高等学校教学参考书

边界层及其在传递过程中的应用

徐佩立 编

高等教育出版社

本书共分四章，内容包括流体流动的基本微分方程，流动边界层；传热边界层和传质边界层。

本书与现行的《化学工程基础》，《化工基础》教材相配合，对边界层理论作了专题的较为广泛的论述。在论述边界层的基本概念、理论和方程的同时；着重介绍边界层在流体流动、传热和传质过程中的应用。

本书可供综合性大学、高等师范院校化学系学生作参考书，亦可供有关教师及其它人员作参考。

高等学校教学参考书

边界层及其在传递过程中的应用

徐佩立　编

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
保定日报社装订印刷厂印装

•

开本850×1168　1/32　印张5　字数120 000
1988年10月第1版　1988年10月第1次印刷
印数00 001—1 730
ISBN 7—04—000761—4/O·179
定价2.20元

前　言

自二十世纪中叶以来，化学工程学科进入了以“传递过程”和“反应工程”为核心的“三传一反”的发展阶段。其中尤以“传递过程”为化学工程之基础，它是综合了有关动量、热量和质量传递的共同基本规律而发展起来的。因为人们发现动量、热量和质量虽然分属三种不同的传递过程，但是它们往往与流体的运动密切相关，这就引导人们不断地去追究它们在本质上是否存在相似之处。

人们在实践中发现，当流体流经固体壁面时，存在着流动边界层。这一概念以后逐渐发展形成了边界层理论。它为人们研究三种不同的传递过程提供了有效的途径，由此不少研究者通过对边界层的研究建立起了这三种传递过程在本质上的类似关系，因此可以说：正是由于边界层把这三种传递现象联系了起来。所以长期以来有关边界层的一些理论问题，不仅为流体力学的研究者所关注，而且亦为研究传递过程的学者所感兴趣。

有关边界层及其在传递过程中的重要作用的论述，历来仅散见于各类流体力学或传递过程的专著中。在国内，这方面的专著，至今尚付阙如。因此为适应需要编者不揣冒昧写了这本小册子，以求引起广大读者对这一课题的关注和兴趣。若能作为引玉之砖，那将更是编者的心愿。此外在看完此书之后，读者也一定会发现在这个领域中还有不少问题尚有待我们去探索、去发展。

由于编者水平所限，书中难免有缺点错误，甚至存在谬误之处，望读者多加指正。

编　者

目　录

第一章 流体流动的基本微分方程

§1 研究流体运动的方法

研究流体运动的方法通常有两种：一种是着眼于流动着的流体中的某一质点，然后追随它，并考察其运动特性的变化，这种方法称拉格朗日（Lagrange）法；另一种方法则是着眼于流体流动所占据的空间中的某一固定点，然后通过观察在这固定点流体运动特性的变化来进行研究，这种方法则称欧拉（Euler）法。下面我们通过对流体流动时的速度和加速度这两个物理量来说明上述两种方法在描述流体运动特性上的不同之处。

拉格朗日法

若以m，n，p作为流动流体中某一质点在时间为t瞬时的坐标，那么该质点的位置坐标x，y，z可以看作是m，n，p和时间t的函数，表达成下式：

$$
\begin{aligned}
x &= f_1\ (m,n,p,t)\\
y &= f_2\ (m,n,p,t)\\
z &= f_3\ (m,n,p,t)
\end{aligned}
\qquad (1\text{-}1)
$$

如若知道了这三个函数关系，那么该质点在任何一瞬间的位置都可以确定，也就能了解该质点运动的途径了。

由于质点的速度分量w_x, w_y, w_z是质点在单位时间内沿x, y, z方向移动的距离，所以速度分量用拉格朗日法来表示即为：

$$w_x = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial f_1\ (m,n,p,t)}{\partial t}$$

$$w_y = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f_2\ (m,n,p,t)}{\partial t} \qquad (1\text{-}2)$$

$$w_z = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f_3\ (m, n, p, t)}{\partial t}$$

又若质点的加速度分量为α_x，α_y，α_z，它们应是速度分量随时间的变化率：

$$\alpha_x = \frac{\partial w_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

$$\alpha_y = \frac{\partial w_y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (1-3)$$

$$\alpha_z = \frac{\partial w_z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

