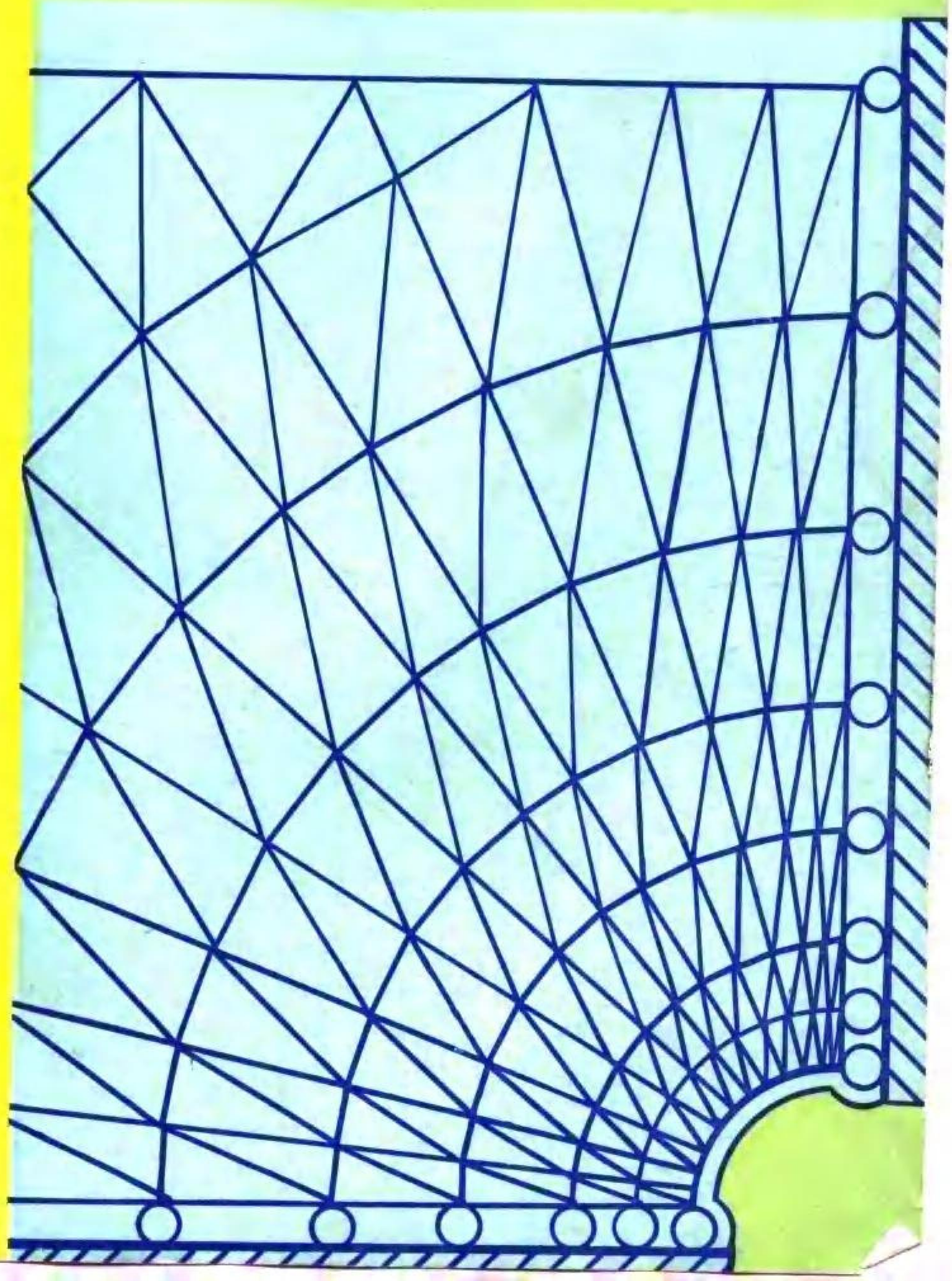
机械结构计算的有限元法

温文源 主编



东南大学出版社

内　容　提　要

本书系统地介绍了有限元法的基础知识，基本理论与方法，具体应用的步骤以及如何编制程序。全书对机械结构的梁杆问题、平面问题、轴对称问题、空间问题、板壳与板梁组合问题、动力分析问题和热传导问题等作了完整而详尽的讨论。因而有关机械结构的静态性能、动态性能和热态性能的有限元分析都已涉及。

