解析几何

★ 吕林根 张紫霞 孙存金

★ 高等教育出版社

★ GAODENG JIAOYU CHUBANSHE

解 析 几 何

吕林根 张紫霞 孙存金 编

高等教育出版社

本书参照中学教师进修高等师范专科《解析几何》教学大纲与中学教师《专业合格证书》文化专业知识考试《解析几何》教学大纲编写而成的．全书共分九章，前三章为平面解析几何，后六章为空间解析几何．

本书取材适度，讲解详细，文字通俗易懂．每章的小结可帮助读者掌握全章的重点与要点．书末附有习题答案．配合本书的《解析几何学习指导书》可帮助读者解疑．

本书是卫星电视教育，教育学院，函授师范大学，中学教师《专业合格证书》文化专业知识考试与成人教育自学考试的教材或参考书．

解析几何

吕林根　张紫霞　孙存金　编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

*

开本850×1168　1/32　印张10.875　字数260 000

1988年5月第1版　1989年3月第2次印刷

印数 20 151—40 150

ISBN 7-04-000989-7/O·553

定价　2.50元

前　言

本书是参照了中学教师进修高等师范专科数学专业《解析几何》教学大纲(经原教育部审批，于1984年8月颁发试行)与中学教师《专业合格证书》文化专业知识考试《解析几何》教学大纲(国家教育委员会师范教育司编)编写的．是供卫星电视教育、教育学院、函授师范大学，中学教师《专业合格证书》文化专业知识考试与成人教育自学考试的教材或参考书．

本书编写时，我们注意到了成人、自学、远距离教育等特点，力求取材适度，深入浅出、循序渐进，文字通俗易懂，条理清楚，讲解详细．为了帮助读者及时巩固基本概念，掌握解题的基本方法与技巧，我们在每一节配备了适量的习题，并在书末附上习题答案与提示．在每一章后，都有该章的小结，以供读者复习和帮助读者掌握全章的重点与精神．

全书共分九章，前三章为平面解析几何，后六章为空间解析几何，其中带有*号的章节，是供有进一步要求的读者参考的．平面部分从复习中学解析几何的坐标法开始，进一步阐明解析几何的基本思想与方法，在此基础上，环绕着中学解析几何内容作了某些拓宽与加深．这部分教材，对于学过中学解析几何的读者能起到复习、巩固与提高的作用，对于尚不熟悉中学解析几何的读者，它能帮助尽快掌握平面解析几何的基本思想方法与它的基本内容．空间部分从向量代数开始，较为系统地介绍了空间解析几何的基本内容，第四章向量代数暂不引入坐标，目的是使读者能较好地掌握向量代数的基本内容与熟练地进行向量的各种运算，并能直接利用向量来解决一些问题，第五章利用向量引进了空间直角坐标，使向量的运算转化为数的运算，最后四章要求读者能用向量或坐标方法来讨论平面，空间直线，特殊曲面，二次曲面以及一般二次

曲面.

根据卫星电视教育的特点，配合本书，我们另行编写了《解析几何学习指导书》帮助读者解疑，进一步理解教材的精神以及提高读者的解题能力.

在编写过程中，我们曾和江苏省十二所教育学院，淮阴师专，徐州师范学院与南京师范大学的部分老师讨论了本书的《编写提纲》，根据大家提出的要求与意见，对本书的内容与要求作了调整与修改. 北京师范学院的刘增贤副教授与王汇淳老师审阅了全稿，提出了许多宝贵的意见. 我系的张筑生同志绘制了全书的插图. 高等教育出版社的同志在本书的定稿与出版过程中，也做了大量的工作，在此一并致谢.

限于编者的水平与时间的仓促，书中的不妥与错误在所难免，我们热诚地希望广大读者与使用本书的老师多多提出宝贵的意见.

编　者

1987 年 9 月于苏州大学数学系

目　　录

第一章 平面坐标法

解析几何是一门用代数方法来研究几何问题的学科. 这一章,我们将从复习中学数学中的坐标法开始,进一步明确解析几何的基本思想与方法,这就是在平面上通过坐标系的引进,建立起平面上的点与实数对,曲线与方程的对应关系,也就是以一对实数来表示点,以方程来表示曲线. 这样就把平面上的几何结构数量化、代数化了,从而也就可以把研究问题的代数方法引入到几何中来了. 这一章是平面解析几何的基础,进一步的理解与掌握这些内容,对于今后的学习将是非常重要的.

