冲刺金牌

奥林匹克竞赛解题指导

高中数学

总主编 何舟
本书主编 马传渔（教授）

精解奥赛名题

预测命题趋势

一代名师

为你的冲刺引路

为你的成功喝彩

吉林教育出版社

冲刺金牌

奥林匹克竞赛解题指导

高中数学

总主编　何　舟

本书主编　马传渔（教授）

副主编　张志朝　张希麟

撰　稿　丁华元　于新华　卫　刚　尤小平
左　坤　石　鑫　石国弼　兰松斌
朱占奎　孙旭东　陆忠源　张福俭
何志奇　陈小红　胡建军　周敏泽
夏建新　董林伟　樊亚东

吉林教育出版社

(吉)新登字 02 号

封面设计:周建明

责任编辑:王世斌　魏　斌

冲刺金牌奥林匹克竞赛解题指导

高中数学

总 主 编　何　舟

本册主编　马传渔

吉林教育出版社　出版 发行

句容市印刷厂印刷　新华书店经销

开本:850×1168 毫米　1/32　印张:16.5　字数:488 千字

2002 年 8 月吉林第 1 版　2002 年 8 月江苏第 1 次印刷

本次印数:14000 册

ISBN 7-5383-4333-4/G·3954

定价:18.00 元

冲刺金牌

权威作者、策划人阵容

总 主 编：何 舟

各册主编

名牌大学

马传渔 南京大学数学系教授、国家级奥林匹克教练
丁 漪 南京大学化学化工学院教授、国家级奥林匹克教练
倪其道 中国科技大学化学与材料学院教授、国家级奥林匹克教练
葛 军 南京师大数学与计算机科学院副教授、国家级奥林匹克教练
殷 实 东南大学物理系教授
汪 忠 南京师大生命科学学院教授
张德钧 南京师大化学与环境科学学院享受国务院特殊津贴学者

金牌之乡

湖南省

叶冬陵 湖南省长沙市周南中学高级教师
黄其实 湖南省长沙市教科所特级教师
朱泌太 湖南省长沙市明德中学特级教师
朱最钧 湖南省长沙市第十六中学高级教师
高建军 湖南省长沙市第一中学高级教师、奥林匹克教练

江苏省

丁志祥 江苏省南通第一中学高级教师
刘友开 江苏省淮安市教委高级教师
周桂良 江苏省常州市教研室特级教师
南 冲 江苏省物理学会秘书长
杨维中 江苏省南京市教研室特级教师
臧继宝 江苏省南京市市政府督学
冯惠愚 江苏省南京市雨花台中学特级教师、奥林匹克教练
岑 芳 江苏省南京市教研室高级教师、奥林匹克教练
孙夕礼 江苏省南京市教研室高级教师、奥林匹克教练

浙江省

任学宝 浙江省杭州市学军中学特级教师、奥林匹克教练

北京市

邓 均 北京大学附属中学奥林匹克一级教练
陈效师 中国少年儿童出版社编审
李新黔 北京市中国人民大学附属中学特级教师
王俊鸣 北京市第十二中学特级教师

安徽省

宋世骏 安徽省马鞍山市教研室特级教师
张善福 安徽省合肥市庐阳区教研室高级教师
俞成功 安徽省合肥市教研室高级教师
杨盛楠 安徽省安庆市教研室高级教师
胡祖明 安徽省安庆市第一中学特级教师
马云霞 安徽省马鞍山市教研室高级教师
李富彩 安徽省合肥市庐阳区教研室特级教师

结识名教练

冲刺金牌

主编简介

马传渔

南京大学教授、硕士生导师，首批数学奥林匹克国家高级教练，美国数学评论 MR 评论员，享受国务院政府特殊津贴，第 31 届、35 届 I. M. O. 选题委员会委员；1993 年被录入第十一版《世界名人录》；曾多次参加全国数学竞赛的组织工作和命题工作，任 1991 年全国高中数学联赛和 1995 年全国初中数学联赛命题组组长；1992 年得到中国数学奥林匹克委员会和普及工作委员会的联合表彰；1996 年获江苏省委宣传部、省科委、省科协颁发的“江苏省科普十佳”的荣誉称号；撰写、主编《黎曼流形的谱》《空间解析几何学》《数学竞赛题集锦》《中国华罗庚学校数学课本》等 30 余本著作。

主编寄语

马传渔

奥林匹克作为一种运动，是力量、灵活与美的竞赛；数学奥林匹克作为一种数学竞赛，也是数学上力量、灵活与美的竞技。

1956 年，由华罗庚、苏步青两位教授倡议，在几个城市举办了一次高中数学竞赛，其后这种竞赛在 1978 年才重新又开展起来。1981 年中国数学会普及工作委员会举办了有 25 个省、市、自治区参加的高中数学联合竞赛，此后每年十月中旬举办一次全国高中数学联赛。这一群众性的数学竞赛活动得到了全国广大中学师生的欢迎，也得到了教育行政部门、各级科学技术协会以及社会各阶层人士的肯定和支持，从而使中国数学竞赛踏上了规范化的道路，并开始了一个雄心勃勃冲向国际取得数学奥林匹克成就的新阶段。