欧拉法

按照欧拉研究运动的方法是应该将运动的性质描述为时间和空间坐标的函数。那么对于速度分量w_x，w_y，w_z将随不同的坐标x，y，z及时间t而不同，表达成数学形式即为：

$$w_x = \varphi_1\ (x,\ y,\ z,\ t)$$

$$w_y = \varphi_2\ (x,\ y,\ z,\ t) \qquad (1-4)$$

$$w_z = \varphi_3\ (x,\ y,\ z,\ t)$$

在上式中假若固定x，y，z(即固定在某一点)，而t为变数，就可以得出不同的时间，通过该点的各流体质点的速度变化情况，又若固定时间t，那么可以得到某一瞬间不同流体质点的速度分布情况，通常称速度场，见图1-1。若x，y，z及t都改变，就可以得到任一瞬间t通过任意一点x，y，z流体质点的运动情况。

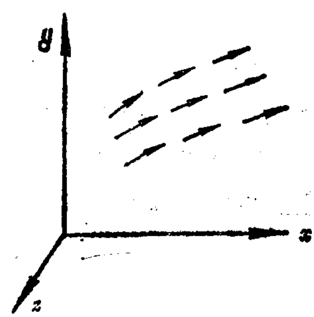

图1-1 流 场

下面我们来讨论用欧拉法表示的加速度。由于质点的加速度是速度随时间的变化率，因此只要将式(1-4)对时间 t 微分便可得到，但是需要提醒的是这里 x，y，z 也是变量，因此应该写成：

$$\frac{dw_x}{dt}=\frac{\partial w_x}{\partial t}+\frac{\partial w_x}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w_x}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial w_x}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

而上式中： $\frac{dx}{dt}=w_x$； $\frac{dy}{dt}=w_y$； $\frac{dz}{dt}=w_z$

故
$$\frac{Dw_x}{Dt}=\frac{\partial w_x}{\partial t}+\frac{\partial w_x}{\partial x}w_x+\frac{\partial w_x}{\partial y}w_y+\frac{\partial w_x}{\partial z}w_z$$

同样可得：
$$\frac{Dw_y}{Dt}=\frac{\partial w_y}{\partial t}+\frac{\partial w_y}{\partial x}w_x+\frac{\partial w_y}{\partial y}w_y+\frac{\partial w_y}{\partial z}w_z$$

$$\frac{Dw_z}{Dt}=\frac{\partial w_z}{\partial t}+\frac{\partial w_z}{\partial x}w_x+\frac{\partial w_z}{\partial y}w_y+\frac{\partial w_z}{\partial z}w_z$$

在上式中等号右边第一项表示了在空间某一点上速度随时间的变化率，这是由于流体的流动属于不稳定流动所致，对于稳定流动，这一项则为零。因此称它为当地导数（Local derivative），而后三项则表示质点运动到了不同的点所引起的速度变化率，是由于速度场的不均匀性所引起的，当速度为零或在空间各点没有变化时，它们就消失了。因此这三项称为对流导数（Convective derivative）。而 $\frac{Dw_x}{Dt}$（或 $\frac{Dw_y}{Dt}$，$\frac{Dw_z}{Dt}$）则称随体导数(Substantial derivative)。对于流体质点的其它性质随时间的变化率亦可以用随体导数来表示。可以把它表达成下列通式：

$$\frac{D\phi}{Dt}=\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial x}w_x+\frac{\partial\phi}{\partial y}w_y+\frac{\partial\phi}{\partial z}w_z \tag{1-5}$$

流线

为了对欧拉法中所提出的速度场有一个更清晰的概念，可仿

照电学中以电力线表示电场的方法用流线来描述速度场。所谓 流线是与空间各点的速度向量相切的曲线。它是这样绘制出来 的：

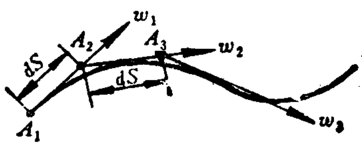

图1-2 流 线

设在某一瞬间t，流体中某点A_1的速度向量为w_1，在w_1的向量上取与A_1点距离为dS的点A_2，A_2点的速度向量为w_2，再 在w_2向 量上取与A_2点距离为dS的A_3点，A_3点的速度向量以w_3 表 示，同样在w_3向量上取A_4点……依此类推，可得$A_1A_2A_3$…这样 一 根折线，见图1-2，若将dS取得很小使之趋近于零， 那么这条折线可变成一条平滑的曲线，此曲线就是在瞬间t时的流线。