§ 1.1 平面直角坐标

1. 平面直角坐标系

我们知道,在一条直线的两个方向中,如果把其中的一个规定为正方向,那么另一个为负方向,这样的直线就叫做**有向直线**;规定了起点与终点的线段叫做**有向线段**,以 A 为起点,B 为终点的有向线段记做 $\overline{AB}$;选定了一条线段作为长度单位,我们就可以量得一条有向线段的长度;当有向线段 $\overline{AB}$ 配置在有向直线 l 上或平行于直线 l 时(图 1-1),根据有向线段 $\overline{AB}$ 与有向直线 l 的方向相同或相反,分别把它的长度加上正号或负号(即同向为正,异向为负),这样所得到的数叫做有向线段的数值(或数量),并用 AB 表示,从而有向线段 $\overline{AB}$ 的长度常用 $|AB|$ 来表示. 显然

$$AB=-BA.$$

我们又知道,在直线上规定了正方向,取定一点 O 与长度单位 e,就构成了数轴. 在数轴上,每一个点 P 的位置都可以用唯一的实数来刻划(图 1-2);x 的绝对值表示 O 到 P 的距离,即 $|x|=$

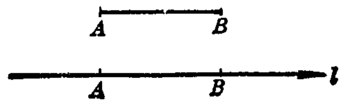

图 1-1

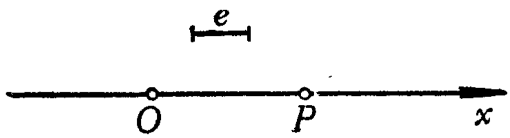

图 1-2

$|OP|$，当 O 到 P 的方向与数轴的方向相同时 x 为正数，方向相反时 x 为负数，也就是说 x 等于有向线段 $\overline{OP}$ 在数轴上的数值，即

$$x=OP,$$

而点 O 对应于数0；反过来，任意给定一实数 x，在数轴上有且仅有一点 P 与它对应．点 P 是有向线段 $\overline{OP}$ 的终点，$\overline{OP}$ 的长度等于 x 的绝对值，当 $x>0$ 时，$\overline{OP}$ 的方向与数轴的方向相同；当 $x<0$ 时，$\overline{OP}$ 的方向与数轴的方向相反；如果 $x=0$，点 P 与 O 重合．这样就建立了数轴上所有点与全体实数之间的一一对应的关系．

在直线上规定了正方向，取定一点 O 与长度单位后，直线上的点 P 与实数 $x(=OP)$ 之间就建立了一一对应，这时我们就说在此直线上确定了一个坐标系．这条直线（即数轴）叫做坐标轴，点 O 叫做坐标原点，x 叫做点 P 在这个坐标系中的坐标，坐标为 x 的点 P 记做 $P(x)$．当坐标轴上任意给定了两点 $A(x_1)$，$B(x_2)$，那么不论 A，B 在坐标轴上的位置如何（如图 1-3），读者不难自行验证，下面的关系式总成立

$$AB=OB-OA,$$

或

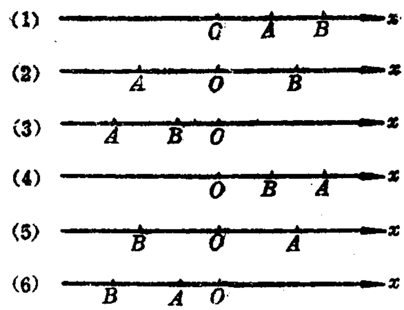

图 1-3

$$AB = x_2 - x_1,$$

所以数轴上两点 A，B 之间的距离为

$$|AB| = |x_2 - x_1|. \tag{1.1-1}$$

为了用数来刻划平面上的点的位置，我们可以在平面上取两条互相垂直且有公共原点 O 的数轴，一条叫做 x 轴，通常把它画成水平的；另一条叫做 y 轴，把它画成铅直的(图 1-4)；两轴上的长度单位一般是相同的. 于是平面上任一点就能用一对有序实数来刻划. 例如平面上的一点 M，由 M 分别作 x 轴与 y 轴的垂线，得到垂足 P 与 Q. 设 x 是 P 在 x 轴上的坐标，y 是 Q 在 y 轴上的坐标，这样点 M 就确定了有序实数对 (x, y). 反过来，任意给定一有序实数对 (x, y)，就可以在 x 轴与 y 轴上分别确定两点 P 与 Q，使 $OP = x$，$OQ = y$，从 P 与 Q 分别作平行于两坐标轴的两条直线，这

