陈传淼

有限元方法及其提高精度的分析

湖南科学技术出版社

有限元方法及其提高精度的分析

陈传森
责任编辑：胡海清
*
湖南科学技术出版社出版
（长沙市展览馆路14号）
湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷二厂印刷
*
1982年1月第1版第1次印刷
开本：787×1092毫米 1/32　印张：7.75　字数：176,000
印数：1——4,200
统一书号：13204·45　　定价：0.82元

序　　言

有限元法是求微分方程数值解的一种重要方法，目前它已成功地应用于结构力学、流体力学、物理学及其它领域，并为工程设计和最优化提供着相当准确可靠的计算数据。

但是如何进一步提高有限元的精度，这仍然是有待解决的重要问题。鉴于一般书籍都未讨论此问题，因此本书第一次比较系统地介绍了提高有限元精度的方法和超收敛性理论。全书分两部分。前四章介绍有限元法的原理与计算公式，指出在实际计算中如何利用超收敛性提高精度，并有数例进行比较说明。内容较通俗，读者只要有微积分与线性代数的知识就够了。最后两章阐述有限元法的收敛性与超收敛性理论（对理论没有兴趣的读者可略去第二部分）。我们希望本书对从事有限元计算的同志是有益的，也能引起理论工作者的兴趣。

什么是超收敛性（Superconvergence）？举个简单例子说明。在小区间 (x_1,x_2) 上作函数 $u(x)$ 的线性插值函数

$$u_I(x)=[(x_2-x)u(x_1)+(x-x_1)u(x_2)]/h,$$

$h=x_2-x_1$。用台劳公式可得到插值余项为

$$u(x)-u_I(x)=0.5(x-x_2)(x-x_1)u''(\bar{x})+o(h^3),$$

$$\bar{x}=(x_1+x_2)/2.$$

注意，导数误差

$$u'(x)-u_I'(x)=(x-\bar{x})u''(\bar{x})+o(h^2)$$

一般仅仅是一阶小量 $o(h)$，但在区间中点 $x=\bar{x}$ 它却是二阶小

量。函数逼近在某些点上特别准确，这就是超收敛的含意。然而富有深刻意义的是，近年来发现，有限元逼近在一定条件下也保持着这种优美的性质。因此，从计算观点来看，利用这种超收敛性质，可以在不增加计算量与存贮量的情况下显著提高有限元的精度。本书数例表明，即使剖分很粗，在超收敛点上提高精度已达数十倍。此外，由于目前计算机解算三维问题相当困难(称为“三维烦恼”)，当剖分较粗时，未知数也往往在数千以上，方程组系数高达数十万至数百万，用加密网格进一步提高精度，目前很难。然而现在可以利用有限元的超收敛性质显著地提高精度，这就为解决更广泛、更复杂的问题（如非线性问题、动力问题等）开辟了新的前景

有限元的超收敛性研究最早见于1972年。此后，这个问题引起了许多理论工作者的兴趣。美国著名教授G.斯特朗在1974年国际数学家会议报告中，将有限元的收敛性研究分为四个阶段：古典里兹法，二次泛函不定号，变形的伽略金法以及超收敛性。十年来，虽然J.道格拉斯，J.布朗伯，T.杜勃，V.托梅等数值分析专家做了许多重要工作，但是超收敛性质仍未完全弄清楚。至于另一些重要情形，例如含间断系数，奇异系数，角域，非协调元，非线性问题等，至今研究更少。

由于本人实际经验不足，水平有限，书中错误和不妥之处，望同志们批评指出。

本书在编写过程中，得到了湘潭大学科研处的关心与支持，长沙铁道学院李廉锟教授审阅了全部原稿，并提出宝贵意见，作者在此一并表示衷心的感谢！

陈 传 森

一九八一年元月于湘潭大学

目　　录

第一章　一维有限元法

本章以二阶常微分方程两点边值问题为对象，介绍有限元法的基本思想、步骤以及提高精度的某些方法，其要点有以下六个方面：1）把边值问题转化为相应的变分问题；2）将求解区域剖分为许多小单元，并构造分片多项式插值函数；3）形成单元矩阵，采用合适的数值求积公式赋值；4）组集单元矩阵为总矩阵；5）用直接法或迭代法求解线性代数方程组；6）回到各单元，选择在精度高的点（即有限元解及其导数的超收敛点）上计算位移与应力。本书特别强调最后一步骤的重要性，作了详细介绍，并用数例加以比较。我们认为，合理运用各种超收敛性质，是提高有限元精度的一种有效措施。