本书对近年来国内外有限元法新的进展与科研成果也作了适当介绍，而且还提供了五种问题的有限元法源程序及其使用说明与算例。

本书内容全面系统，条理清晰，文字通俗易懂，附有图表、例题、习题和程序，易于读者掌握。

本书不仅可供高等院校机械学科研究生、本科生作为教学参考书和教材。也可供其他学科师生以及从事有限元计算工作的研究人员、工程技术人员作参考和自学之用。

责任编辑　施　恩

机械结构计算的有限元法
温文源　主编

东南大学出版社出版发行
南京四牌楼2号
东南大学印刷厂印刷
开本787×1092毫米 1/16　印张 25　字数 608 千字
1989年12月第1版　1989年12月第1次印刷
印数：1—1000册

ISBN 7-81023-296-7

TH·14　定价：7.70元

前　　言

有限元法早就被公认为现代工程设计计算十分有效的数值计算方法。但是，有关机械结构计算分析的有限元法书籍比较缺乏。为了适应机械学科方面的研究生、大学生的教学需要及有关其他学科师生和工程技术人员参考与自学所需，编写了本教材。本书取材力求从实际出发，着重讲清原理，讲透方法，辅以实例和习题，并提供参考程序，便于掌握。

鉴于以上考虑，照顾到大学生及广大工程技术人员的数学、力学基础，本书内容作如下安排：

第一章为学习有限元法理论介绍一些必要的数学和力学的基础知识。

第二章至第六章的内容为围绕机械结构计算中常见的静态性能分析问题，从梁杆结构、平面问题、轴对称问题、空间问题以及板壳与板梁组合结构问题，比较全面系统地逐章予以介绍。每章都从有限元法的基本概念、理论和方法以及如何应用等全面进行讨论和分析。其中第二章为梁杆结构问题，用直观方法阐述有限元法基本概念，利用位移函数、虚功原理等进行单元特征分析，以作为后续各章的导引。第三章为平面问题，作为本书重点，介绍详细，推导与证明细致，以便自学。本章不仅作出三角形单元族、矩形单元族与等参单元族的分析，还综合比较各种单元的优缺点以及如何选用各种单元。第四章轴对称问题在机械结构设计计算中常见，这种三维问题可作为二维问题来处理，很多公式的推导可借助于平面问题的方法，但必须注意两者的异同。第五章空间三维问题及第六章板壳与板梁组合问题在机械结构中更为常见，如底座、床身与立柱等，这类结构件不用有限元法简直无法计算，而只能进行类比设计、经验设计或模型试验。

第七章为机械结构计算中常见的动态性能分析问题，对于现代高速、重载或精密机械来说，其重要性愈益显著。大学生学习本章时可参考有关机械振动学方面的书籍。

第八章为机械结构计算中常见的热态性能分析问题，这是场问题而非结构问题。学习本章时必需应用变分法，故在教学安排上也可将第一章的变分法介绍与本章内容配合进行。

第九章为有限元法的程序编制问题，这一章是十分重要的，学懂了有限元分析的理论与方法，如果不会编制程序，那就无法解题，即不能用电子计算机对具体机械结构进行有限元分析。本章不仅介绍编程的原则与方法，而且结合实例一段一段、一个一个子程序详作介绍。由于学生学习时完成编程作业需较多机时，所以进行教学时不妨把本章部分内容提前进行。

第十章的内容安排是为了进一步扩大学生视野，对有限元法有更多的了解。对各种其它问题与技术——诸如有限元网格的自动生成，加权残数法，有限条法及边界元法等等都作了简介。

本书内容已由主编给机制专业研究生讲授四届（3学分），给本科生讲授一届（学时少，取主要部分内容），这次再经整理、增删、重写而予以出版。

本书内容主要取材于国内外有关文献和专著，部分是编者的体会和所在科研组的研究成果，如有限元网格的自动生成以及附录中的全部程序等。本书是由温文源、汤文成和许超合编的。韩克筠老友为本书的问世倾注了心血，在此致以衷心的感谢。