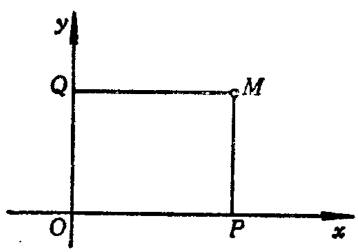

图 1-4

两直线确定了唯一的交点M. 这样，平面上的点M与有序实数对(x,y)之间就建立了一个一一对应的关系.

在平面上取定了两条相互垂直且有公共原点的数轴Ox与Oy，平面上的点M与有序实数对(x, y)就建立了一一对应，我们就说在平面上确定了一个*直角坐标系*，记做$O\text{-}xy$，Ox轴，Oy轴都叫做*坐标轴*并称Ox轴为*横轴*Oy轴为*纵轴*，两轴的公共点O叫做*坐标原点*，平面上的点M所对应的有序实数对(x, y)叫做点M在给定坐标系中的坐标，其中x叫做横坐标，y叫做纵坐标，并用记号$M(x,y)$表示点M具有坐标x,y.

平面上的直角坐标系$O\text{-}xy$中，两轴Ox与Oy的配置有两种情况，将x轴按逆时针方向绕原点O旋转$\frac{\pi}{2}$与y轴重合时，如果两轴的方向一致，那么就称$O\text{-}xy$为*右手系*（图 1-5）；否则，就叫做*左手系*（图 1-6）. 今后我们一般采用右手直角坐标系.

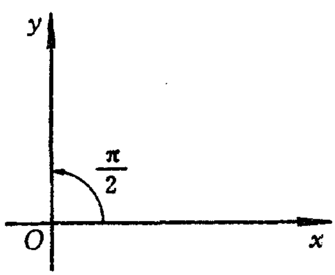

图 1-5

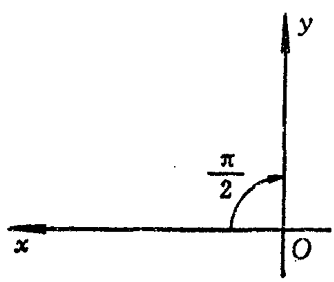

图 1-6

两坐标轴把平面划分成四个部分，每一部分叫做一个象限，当象限中点的坐标符号为$(+,+)$，$(-,+)$，$(-,-)$与$(+,-)$时，它们依次叫做第Ⅰ象限，第Ⅱ象限，第Ⅲ象限与第Ⅳ象限（图 1-7）.

坐标轴上的点不属于任何一个象限. x轴上的点的坐标为$(x,0)$，y轴上的点的坐标为$(0,y)$，原点的坐标为$(0,0)$.

例 1 有一边长为a的正方形，取两对角线所在的直线为坐

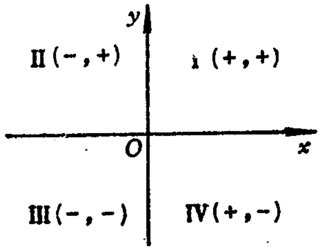

图 1-7

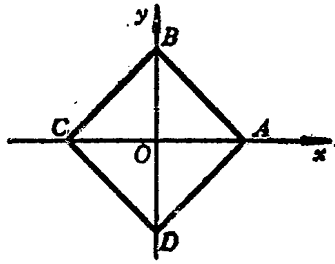

图 1-8

标轴，求正方形四个顶点的坐标.

解 如图 1-8，因为正方形 $ABCD$ 的边长为a，所以它的对角线长为 $\sqrt{2}\,a$，因此正方形四顶点 A, B, C, D 的坐标依次为

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0\right), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0\right), \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a\right).$$

如图 1-9，如果以正方形的一对邻边所在的直线为坐标轴，建立直角坐标系，且置正方形于第Ⅰ象限，那么它的四个顶点 A, B, C, D 的坐标依次为 $(0,0)$，$(a,0)$，(a,a)，$(0,a)$.