§1　边值问题与变分问题的物理背景

1.两点边值问题　在区间$\Omega=(a,b)$上考虑由二阶常微分方程

$$Lu\equiv-(p(x)u')'+q(x)u=f(x),\quad x\in\Omega, \tag{1.1}$$

与边界条件

$$\alpha_1u'(a)-\beta_1u(a)=0,\alpha_2u'(b)+\beta_2u(b)=0 \tag{1.2}$$

$$\alpha_j\geqslant0,\ \beta_j\geqslant0,\ j=1.2.$$

所构成的两点边值问题。假定$p(x)$，$p'(x)$，$q(x)$，$f(x)$在闭区间$\overline{\Omega}$上连续，且

$$p(x)\geqslant p_0>0,\ q(x)\geqslant 0。\qquad (1.3)$$

其中p_0是某正数.我们常把边界条件(1.2)具体区分为三种情形(以端点$x=a$为例)：

1) 第一边界条件(描述端点固定)：

$$u(a)=0。\qquad (1.4)$$

2) 第二边界条件(端点自由)

$$u'(a)=0。\qquad (1.5)$$

3) 第三边界条件(端点受弹性力支承)

$$u'(a)-\beta_1 u(a)=0。\qquad (1.6)$$

其中1) 只含u，称为本质（或强加）边界条件，2)与3)含导数u'，称为自然边界条件。端点b也可分三种情形。两个端点的不同组合共六种可能的边界条件。为照顾边界条件在性质上的差别，常综合考虑典型的边界条件

$$u(a)=0,\ u'(b)=0。\qquad (1.7)$$

为叙述简便，引进m次连续可微函数类$C^m(\Omega)$。若$u(x)$及导数$u'(x),\cdots,u^{(m)}(x)$都在$\overline{\Omega}$上连续，则记$u\in C^m(\Omega)$（$\in$读作“属于”）。

边值问题(1.1)，(1.2)的古典解是指这样的函数$u(x)\in C^2(\Omega)$，它满足方程(1.1)和边界条件(1.2)。数学上已证明，边值问题(1.1),(1.2)有古典解，若不是边界条件$u'(a)=u'(b)=0$且$q\equiv 0$，此古典解也是唯一的。

古典解$u(x)$的光滑性如何，完全决定于系数与右端函数的光滑性：若$p,p',q,f\in C^m(\Omega),m\geqslant 0$，则古典解$u\in C^{m+2}(\Omega)$.事实上，将(1.1)写为

$$u''=(-p'u'+qu-f)/p。$$

若$m>0$，对上式右端求导数,依次可知$u'''(x),\cdots,u^{(m+2)}(x)$在$\overline{\Omega}$上连续。

两点边值问题可以描述杆件的温度分布，杆件的拉伸与压缩，绕某轴旋转的绳索的平衡等物理现象。许多重要的二、三维问题，当它们有旋转对称或球对称性质时，也可简化为两点边值问题。下面考虑一个实际例子。

2.弹性杆件的拉伸与压缩，考虑一根长为l、截面积为$S(x)$的弹性细杆，上端固定，在自重及下端拉力P作用下的平衡问题(图1)。由于力的作用，在截面x处，记单位面积受的力（应力)为$\sigma(x)$，杆件朝x方向产生位移$u(x)$，原来的一小段$(x,x+dx)$，形变后为$(x+u(x),\ x+dx+u(x+dx))$，其相对伸长(应变)是