由于编者水平所限，加上编写仓促，书中缺点和谬误难免，竭诚欢迎读者批评指正。

编　者　　　1988年10月

目　录

第三章 机械结构平面问题的有限元法

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第四章 机械结构轴对称问题的有限元法

第五章 机械结构空间三维问题的有限元法

第六章　机械结构板壳问题的有限元法

第七章　机械结构动力学问题的有限元法

第八章　机械结构热传导与热变形问题的有限元法

第九章 机械结构有限元分析的程序设计基础

第十章 其它各种问题与技术

附　　录

概　述

有限元法(The Finite Element Method)的基本思想——离散化的观念早在1943年就由柯伦脱(Courant)首先提出，因当时计算技术远未成熟而未引起人们重视；至1954年，英国教授阿吉里斯（Argyris)首先把有限元法作为结构分析矩阵方法的分支，成功地应用于结构分析问题。1956年美国教授特纳（Turner)、克劳夫(Clough)和马丁(Martin)等应用三角形单元对飞机结构进行计算并逐步完善，1960年克劳夫首次提出“有限元法”这个名词。从此，有限元法正式作为一种数值分析方法出现在工程技术领域。此后十年，有限元法在国际上获得了蓬勃的发展。我国著名计算数学家冯康早在1956年就发表了有限元法研究论文。1965年英国教授辛克维茨（Zienkiewicz）首先宣布有限元法可应用于所有场问题的数值分析，因为它能化成变分的形式。从此，有限元法的应用推广到十分广阔的范围。现在不仅从固体力学领域扩展到流体力学、传热学、电磁学、声学和振动学等领域，而且向非线性力学、断裂力学、蠕变、热冲击，粘弹性和热弹性力学、生物学等领域迅速扩展。所以，现在许多工业部门如航空、造船、机械、动力、土建、水利、交通、轻工、纺织等等都有应用。总之，有限元法已成为国际公认并被大家所接受的通用数值分析方法了。

那么，什么是有限元法呢？它是借助电子计算机对各种结构和场问题进行近似计算分析的方法。它用离散的概念，使整个问题由整体连续转化到分段连续，由整体解析转化为分段解析，即把一个原来是连续的物体剖分为有限个单元，且又相互连接在有限个节点上，承受与实际载荷等效的节点载荷，并根据力的平衡条件进行分析，然后根据变形协调条件把这些单元重新组合成整体进行综合求解，由于单元数和节点数都只能是有限的，所以称“有限元法”。

由于有限元法要面向各种工程实际中任何复杂形状或边界的结构进行计算分析，所以必需采用各种各样的单元。例如针对结构力学问题就需有杆单元和梁单元；针对弹性力学中二维问题，就需有三角形、矩形或任意四边形单元；三维问题则需四面体、六面体或等参曲面体单元等；针对板壳力学问题，则需三角形、矩形或等参曲边形板壳单元等。

有限元法根据数学推导方法的不同可分为三类方法：

1. 直接刚度法

应用结构力学中直接刚度法的概念，求出结构受载与其产生位移（变形）的关系式，称为结构的刚度方程式，求解此方程式即能获得所需位移，从而求得应力等。此法较直观，计算简便。适用于各种结构力学、弹性力学问题的计算分析，但不易推广到非结构的场问题的分析。

2. 变分法

利用变分原理把机械工程问题的微分方程定解问题化为与它等价的泛函求极值问题，即用变分原理来推导有限元法。这样可使有限元法建立在更坚实的数学基础上，并易推广到各

种场问题的分析。例如温度场、流场等的有限元分析，当然也可用于固体力学的位移场、应力场的分析。

3．加权余数法

直接从基本微分方程出发，利用所假设的试函数引入该方程式及边界条件，则一般讲不能满足方程式而产生余数，如设法对余数加权并使余数为极小，这样就可获得该微分方程的近似解。此法不需建立泛函，故对于根本不存在泛函的工程问题无法应用变分法而可用加权余数法。

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第一章　有限元法的数学和力学基础知识

为了顺利地进行有限元法的学习，必需掌握有关的数学和力学方面的基础知识。本章着重介绍线性方程组的常用解法及其计算机程序、变分法基础和弹性力学基础。以上内容至少涉及四门课程，都是学习以后各章及今后应用有限元法解决工程实际问题的基础。

§1—1　线性方程组的解法及其计算机程序

由于很多工程技术问题应用有限元法来解决，常常归纳为求解线性方程组。线性方程组的解法有很多，概括起来有直接法和间接法两类。直接法是经过多次初等运算（如无舍入误差引入则可得其精确解）的近似解法。常用的有高斯消去法、矩阵三角化法、平方根法与乔累斯基法（Cholesky method）等。间接法是需经无限次的初等运算后才能得到精确解的方法，它是逐次逼近的，实际上也是近似解法。迭代法就是间接法的一种。限于篇幅，介绍几种常用解法及程序于下。

