-\frac{1}{3}\right)$　　　　$\downarrow r_2 \times \left(-\frac{1}{3}\right)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

①－②　　　　$\downarrow r_1 - r_2$

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

（行最简阶梯形）

回代过程结束。

原方程组的解为：$x_1=-1, x_2=-2, x_3=2$。

从上例可以看出，方程组的初等变换可以用它的增广矩阵的相应的初等行变换来表示，"消元过程"实际上就是用初等行变换将增广矩阵化为行阶梯形矩阵的过程，而"回代过程"就是将行阶梯形矩阵继续化为行最简阶梯形矩阵的过程。

因为增广矩阵的初等行变换是可逆的，即相应的线性方程组的变换也是可逆的，所以原方程组与最后的（行最简阶梯形矩阵对应的）阶梯形方程组是同解方程组。

例 2 解线性方程组

$$\begin{cases} -3x_2-2x_3=2 \\ x_1+x_2+2x_3=1 \\ 4x_1+x_2+6x_3=6 \end{cases}$$

解 对方程组的增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 进行初等行变换

$$\boldsymbol{B}=\left[\begin{array}{ccc:c} 0 & -3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 6 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3-4r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \times (-\frac{1}{3})} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1-r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

与最后一个矩阵(行最简阶梯形矩阵)相对应的同解线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 \qquad + \dfrac{4}{3}x_3 = \dfrac{5}{3} \\ \qquad x_2 + \dfrac{2}{3}x_3 = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{4}{3}x_3 + \dfrac{5}{3} \\ x_2 = -\dfrac{2}{3}x_3 - \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

取 $x_3 = k$,则原方程组的所有解为

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{4}{3}k + \dfrac{5}{3} \\ x_2 = -\dfrac{2}{3}k - \dfrac{2}{3} \\ x_3 = \qquad k \end{cases} \quad (k\text{ 为任意实数})$$

故原方程组有无穷多组解。

例 3 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 18x_4 = -1 \end{cases}$$

解 对方程组的增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 进行初等行变换

$$\boldsymbol{B} = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 18 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{r_3 - 2r_1 \\ r_4 - 2r_1}]{r_2 - r_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & -5 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & -7 & -2 \\ 0 & 6 & -1 & 4 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4 - 2r_2]{r_3 - r_2}$$