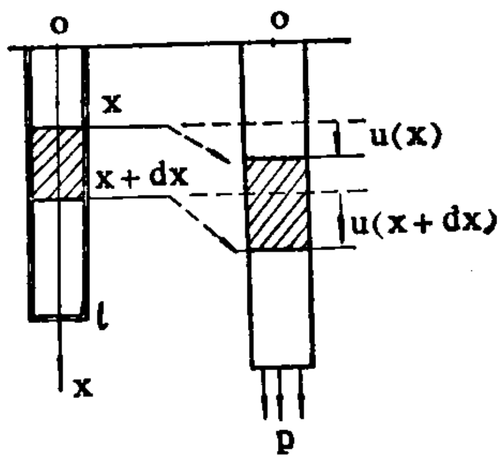

图1

$$\varepsilon(x)=\frac{x+dx+u(x+dx)-(x+u(x))}{dx}-1\doteq\frac{du}{dx}.$$

($\varepsilon>0$表示拉伸，$\varepsilon<0$为压缩)按虎克定律，在弹性形变范围内杆件的应力与应变成正比：

$$\sigma=E\varepsilon=E\frac{du}{dx}. \tag{1.8}$$

其中E是材料的弹性模数(或杨氏模量)，一般假定为常数。

在截面x处，杆件的作用力为$S(x)\sigma(x)$，在截面$x+dx$处，作用力为$S(x+dx)\sigma(x+dx)$，其改变量必与小段$(x,x+dx)$的自重$S(x)\rho g dx$平衡(ρ是材料密度，g是重力加速度)：

$$\frac{d}{dx}(S(x)\sigma(x))dx+S(x)\rho g dx=0$$

或写为

$$-(ESu')'=\rho gS,\qquad 0<x<l. \tag{1.9}$$

上端固定$u(0)=0$，下端受拉力P作用$S(l)\sigma(l)=P$，故边界条件是：

$$u(0)=0, \qquad u'(l)=P/ES(l). \tag{1.10}$$

顺便指出，一般材料的弹性应变都很小，称为小形变。如钼钢$\varepsilon_{max}=0.001$。另外，当细杆被拉伸时，杆的截面积要缩小，宛如有压力作用在杆侧面上，因此，侧面方向（设y,z 轴与x轴垂直）实际上也产生了应变ε_y，ε_z，其应力都是

$$E\varepsilon_y=E\varepsilon_z=-\nu\sigma_x.$$

其中ν称为泊松比，$0<\nu<0.5$。在第三章用到这个附注。

3.最小拉伸原理 仍考虑杆的拉伸，截面x处有作用力$S(x)\sigma(x)=ES(x)u'(x)$，从没有伸长$u=0$增加到有伸长$u(x)$的过程中，此内力贮存的位能为

$$\frac{1}{2}\int_0^l ES(u')^2dx,$$

重力作功为$\int_0^l g\rho Su dx$，端点$x=l$处外力作功$Pu(l)$，故总位能

$$J(u)=\int_0^l\left(\frac{1}{2}ESu'^2-\rho gSu\right)dx-Pu(l). \tag{1.11}$$

满足本质边界条件$u(0)=0$的所有函数记为V。对任何函数$\omega\in V$可算出总位能$J(\omega)$。但是什么样的函数ω才真正代表杆件的平衡位移呢？力学中的最小位能原理回答了此问题：杆件的平衡位移$u\in V$使总位能$J(\omega)$达到最小值

$$J(u)=\min_{\omega\in V}J(\omega) \tag{1.12}$$

在V中寻求u使能量$J(\omega)$达到极值的问题数学上叫变分问题.下节将证明，若$u\in C^2(\Omega)$，则解边值问题(1.9),(1.10) 与解变分问题(1.12)是等价的。

然而两者对“解”的理解与要求是不同的。边值问题要求

解u有二阶导数，变分问题只要u的一阶导数平方可积分就够了。因此，我们把变分问题的解看作是边值问题的广义解。将边值问题转化为相应的变分问题，对有限元法的产生与发展是极为重要的。

最后指出，两点边值问题(1.1)，(1.3—5) 相应的能量积分是：

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_a^b(pu'^2+qu^2)dx-\int_a^b fudx$$

$$+\frac{\lambda}{2}u^2(a)+\frac{\mu}{2}u^2(b). \qquad (1.13)$$

其中λ，μ分别取值如下：

边界条件	端点$x=a$	端点$x=b$
第一、二类	$\lambda=0$	$\mu=0$
第三类	$\lambda=\beta_1 p(a)$	$\mu=\beta_2 p(b)$.