据此可以定义流线为：在给定的某瞬间t，位于线上每一点的流体质点速度都与该点曲线的切线方向重合，因此流线方程应为：

$$\frac{dx}{w_x}=\frac{dy}{w_y}=\frac{dz}{w_z} \tag{1-6}$$

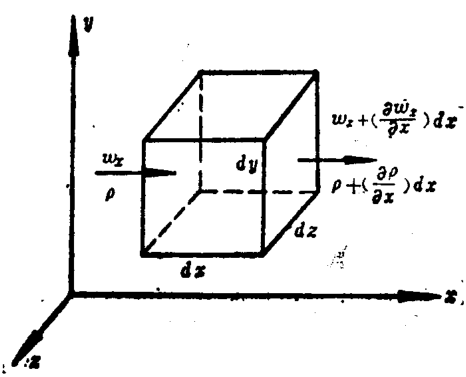

图1-3 微体积元流体质量衡算示意图

需要指出的是流线与流体质点运动的轨迹是不同的，流线是表示同一瞬间各点速度的方向，而轨迹则是指流体中某一质点在连续不同瞬间的速度方向。

§2 流体流动的连续性方程

设想从流动着的流体中取出一个微体积元，见图1-3。并按照质量守恒定律来对进入和流出该微体积元的流体的质量进行衡算，即可导出流体流动的连续性方程。

如若微体积元的边长分别为dx，dy，dz，流体的密度为ρ，流体质点在x，y，z方向上的速度分量分别为w_x，w_y，w_z，那么，在dt时间内，从微体积元垂直x轴的侧面进入的流体质量为：

$$\rho \cdot w_x \cdot dy \cdot dz \cdot dt$$

在同一时间内，以微体积元垂直x轴的另一侧面（见图1-3）流出的流体质量为：

$$\left[\rho w_x + \left(\frac{\partial \rho w_x}{\partial x}\right) dx\right] dydzdt$$

因此，在dt时间内在沿x轴方向上微体积元内流体的累积量为：

$$（进入的量）－（流出的量）$$

$$= \rho w_x dydzdt - \left[\rho w_x + \left(\frac{\partial \rho w_x}{\partial x}\right) dx\right] dydzdt$$

$$= -\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} dxdydzdt$$

同理可以得出在y，z方向上微体积元在dt时间内的累积量：

在沿y轴方向上$-\dfrac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} dxdydzdt$

在沿z轴方向上 $-\dfrac{\partial(\rho w_z)}{\partial z}dxdydzdt$

因此，在dt时间内，微体积元在x，y，z轴方向上总的累积量为：

$$-\left[\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z}\right]dxdydzdt$$

显然它应等于在同一时间微体积元在量上的变化，故得

$$-\left[\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z}\right]dxdydzdt$$

$$=\frac{\partial\rho}{\partial t}dxdydzdt$$

$$\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}\qquad(1-7)$$

上式即为三维流动的连续性方程，是流体力学中的一个基本方程，它亦可改写成：

$$w_x\frac{\partial\rho}{\partial x}+w_y\frac{\partial\rho}{\partial y}+w_z\frac{\partial\rho}{\partial z}+\rho\left(\frac{\partial w_x}{\partial x}+\frac{\partial w_y}{\partial y}+\frac{\partial w_z}{\partial z}\right)$$

$$=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

对于稳定流动，由于$\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=0$ 故上式为：

$$\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z}=0\qquad(1-8)$$

又若流体是不可压缩的，则得

$$\frac{\partial w_x}{\partial x}+\frac{\partial w_y}{\partial y}+\frac{\partial w_z}{\partial z}=0\qquad(1-9)$$

对作一维稳定流动的流体来说，亦可仿照上述三维流动那样

处理而得出一维稳定流动的连续性方程，不过它的形式要简单得多。图1-4即表示在作一维稳定流动的流体中某一微小流束的情况。若在这微小流束中任取一截面O-O，并假定它的截面积为dA，通过这一截面的平均流速为w，又在离截面O-O沿流程距离dS处（见图1-4）另取一截面M-M。若dS为一微小量，那么截面M-M的面积和平均流速可分别以$dA+\frac{\partial(dA)}{\partial S}dS$以及