一、列主元高斯消去法

1，方法简介

设已知线性方程组为

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=a_{1,n+1}\\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=a_{2,n+1}\\ &\vdots\\ &a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=a_{n,n+1} \end{aligned}\right\} \tag{1-1}$$

由其 n 阶系数矩阵与右端项可组成增广矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1}\\ \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{pmatrix} \tag{1-2}$$

其求解过程分为“消元”与“回代”。

“消元”　要选主元，第 k 步在增广矩阵第 k 列$a_{kk}^{(k-1)}$，$a_{k+1,k}^{(k-1)}$，…，$a_{nk}^{(k-1)}$中挑选出绝对值最大者，称为第 k 步的元素。设主元素在第 l 个方程，即

$$|a_{lk}^{(k-1)}|=\max_{k<i<n}|a_{ik}^{(k-1)}|$$

将第 l 个方程与第 k 个方程互易位置，即使新的 $a_{kk}^{(k-1)}$ 变为主元素，而后着手消元。

“消元”过程的第 k 步算式是

$$\left.\begin{array}{ll} a_{kj}^{(k)}=a_{kj}^{(k-1)}/a_{kk}^{(k-1)} & (j=k+1,k+2,\cdots,n+1) \\ a_{ij}^{(k)}=a_{ij}^{(k-1)}-a_{ik}^{(k-1)}\cdot a_{kj}^{(k)} & \left(\begin{array}{l} i=k+1,k+2,\cdots,n \\ j=k+1,k+2,\cdots,n+1 \end{array}\right) \end{array}\right\} \quad (1\text{-}3)$$

“消元”要进行 n 步（$k=1$，2，…，n），原方程组消元后成为上三角形式，即

$$\left.\begin{array}{r} x_1+a_{12}^{(1)}x_2+a_{13}^{(1)}x_3+\cdots+a_{1n}^{(1)}x_n=a_{1;n+1}^{(1)} \\ x_2+a_{23}^{(2)}x_3+\cdots+a_{2n}^{(2)}x_n=a_{2;n+1}^{(1)} \\ \vdots \\ x_{n-1}+a_{n-1;n}^{(n-1)}x_n=a_{n-1;n+1}^{(n-1)} \\ x_n=a_{n;n+1}^{(n)} \end{array}\right\} \quad (1\text{-}4)$$

“回代”　通过回代即可求得方程组的解，“回代”的算式是

$$\left.\begin{array}{l} x_n=a_{n;n+1}^{(n)} \\ x_k=a_{k;n+1}^{(k)}-\sum\limits_{j=k+1}^{n}a_{kj}^{(k)}x_j \quad (k=n-1,n-2,\cdots,1) \end{array}\right\} \quad (1\text{-}5)$$

下面看一个例子，求解线性方程组

$$\begin{pmatrix} 10 & -13 & 3 \\ 11 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

已知增**广矩**阵	$\begin{array}{ccc\|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}$	$\begin{array}{ccc\|c} 10 & -13 & 3 & 0 \\ 11 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \end{array}$
第一次运算	主元素是 a_{12}（绝对值max为13）主元行是第 1 行，主元列为第 2 列，除第 2 列外均作消元处理	
取第 1 列为消元列	a_{11} 规格化　新 $a'_{11}=a_{11}/a_{12}=-10/13$ 除第 1 行外，新 1 列各元素＝第 1 列各对应元素－第 2 列各对应元素 $\times a'_{11}$ $\begin{array}{ccc\|c} \boxed{a'_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \boxed{a'_{21}} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \boxed{a'_{31}} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}$	$\begin{array}{ccc\|c} \boxed{-10/13} & -13 & 3 & 0 \\ \boxed{93/13} & -5 & 0 & 5 \\ \boxed{10/13} & 1 & -6 & 0 \end{array}$
取第 3 列消元为列	a_{13} 规格化　新 $a'_{13}=a_{13}/a_{12}=-3/13$ 除第 1 行外，新 3 列各元素＝第 3 列各对应元素－第 2 列各对应元素 $\times a'_{13}$ $\begin{array}{ccc\|c} a'_{11} & a_{12} & \boxed{a'_{13}} & a_{14} \\ a'_{21} & a_{22} & \boxed{a'_{23}} & a_{24} \\ a'_{31} & a_{32} & \boxed{a'_{33}} & a_{34} \end{array}$	$\begin{array}{ccc\|c} -10/13 & -13 & \boxed{-3/13} & 0 \\ 93/13 & -5 & \boxed{-15/13} & 5 \\ 10/13 & 1 & \boxed{-75/13} & 0 \end{array}$