§2 变分问题和函数类$H^m(\Omega)$

1. 函数类$H^m(\Omega)$ 为解变分问题，我们必须从m 次连续可微函数类$C^m(\Omega)$转向更广泛的新型函数类$H^m(\Omega)$。

先考虑$H^0(\Omega)$，它是这样一些函数u的全体，其平方$|u(x)|^2$在Ω上可积(可理解为通常的黎曼积分)。u的模(或范数)记为

$$\|u\|_0=\left\{\int_\Omega|u(x)|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.1)$$

连续函数、分段连续函数，特别是分段为常数的函数，都属于$H^0(\Omega)$，但是$H^0(\Omega)$中还包括更广的函数．注意，“平方可积”的要求比“可积”强些，例如$u=x^{-\frac{1}{2}}$在[0,1]上可积，但其平方不可积。

若对函数列$\{u_n\}\in H^0(\Omega)$有函数$u\in H^0(\Omega)$使

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n-u\|_0=0,$$

则称$\{u_n\}$平方平均收敛于u。

设u，$v\in H^0(\Omega)$，定义它们的内积为

$$(u,\ v)=\int_\Omega u(x)v(x)dx. \tag{2.2}$$

我们证明著名的许瓦兹不等式

$$|(u,v)|\leqslant\|u\|_0\|v\|_0 \tag{2.3}$$

和三角不等式

$$\|u+v\|_0\leqslant\|u\|_0+\|v\|_0. \tag{2.4}$$

事实上，对任何实数λ，λ的二次三项式

$$\int_\Omega(\lambda u+v)^2dx=\lambda^2\int_\Omega u^2dx+2\lambda\int_\Omega uvdx+\int_\Omega v^2dx$$
$$\geqslant 0$$

不变号，其判别式必须非正

$$\left(\int_\Omega uvdx\right)^2-\int_\Omega u^2dx\cdot\int_\Omega v^2dx\leqslant 0.$$

由此得(2.3).其次由(2.3)

$$\begin{aligned}\|u+v\|_0^2&=\|u\|_0^2+2(u,v)+\|v\|_0^2\\&\leqslant\|u\|_0^2+2\|u\|_0\|v\|_0+\|v\|_0^2=(\|u\|_0\\&+\|v\|_0)^2.\end{aligned}$$

两边开平方推出(2.4).

这种方法用于级数求和可得柯西不等式

$$\left|\sum_{k=1}^n a_kb_k\right|\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}. \tag{2.5}$$

若u在$\overline{\Omega}$上连续，导数$u'(x)\in H^0(x)$且成立$u(x)-u(x_0)=\int_{x_0}^x u'(t)dt$，则称$u$属于函数类$H^1(\Omega)$。定义$u$在$H^1(\Omega)$的模

为

$$\| u \|_1 = \left\{ \int_\Omega (|u(x)|^2 + |u'(x)|^2) \, dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

若函数列$\{u_n\} \in H'(\Omega)$与函数$u \in H'(\Omega)$有

$$\lim_{n \to \infty} \| u - u_n \|_1 = 0,$$

则意味着u_n，u_n'分别平方平均收敛于u，u'。

连续可微函数$C'(\Omega)$，连续且分段连续可微函数，都属于$H'(\Omega)$。例如函数

$$f(x) = \begin{cases} 2x/l, & \text{当} 0 \leqslant x \leqslant l/2, \\ 1, & \text{当} l/2 \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{2.6}$$

在$[0,l]$上连续，在$[0,l/2][l/2,l]$上连续可微，故$f \in H'(\Omega)$。其模

$$\| f \|_1 = \sqrt{2/l + 2l/3}.$$

下面证明两个重要不等式

1)若$u \in H'(\Omega)$且$u(0) = 0$，则有不等式(Friedrichs)

$$\sqrt{\int_0^l |u(x)|^2 dx} \leqslant l \sqrt{\int_0^l |u'(x)|^2 dx}. \tag{2.7}$$

证 由于 $u(x) = u(x) - u(0) = \int_0^x u'(t) dt.$

利用许瓦兹不等式

$$|u(x)|^2 = \left| \int_0^x 1 \cdot u'(t) dt \right| \leqslant l \cdot \int_0^l |u'(x)|^2 dx$$