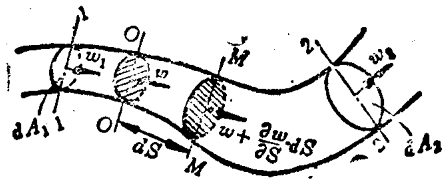

图1-4 一维稳定流动的微小流束

$w+\frac{\partial w}{\partial S}dS$表达，又若流体是不可压缩的，并令密度为$\rho$，则在单位时间内，对于以$dA$及$dA+\frac{\partial(dA)}{\partial S}dS$为端面、长度等于$dS$的这一流体空间来说，自截面$O$-$O$流入的流体质量必须等于自截面$M$-$M$流出的流体质量，即

$$\rho w dA-\rho\left(w+\frac{\partial w}{\partial S}dS\right)\left(dA+\frac{\partial(dA)}{\partial S}dS\right)=0$$

展开上式并略去高阶微小量，则得

$$w\frac{\partial(dA)}{\partial S}dS+dA\frac{\partial w}{\partial S}dS=0$$

上式可改写为：

$$\frac{\partial(wdA)}{\partial S}=0$$

因此得　$wdA=C$

此处C为一常数，乘积wdA代表一微小流束的流量，若以dQ表示，那么从上式可得出：对不可压缩流体，在作稳定的一维流动中，微小流束的流量dQ沿流程不变。若$1-1$与$2-2$分别代表同一微小流束的任意两个截面（见图1-4），则在上述条件下应有：

$$dQ = w_1 dA_1 = w_2 dA_2$$

即

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{dA_2}{dA_1} \tag{1-10}$$

也就是说，在不可压缩流体作稳定的一维流动的条件下，微小流束各截面的流速与其截面积成反比。

§3　理想流体流动的微分方程

方程的导出

按照牛顿第二定律，物体所受外力之和应等于它的动量变化率，即

$$F = \frac{d(mw)}{dt}$$

当质量为常数时

$$F = m\frac{dw}{dt} = ma$$

对于流体质点，我们常用单位体积的质量ρ来代替质量m，这样更方便一些。由此可得到

$$f = \rho a$$

式中，f——单位体积的流体所受外力之和。

作用在流体质点上的外力主要有两类：

(1)场力　当流体质点处于一个力场中，例如：重力场或静电场，它所受到的作用力叫场力。由于场力是作用在整个物体内部的每一微小质点上的，所以又称之为质量力或体积力(body force)。

作用在单位质量上的质量力在 x，y，z 轴上的分量一般用X，Y，Z表示，而作用在单位体积上的质量力以f_B表示。

（2）表面力 它作用在流体质点的表面或内部断面上。单位体积流体所受的表面力以f_s表示。属于表面力的有法向应力和切向应力，切向应力通常是指流体层间的摩擦力。对于理想流体，因粘度为零，流体中没有摩擦力，因此切向应力为零，而法向应力在数值上就相当于流体所受静压力。

因此
$$f=f_B+f_s=\rho\alpha$$

现在我们把上式应用到流体中的一个微元体的x，y，z三个方向上。

在x方向上有

$$\rho\alpha_x=f_{B,x}+f_{s,x}$$

在x方向上作用在单位质量上的质量力分量为X，所以

$$f_{B,x}=\rho X$$

而微元体在x面和$x+dx$面上的压力差为：

$$p-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}dx$$

所以，微元体单位体积所受x方向的总压力为：

$$f_{s,x}=-\frac{\partial p}{\partial x}dxdydz\ \frac{1}{dxdydz}=-\frac{\partial p}{\partial x}$$

若流体质点在x方向的加速度为α，并用随体导数 $\frac{Dw_x}{Dt}$来表示，同时将 $f_{B,x}=\rho X$和$f_{s,x}=-\frac{\partial p}{\partial x}$代入前式，即得

$$\rho\ \frac{Dw_x}{Dt}=\rho X-\frac{\partial p}{\partial x}$$

同样可导出：

$$\rho\frac{Dw_y}{Dt}=\rho Y-\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\rho\frac{Dw_z}{Dt}=\rho Z-\frac{\partial p}{\partial z}$$