取右端列为消元列	a_{14}规格化　新$a'_{14}=a_{14}/a_{12}=0/(-13)=0$ 除第 1 行外，新右端列各元素＝右端列各对应元素－第 2 列各对应元素×a'_{14} $\left(\begin{array}{ccc\|c} a'_{11} & a_{12} & a'_{13} & \boxed{a'_{14}} \\ a'_{21} & a_{22} & a'_{23} & \boxed{a'_{24}} \\ a'_{31} & a_{32} & a'_{33} & \boxed{a'_{34}} \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} -10/13 & -13 & -3/13 & \boxed{0} \\ 93/13 & -5 & -15/13 & \boxed{5} \\ 10/13 & 1 & -75/13 & \boxed{0} \end{array}\right)$
第 2 列清零(不需消元处理完)	$\left(\begin{array}{ccc\|c} a'_{11} & \boxed{0} & a'_{13} & a'_{14} \\ a'_{21} & 0 & a'_{23} & a'_{24} \\ a'_{31} & 0 & a'_{33} & a'_{34} \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} -10/13 & \boxed{0} & -3/13 & 0 \\ 93/13 & 0 & -15/13 & 5 \\ 10/13 & 0 & -75/13 & 0 \end{array}\right)$
第二次运算	主元素为a'_{21}(93/13) 主元行是第 2 行，主元列是第 1 列，除第 1，2 列外，均作消元处理
取第 3 列为消元列	a'_{23}规格化，新$a''_{23}=a'_{23}/a'_{21}=-5/31$ 除第 2 行外，新 3 列各元素＝第 3 列各对应元素－第 1 列各对应元素×a''_{23} $\left(\begin{array}{ccc\|c} a'_{11} & 0 & \boxed{a''_{13}} & a'_{14} \\ a'_{21} & 0 & \boxed{a''_{23}} & a'_{24} \\ a'_{31} & 0 & \boxed{a''_{33}} & a'_{34} \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} -10/13 & 0 & \boxed{-11/31} & 0 \\ 93/13 & 0 & \boxed{-5/31} & 5 \\ 10/13 & 0 & \boxed{-175/31} & 0 \end{array}\right)$
取右端列为消元列	a'_{24}规格化，新$a''_{24}=a'_{24}/a'_{21}=65/93$ 除第 2 行外，新右端列各元素＝右端列各对应元素－第 1 列各对应元素×a''_{24} $\left(\begin{array}{ccc\|c} a'_{11} & 0 & a''_{13} & \boxed{a''_{14}} \\ a'_{21} & 0 & a''_{23} & \boxed{a''_{24}} \\ a'_{31} & 0 & a''_{33} & \boxed{a''_{34}} \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} -10/13 & 0 & -11/31 & \boxed{50/93} \\ 93/13 & 0 & -5/31 & \boxed{65/93} \\ 10/13 & 0 & -175/31 & \boxed{-50/93} \end{array}\right)$
第 1 列清零	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 0 & 0 & a''_{13} & a''_{14} \\ \boxed{0} & 0 & a''_{23} & a''_{24} \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} 0 & 0 & -11/31 & 50/93 \\ \boxed{0} & 0 & -5/31 & 65/93 \\ 0 & 0 & -175/31 & -50/93 \end{array}\right)$
第三次运算	主元素是a''_{33}(－175/31)，主元行为第 3 行，主元列为第 3 列，右端列向量作消元处理
取右端列向量作消元列	a''_{34} 规格化，新 $a''_{34}=a''_{34}/a''_{33}=2/21$ 除第 3 行外，新右端列各元素＝右端列各对应元素－第 2 列各对应元素×a''_{34} $\left(\begin{array}{ccc\|c} 0 & 0 & a''_{13} & \boxed{\bar{a}_{14}} \\ 0 & 0 & a''_{23} & \boxed{\bar{a}_{24}} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \boxed{\bar{a}_{34}} \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} 0 & 0 & -11/31 & \boxed{4/7} \\ 0 & 0 & -5/31 & \boxed{5/7} \\ 0 & 0 & -175/31 & \boxed{2/21} \end{array}\right)$

第3列清零	0	$\boxed{0}$	0	a'''_{14}	0	$\boxed{0}$	0	4/7
	$\boxed{0}$	0	0	a'''_{24}	$\boxed{0}$	0	0	5/7
	0	0	$\boxed{0}$	a'''_{34}	0	0	$\boxed{0}$	2/21