两边积分可得(2.7)。

2)若$u \in H'(\Omega)$，则有不等式(Sobolev)

$$|u(x)| \leqslant C \| u \|_1, \; C = \sqrt{2/l + 2l/3} \tag{2.8}$$

证 先设 $x \in [l/2, l]$，按(2.6)构造 $f(x) \in H'(\Omega)$，考虑$\omega = uf$。显然$\omega(0) = 0$，且

$$u(x)=\omega(x)-\omega(0)=\int_0^x \omega'(t)dt=\int_0^x (u'f+uf')dt.$$

由柯西不等式(2.5)和许瓦兹不等式得

$$|u(x)|\leqslant\int_0^l |\omega'(t)|dt\leqslant\|f\|_1\|u\|_1\leqslant C\|u\|_1.$$

改变$f(x)$的作法，类似可证$x\in[0,l/2]$的情形。

一般可定义函数类$H^m(\Omega)$，$m>0$。若函数$u\in C^{m-1}(\Omega)$，且$u^{(m-1)}(x)\in H^1(\Omega)$，则称$u\in H^m(\Omega)$。

2.变分问题的等价性，考虑典型的边界条件(1.7)。$H'(\Omega)$中所有满足本质边界条件$u(a)=0$的函数全体记为V（自然边界条件$u'(b)=0$不管）。在V上考虑能量积分

$$J(\omega)=\frac{1}{2}\int_a^b (p\omega'^2+q\omega^2-2f\omega)dx. \tag{2.9}$$

此能量$J(\omega)$也象二次多项式一样，它必在某$u\in V$上达到最小值

$$J(u)=\min_{W\in V} J(\omega), \tag{2.10}$$

也即是说可以找到一串函数$u_n\in V$使

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n)=J(u)+0. \tag{2.11}$$

函数列u_n称为能量$J(\omega)$的极小化序列，u称为变分问题(2.9)的解。

设$u\in V$是（2.10）的解，任取$v\in V$，考虑$w=u+av\in V$，展开$J(w)$可知

$$J(w)=J(u)+a\int_a^b (pu'v'+quv-fv)dx$$

$$+\frac{1}{2}a^2\int_a^b (pv'^2+qv^2)dx. \tag{2.12}$$

由于对任意实数a，$J(u+av)\geqslant J(u)$，$J(u+av)$在$a=0$达到最小值，由微分学定理，u满足变分方程(或虚功方程)：

$$\left.\frac{dJ}{da}\right|_{\alpha=0}=\int_a^b(pu'v'+quv-fv)dx=0, \qquad (2.13)$$

反之，若对任何$v\in V$，函数$u\in V$是虚功方程（2.13）的解．对任何$w\in V$，取$v=w-u\in V$，由（2.12）得

$$J(w)=J(u)+\frac{1}{2}\int_a^b(pv'^2+qv^2)dx\geqslant J(u), (2.14)$$

即u必是变分问题（2.10）的解．因此，解变分问题（2.10）与解虚功方程(2.13)是完全等价的．我们证明：它们的解是唯一的．事实上，设变分问题有另一个解w，$J(w)=J(u)$，则由(2.14)有

$$\int_a^b(pv'^2+qv^2)dx=0,$$

即$v'\equiv 0$，v为常数．由$v(a)=0$推出$v=w-u=0$．

变分学引理 设$f(x)\in C^0(\Omega)$，对任意$\varphi\in V$有

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx=0$$

则$f(x)=0$．

证 设$f(x)\neq 0$，则Ω内有某点x_0使$f(x_0)\neq 0$(不妨设$f(x_0)>0$)．由连续性，在Ω内有x_0的某邻域$K_\rho=\{|x-x_0|<\rho\}$使$f(x)>0$，作

$$\varphi(x)=\begin{cases}\rho^2-(x-x_0)^2, & \text{在}K_\rho\text{内},\\ 0, & \text{在}K_\rho\text{外}.\end{cases}$$