由上例，我们可以看出，点的坐标是对于确定的坐标系而言的，同一个点在不同的坐标系中，一般有不同的坐标. 当然，反过来，同一有序实数对 (x, y) 在不同的坐标系中，也对应着不同的点.

2. 平面解析几何的两个基本公式

在平面上建立了直角坐标系以后，平面上的点的位置就完全由它的坐标决定，这样我们就可以利用点的坐标来讨论一些几何问题. 在这里我们将介绍平面解析几何的两个基本公式，即两点间的距离公式与线段的定比分点的坐标公式.

1) 两点间的距离

已知两点 $M_1(x_1, y_1)$ 与 $M_2(x_2, y_2)$（图 1-10），我们来求这两

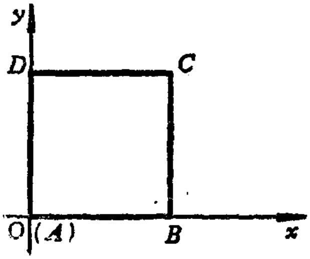

图 1-9

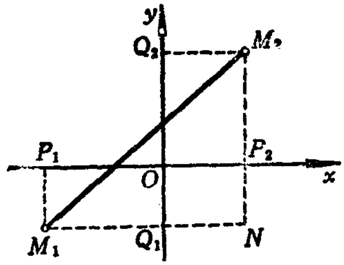

图 1-10

点间的距离 $|M_1M_2|$.

先考虑一般的情况，即两点 M_1 与 M_2 所连成的线段 M_1M_2 与坐标轴不平行，也就是 $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$，这时从 M_1 与 M_2 分别向 x 轴与 y 轴作垂线 M_1P_1, M_1Q_1，与 M_2P_2, M_2Q_2，垂足分别为 $P_1(x_1, 0)$, $Q_1(0, y_1)$ 与 $P_2(x_2, 0)$, $Q_2(0, y_2)$，并设 M_1Q_1 与 M_2P_2 相交于 N，那么在直角三角形 M_1M_2N 中，由勾股定理得

$$|M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2,$$

因为 $$|M_1N| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|,$$

$$|NM_2| = |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|,$$

所以 $$|M_1M_2|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2,$$

于是 $$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (1.1\text{-}2)$$

这个公式对于 M_1M_2 与 x 轴或 y 轴平行时也成立。这是因为当 M_1M_2 与 x 轴平行，即 $y_1 = y_2$ 时，有

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1| = |M_1M_2|;$$

当 M_1M_2 与 y 轴平行，即 $x_1 = x_2$ 时，有

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1| = |M_1M_2|.$$

于是平面上任意两点 $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ 之间的距离公式为(1.1-2)。特别地，点 $M(x, y)$ 与原点 $O(0, 0)$ 的距离 r 为

$$r=\sqrt{x^2+y^2}.\tag{1.1-3}$$

例 2 在 x 轴上求一点，使这点与坐标原点间的距离等于这点到点(2,2)的距离.

解 因为所求点在 x 轴上,所以可设所求点为(x ,0),那么它到原点的距离为 $|x|$,而到点(2,2)的距离为 $\sqrt{(x-2)^2+4}$，根据题意有

$$|x|=\sqrt{(x-2)^2+4},$$

即
$$x^2=(x-2)^2+4,$$

于是
$$x=2.$$

所以所求的点为(2,0).

2）线段的定比分点

已知两点 M_1,M_2,通过它们引直线,并且任意取定正方向成为有向直线,点 M 是这有向直线上的某一点,设点 M 分有向线段 $\overline{M_1M_2}$ 成 $\overline{M_1M}$ 与 $\overline{MM_2}$,并且 $\dfrac{M_1M}{MM_2}=\lambda$，点 M 就叫做分有向线段 $\overline{M_1M_2}$ 为定比 λ 的定比分点.

如果 M 在 M_1,M_2 两点之间(图 1-11),M 点叫做 $\overline{M_1M_2}$ 的内分点,这时 $\overline{M_1M}$ 与 $\overline{MM_2}$ 同向,M_1M 与 MM_2 同号,所以 $\lambda>0$,且可以是任何正数. 如果 M 在线段 M_1M_2 的延长线上(图 1-12),点 M 叫做 $\overline{M_1M_2}$ 的外分点,这时 $\overline{M_1M}$ 与 $\overline{MM_2}$ 异向,M_1M 与 MM_2 异号,所以 $\lambda<0$,但只能是除 -1 以外的任何负数,因为如果 $\lambda=-1$,将有 $M_1M=-MM_2$,或 $M_1M=M_2M$,于是 M_1 与 M_2 重合,这与题设矛盾. 如果 M 与 M_1 重合,那么 $\lambda=0$;如果 M 与 M_2 重合,那么 λ 不存在.