注：表中消零时$\boxed{\ }$代表各次运算时主元素所在的位置。由其列号得到

$x_2=0.5714$, $x_1=0.7143$, $x_3=0.0952$

2. 程序介绍

(1) 子程序

```
      SUBROUTINE  GS(A,N,M,EPS)
      DIMENSION  A(N,M)
      DO 50 K=1,N
      BMAX=0.
      DO 20 I=K, N
      IF(BMAX-ABS(A(I,K))) 10, 20, 20
10    BMAX=ABS(A(I, K))
      L=I
20    CONTINUE
      IF(BMAX. LT. EPS)STOP  4444
      IF(L. EQ. K)GOTO  30
      DO  25  J=K,M
      T=A(L,J)
      A(L,J)=A(K,J)
25    A(K,J)=T
30    T=1./A(K,K)
      K1=K+1
      DO  40  J=K1,M
      A(K,J)=A(K,J)*T
      DO  40  I=K1,N
40    A(I,J)=A(I,J)-A(I,K)*A(K,J)
50    CONTINUE
      DO  60  IK=2,N
      I=M-IK
      I1=I+1
      DO  60  J=I1,N
60    A(I,M)=A(I,M)-A(I,J)*A(J,M)
      RETURN
      END
```

(2) 程序说明

输入参数：

N　整型量，方程组的阶数

M　整型量，M=N+1

EPS　实型量，消元过程中主元的最小允许值，如主元小于此值，则停机，打印STOP 4444

输入兼输出参数：

A　N*M个元素的二维实数组。开始时存放方程组的系数与右端项组成的增广矩阵，最后在第M列存放方程组的解

3. 应用举例

设仍求解线性方程组

$$\begin{pmatrix} 10 & -13 & 3 \\ 11 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解：按程序说明，取 N=3，M=4，EPS=10^{-8}，数组A表示增广矩阵。

源程序如下：

```
      SUBROUTINE  GS(A,N,M,EPS)
        ⋮ （子程序段体详前）
      END
      DIMENSION A(3,4)
      READ(5,10) ((A(I,J), J=1,4), I=1,3)
10    FORMAT(4F10.2)
      WRITE(5,10) ((A(I,J), J=1,4), I=1,3)
      CALL  GS(A,3,4, 1E-8)
      WRITE(5,20) (A(I,4), I=1,3)
20    FORMAT(/3X,'SOLUTION='/3F12.4)
      STOP
      END
```

输入数据与计算结果如表1-1。

表 1-1

数	组	A	
10.00	−13.00	3.00	0.00
11.00	−5.00	0.00	5.00
0.00	1.00	−6.00	0.00

计算	结果	
x_1	x_2	x_3
0.7143	0.5714	0.0952

二、对称正定方程组的平方根法

1. 方法简介

在结构分析的有限元法中，矩阵A通常是对称正定的，设线性方程组为

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ &\vdots\\ &a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{aligned}\right\} \tag{1-6}$$

简写为

$$[A]\{x\}=\{b\} \tag{1-7}$$

当矩阵$[A]$为对称正定时，则$[A]$可唯一地分解成

$$[A]=[L][L]^T=[L][U] \tag{1-8}$$

的形式。此处$[L]$为下三角阵

$$[L]=\begin{pmatrix} l_{11} & & & \bigcirc \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \tag{1-9}$$

$[L]^T$为$[L]$的转置矩阵，即为上三角阵$[U]$。式(1-8)即为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ l_{21} & l_{22} & 0 & & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots\\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & & l_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1}\\ 0 & l_{22} & \cdots & l_{n2}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & l_{nn} \end{pmatrix}$$

按矩阵乘法规则展开，则由上式可得递推公式

$$a_{ij}=\sum_{k=1}^{j-1}l_{ik}l_{jk}+l_{ij}l_{jj}\qquad (j=1,2,\cdots,i-1,\ i=2,3,\cdots,n)$$

$$a_{ij}=\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}^2+l_{ii}^2\qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

从而可得

$$\left.\begin{aligned} &l_{ij}=\left(a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}l_{ik}l_{jk}\right)\Big/l_{jj}\qquad (j=1,2,\cdots,i-1;\ i=2,3,\cdots,n)\\ &l_{ii}=\sqrt{a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}^2}\qquad (i=1,2,\cdots,n) \end{aligned}\right\} \tag{1-10}$$

根据式(1-8)求解方程组(1-7)式

$$[A]\{x\}=\{b\}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com