显然$\varphi\in V$，在K_ρ内$\varphi>0$，因此

$$\int_\Omega f(x)\ \varphi(x)dx=\int_{K\rho}f(x)\varphi(x)dx>0$$

与假设相矛盾．因此必须$f(x)=0$．

此引理对多个自变数也成立．证明中只要将邻域K_ρ 理解为圆、球即可．

下面考虑变分问题与边值问题的等价性．设$u\in V$，

$u\in C^2(\Omega)$是虚功方程（2.13）的解，分部积分，并利用本质边界条件$v(a)=0$，

$$\int_a^b[-(pu')'+qu-f]vdx+pu'v|_{x=b}=0.$$

暂设$v(b)=0$，由变分学引理推出u在Ω内满足微分方程$-(pu')'+qu-f=0$。因此，即使$v(b)\neq 0$，由上式也有$(pu'v)_{x=b}=0$，即u自动满足边界条件$u'(b)=0$。因此，u是边值问题（1.1），（1.7）的古典解。反之，若$u\in C^2(\Omega)$是边值问题（1.1），（1.7）的古典解，倒推上去，可知u满足虚功方程（2.13）。因此我们证明了，当$u\in C^2(\Omega)$时，解虚功方程(2.13)与解边值问题（1.1），（1.7）是等价的。

但是，解虚功方程（2.13）只要求$u\in H^1(\Omega)$。于是我们很自然地把变分问题看作是边值问题的一种合理的推广。

3.极小化函数列的收敛性 定义双线性型

$$B(u,v)=\int_a^b(pu'v'+quv)dx,\ \ u,v\in V. \tag{2.15}$$

设$|p|\leqslant C$，$|q|\leqslant C$，由不等式（2.5）和（2.3）

$$\begin{aligned}|B(u,v)|&\leqslant C\int_a^b(|u'v'|+|uv|)dx\\&\leqslant C\|u\|_1\|v\|_1.\end{aligned} \tag{2.16}$$

另外，取$\alpha=(1+(b-a)^2)^{-1}$，利用不等式(2.7)

$$\begin{aligned}B(v,\ v)\geqslant p_0\int_a^b v'^2dx\geqslant p_0\Big[\alpha\int_a^b v'^2dx\\+(1-\alpha)(b-a)^{-2}\int_a^b v^2dx\Big]\end{aligned}$$

于是对任何$v\in V$得到

$$B(v,v)\geqslant\gamma\|v\|_1^2,\ \ \gamma=p_0\alpha>0 \tag{2.17}$$

设$\{u_n\}\in V$是（2.11）中的极小化函数列，

令 $u_n = u + (u_n - u)$，由 (2.14)，当$n\to\infty$时

$$\frac{1}{2}B(u_n - u, u_n - u) = J(u_n) - J(u) \longrightarrow 0。\quad (2.18)$$

由 (2.17) 可知

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n - u\|_1^2 \leqslant \frac{1}{\gamma}\lim_{n\to\infty}B(u_n - u, u_n - u) = 0。\quad (2.19)$$

于是得到一个重要结论：使能量$J(w)$极小化的函数列 $\{u_n\}\in V$ 按$H'(\Omega)$模收敛于变分问题的解u。

我们指出，若极小化函数列$\{u_n\}$满足本质边界条件$u_n(a)=0$，则其极限函数 u 也满足 $u(a)=0$。事实上，由不等式 (2.8)，当$n\to\infty$时

$$|u_n(a) - u(a)| \leqslant C\|u_n - u\|_1 \longrightarrow 0。$$

由于$u_n(a)=0$，推出$u(a)=0$。因此，在求解变分问题时，我们要求V(容许函数类)中的函数必须满足本质边界条件。

但是，即使极小化函数列$\{u_n\}$满足自然边界条件$u_n'(b)=0$，由 $H'(\Omega)$ 模的收敛性$\|u_n - u\|_1\to 0$，一般无法断定$u_n'(b)-u'(b)\to 0$或$u'(b)=0$ (前面知道，若 $u\in C^2(\Omega)$，自然会满足 $u'(b)=0$。但对$u\in H'(\Omega)$，$u'(b)$甚至可能没有意义)。因此，在求解变分问题时，我们不必要求容许函数类V满足自然边界条件，或者说，求解过程中让其自然。

§3 里兹(Ritz)法

里兹方法是求解变分问题的一种近似方法。其基本思想如下：

首先在容许函数类V中构造一串函数类S_n，$n=1,2,\cdots$ (称为试探函数类)，它们满足：