1985 年，由北京大学、南开大学、复旦大学和中国科学技术大学等 4 所大学倡议，中国数学会决定在每年 1 月份举办全国中学生数学冬令营，即中国数学奥林匹克 (C. M. O.)，这是我国中学生最高级别的数学竞赛。首届冬令营于 1986 年 1 月在天津市南开大学举行，云集了 1985 年全国高中数学联赛 80 名左右优胜者，进行 I. M. O. (国际数学奥林匹克) 的模拟考试：每次考 3 题，历时 4.5 小时，两天共考 6 题。从中选拔 20 名优胜者组成国家集训队。对他们进行 40 天系统培训和严格考试，最后选定 6 人组成中国代表队，参加每年 7 月份举办的国际数学奥林匹克竞赛。历年来，我国代表队都取得了优异的成绩。

本书旨在拓宽知识视野，提高解题能力，熟悉奥林匹克，赢得数学竞赛。

1.《冲刺金牌奥林匹克竞赛辅导丛书》和《冲刺金牌奥林匹克竞赛解题指导丛书》是姊妹篇，前者以竞赛知识块为鸿线，作深入

探讨;后者以竞赛知识块的解题方法为鸿线,作拓宽研究。

2. 本书可结合《中国华罗庚学校数学课本》(高一~高三)同步学习,两者相辅相成,使丰富多彩的奥林匹克的知识更显层次性、系统性、科学性。

3. 本书共有37讲,在以高中《数学教学大纲》内容的编写基础上,参照《高中数学竞赛大纲》的内容,补充了若干讲竞赛知识和若干讲解题技巧和方法。本书覆盖了高中数学的全部知识点,包罗了所有的解题技巧和方法。因此,本书还可作为高考数学复习参考用书。

4. 本书与"全国高中数学联赛"、C. M. O.、I. M. O. 三大竞赛接轨,不仅是竞赛的题型、内容,还是竞赛的解题思想和方法,都已步入奥林匹克的前沿阵地。

5. 本书每讲设立"**规律提示**""**技法精讲**""**解题指导**"和"**同步训练**"四个栏目,每讲紧扣竞赛要求,参照竞赛大纲,以竞赛常赛问题系列为序,采用跨越式,培养冲刺竞赛奖牌的能力。"**规律提示**"对每讲所用的知识规律作必要提示,便于读者归纳,总结;"**技法精讲**"对每讲所采用的技法作精讲,展示多种详解、巧解技法的依据、思路,阐明综合知识的灵活运用;"**解题指导**"精选近三年来全国高中数学联赛,C. M. O.、I. M. O. 三大竞赛中的常赛题型、有探索价值的赛题、理论联系实际的赛题作精析、解题和评注。做到精析"到位",评注"点睛"。培养读者联系实际的能力和开放性的研究方法;"**同步训练**"按不同的解题技法选取竞赛练习题,供读者强化训练,更贴近三大竞赛。

本书由名牌大学教授、命题专家、特级教师、学科带头人、奥林匹克教练员编写而成,具有趣味性、可读性、启迪性和实用性。恳请同行及小读者不吝指正。

高中数学竞赛大纲(修订稿)

中国数学会普及工作委员会制定

在“普及的基础上不断提高”的方针指引下,全国数学竞赛活动方兴未艾,特别是连续几年我国选手在国际数学奥林匹克中取得了可喜的成绩,使广大中小学师生和数学工作者为之振奋,热忱不断高涨,数学竞赛活动进入一个新的阶段,为了使全国数学竞赛活动持久、健康、逐步深入地开展,应广大中学师生和各级数学奥林匹克教练员的要求,特制定《数学竞赛大纲》以适应当前形势的需要。

本大纲是在国家教委制定的“全日制中学数学教学大纲”的精神和基础上制定的。《教学大纲》在教学目的一栏中指出:“要培养学生对数学的兴趣,激励学生为实现四个现代化学好数学的积极性”。具体作法是:“对学有余力的学生,要通过课外活动或开设选修课等多种方式,充分发展他们的数学才能”“要重视能力的培养……着重培养学生的运算能力、逻辑思维能力和空间想像能力,要使学生逐步学会分析、综合、归纳、演绎、概括、抽象、类比等重要的思想方法。同时,要重视培养学生的独立思考和自学的能力”。