这就是1775年由欧拉导出的理想流体运动的微分方程的一种表达形式。

由§1可知，在欧拉法中，对上述微分方程的完整形式应写成：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_x}{\partial t}+w_x\frac{\partial w_x}{\partial x}+w_y\frac{\partial w_x}{\partial y}+w_z\frac{\partial w_x}{\partial z}&=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\
\frac{\partial w_y}{\partial t}+w_x\frac{\partial w_y}{\partial x}+w_y\frac{\partial w_y}{\partial y}+w_z\frac{\partial w_y}{\partial z}&=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\qquad(1\text{-}11)\\
\frac{\partial w_z}{\partial t}+w_x\frac{\partial w_z}{\partial x}+w_y\frac{\partial w_z}{\partial y}+w_z\frac{\partial w_z}{\partial z}&=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned}$$

理想流体的流动理论在实际工程问题中是有用的，当粘性力与其它作用力（如惯性力、压力）相比可以略去时，就可以按照理想流体的流动来计算。此外，在研究流体流过浸没物体的边界层流动时，也可以把边界层外的流动作为理想流体来考虑。

方程求解举例

欧拉流动微分方程描述了理想流体的运动规律，但必须将它积分后才能实际应用，由于数学上的原因，在普遍情况下欧拉方程的积分是很困难的，通常只能就某些情况引入一些假设才可积分。下面仅以一种沿流线积分的简单情况为例。

在积分中还需假设：

（1）流体是不可压缩的，流动是稳定流动。因此在空间任意一点处流体的速度、压力均不随时间改变。

即
$$\frac{\partial p}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial t}=\frac{\partial w_y}{\partial t}=\frac{\partial w_z}{\partial t}=0$$

（2）设质量力仅为沿z轴方向的重力

$$X=Y=0$$

$$Z=-\frac{mg}{m}=-g$$

（3）流体的流动是沿流线的，因此在dx，dy，dz空间满足流线方程

$$w_y dx=w_x dy$$

$$w_z dx=w_x dz$$

$$w_y dz=w_z dy$$

根据假设（1）、（2），欧拉流动微分方程可简化为：

$$w_x\frac{\partial w_x}{\partial x}+w_y\frac{\partial w_x}{\partial y}+w_z\frac{\partial w_x}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$w_x\frac{\partial w_y}{\partial x}+w_y\frac{\partial w_y}{\partial y}+w_z\frac{\partial w_y}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$w_x\frac{\partial w_z}{\partial x}+w_y\frac{\partial w_z}{\partial y}+w_z\frac{\partial w_z}{\partial z}=-g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

将上列诸式分别乘以dx，dy，dz则得：

$$w_x\frac{\partial w_x}{\partial x}dx+w_y\frac{\partial w_x}{\partial y}dx+w_z\frac{\partial w_x}{\partial z}dx=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}dx$$

$$w_x\frac{\partial w_y}{\partial x}dy+w_y\frac{\partial w_y}{\partial y}dy+w_z\frac{\partial w_y}{\partial z}dy=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}dy$$

$$w_x\frac{\partial w_z}{\partial x}dz+w_y\frac{\partial w_z}{\partial y}dz+w_z\frac{\partial w_z}{\partial z}dz=-g\,dz-\frac{\partial p}{\partial z}dz$$

将上列三式相加即得

$$w_x dw_x + w_y dw_y + w_z dw_z = -g dz - \frac{dp}{\rho}$$

$$d\left(\frac{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}{2}\right) = -g dz - \frac{dp}{\rho}$$

积分可得

$$\frac{w^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = 常数 \qquad (1-12)$$

显然根据积分时的假设，此方程只能适用于同一流线的情况，对同一流线上的1、2两点，方程即可以写成：

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2}$$

上式即是理想流体的伯努利（Bernoulli）方程。

§4 粘性流体流动的微分方程

方程的导出

粘性流体流动微分方程首先由奈维（Navier）在1827年导出，后经斯托克斯（Stokes）在1845年提出了粘度和阻力的关系，并对奈维导出的方程改进后得到的。

它仍然是在牛顿第二定律的基础上导出的，只是对于粘性流体所受到的表面力除了法向应力以外，还要考虑相邻流体层之间的摩擦所造成的切向应力（剪应力）。

下面我们来研究在流动的流体中一个微元体表面的受力情况，见图1-5所示，从图中可见在微元体的每个表面上的应力可分解成平行于x，y，z轴的三个应力分量，这样在微元体六个表面上共有18个应力分量，这18个应力按力的作用方向可分为法向