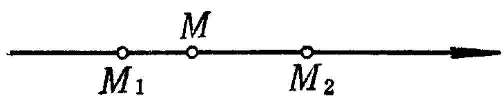

图 1-11

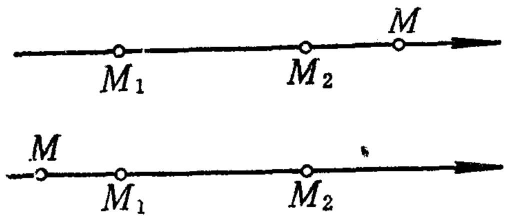

图 1-12

现在来求分点的坐标. 设 $M_1(x_1,y_1)$与 $M_2(x_2,y_2)$是两个已知点，$M(x, y)$是$\overline{M_1M_2}$的分点，且$\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda(\lambda\neq-1)$. 从$M_1$, M_2, M 分别作 x 轴的垂线 M_1P_1, M_2P_2, MP，那么垂足分别为 $P_1(x_1,0), P_2(x_2,0), P(x,0)$(图 1-13)，从而有

$$\frac{M_1M}{MM_2}=\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda,$$

$\because\quad P_1P=x-x_1,\ PP_2=x_2-x,$

$\therefore\quad \frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda,$

即
$$(1+\lambda)x=x_1+\lambda x_2.$$

因为 $\lambda\neq-1$，即 $1+\lambda\neq0$，所以得

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.$$

如果过 M_1, M_2, M 分别作 y 轴的垂线，得垂足 $Q_1(0,y_1)$, $Q_2(0,y_2)$，$Q(0,y)$，那么同理可得

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

因此分 $M_1(x_1,y_1)$与 $M_2(x_2,y_2)$的连线段 $\overline{M_1M_2}$ 成定比 λ $(\lambda\neq-1)$的分点M的坐标是

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{1.1-4}$$

特别地，当M是$\overline{M_1M_2}$的中点时，$M_1M=MM_2$，从而 $\lambda=1$，因此

连结 $M_1(x_1,y_1)$与 $M_2(x_2,y_2)$的线段的中点的坐标是：

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}. \tag{1.1-5}$$

例 3 已知两点 $M_1(-1,-3)$与$M_2(8,0)$，沿$\overline{M_2M_1}$的方向延长$\overline{M_2M_1}$到M，作$|M_1M|=\frac{1}{3}|M_1M_2|$，求点$M$的坐标（图1-14）。

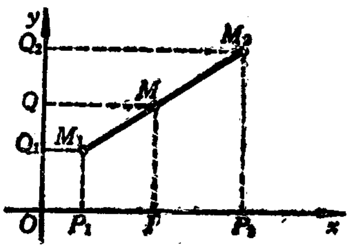

图 1-13

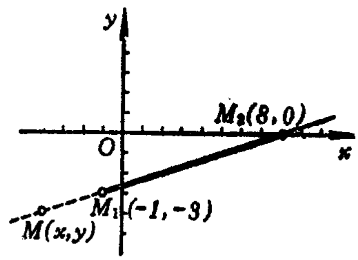

图 1-14

解法一 设点M的坐标为(x,y)，因为

$$\lambda=\frac{M_1M}{MM_2}=-\frac{1}{4},$$

所以根据公式(1.1-4)得

$$x=\frac{-1+\left(-\frac{1}{4}\right)\times 8}{1+\left(-\frac{1}{4}\right)}=-4,\qquad y=\frac{-3+\left(-\frac{1}{4}\right)\times 0}{1+\left(-\frac{1}{4}\right)}=-4.$$

因此点M的坐标是$(-4,\ -4)$。

解法二 设点M的坐标为(x,y)，如果把 M_1看作$\overline{MM_2}$ 的分点，那么$\lambda=\frac{MM_1}{M_1M_2}=\frac{1}{3}$，所以由公式(1.1-4)得