《教学大纲》中所列出的内容,是教学的要求,也是竞赛的最低要求。在竞赛中对同样的知识内容的理解程度与灵活运用能力,特别是方法与技巧掌握的熟练程度,有更高的要求。而“课堂教学为主,课外活动为辅”是必须遵循的原则。因此,本大纲所列的课外讲授的内容必须充分考虑学生的实际情况,分阶段、分层次让学生逐步地去掌握,并且要贯彻“少而精”的原则,这样才能加强基础,不断提高。

一　试

全国高中数学联赛的一试竞赛大纲,完全按照全日制中学《数学教学大纲》中所规定的教学要求和内容,即高考所规定的知识范围和方法,在方法的要求上略有提高,其中概率和微积分初步不考。

二　试

1. 平面几何

基本要求:掌握初中竞赛大纲所确定的所有内容。

补充要求:面积和面积方法。

几个重要定理:梅涅劳斯定理、塞瓦定理、托勒密定理、西姆松定理。

几个重要的极值:到三角形三顶点距离之和最小的点——费马点。到三角形三顶点距离的平方和最小的点——重心。三角形内到三边距离之积最大的点——重心。

几何不等式。

简单的等周问题。了解下述定理：

在周长一定的 n 边形的集合中，正 n 边形的面积最大。

在周长一定的简单闭曲线的集合中，圆的面积最大。

在面积一定的 n 边形的集合中，正 n 边形的周长最小。

在面积一定的简单闭曲线的集合中，圆的周长最小。

几何中的运动：反射、平移、旋转。

复数方法、向量方法*。

平面凸集、凸包及应用。

2. 代　数

在一试大纲的基础上另外要求的内容：

周期函数与周期，带绝对值的函数的图象。

三倍角公式，三角形的一些简单的恒等式，三角不等式。

第二数学归纳法。

递归，一阶、二阶递归，特征方程法。

函数迭代，求 n 次迭代*，简单的函数方程*。

n 个变元的平均不等式，柯西不等式，排序不等式及应用。

复数的指数形式，欧拉公式，棣美弗定理，单位根，单位根的应用。

圆排列，有重复的排列与组合，简单的组合恒等式。

一元 n 次方程(多项式)根的个数，根与系数的关系，实系数方程虚根成对定理。

简单的初等数论问题，除初中大纲中所包括的内容外，还应包括无穷递降法，同余，欧几里得除法，非负最小完全剩余类，高斯函数 $[x]$，费马小定理，欧拉函数*，孙子定理*，格点及其性质。

3. 立体几何

多面角、多面角的性质；三面角、直三面角的基本性质；正多面体，欧拉定理；体积证法；截面，会作截面、表面展开图。

4. 平面解析几何

直线的法线式，直线的极坐标方程，直线束及其应用；二元一次不等式表示的区域；三角形的面积公式；圆锥曲线的切线和法线；圆的幂和根轴。

5. 其　他

抽屉原理；容斥原理；极端原理；集合的划分；覆盖。

注：全国高中数学联赛的二试命题的基本原则是向国际数学奥林匹克靠拢，总的精神是比高中数学大纲的要求略有提高，在知识方面略有扩展，适当增加一些课堂上没有的内容作为课外活动或奥校的讲授内容。

对教师和教练员的要求是逐步地掌握以上所列内容，并根据学生的具体情况适当地讲授。

有 * 号的内容二试中暂不考，但在冬令营中可能考。

(初审稿于 1992 年 3 月重庆会议通过)

(修订稿于 1994 年 3 月福州会议通过)

目　录

精彩栏目推荐

- 规律提示
- 技法精讲
- 解题指导
- 同步训练

4大精彩栏目系名师精心打造，充分体现细节设计的优化与细部关怀意味。

4大精彩栏目内容链接、相互对应，让您立体解读每一个竞赛热点。

精彩栏目推荐

规律提示

技法精讲

解题指导

同步训练

4大精彩栏目系名师精心打造，充分体现细节设计的优化与细部关怀意味。

4大精彩栏目内容链接，相互对应，让您立体解读每一个竞赛热点。

精彩栏目推荐

● 规律提示

■ 技法精讲

● 解题指导

同步训练

4大精彩栏目系名师精心打造，充分体现细节设计的优化与细部关怀意味。

4大精彩栏目内容链接，相互对应，让您立体解读每一个竞赛热点。

第一讲 集合与容斥原理

规律提示

1. 对于竞赛中的集合问题，首先要正确理解其含义，弄清集合中的元素是什么？具有什么样的性质？读懂集合内在的意义；其次要简化集合，充分暴露集合中元素的性质.

2. 注意集合之间的关系及集合运算性质.注重常见的数学方法，例如，构造法，反证法等，以及一些数学思想，例如，从特殊到一般，从局部到整体等的灵活运用.

3. 集合的计数问题是竞赛中常见的题型，主要可用对应的方法或容斥原理加以解决.要深刻理解这些方法、原理的本质，并通过一定的练习以强化和巩固.

技法精讲

1. 图示法

文氏图具有简明、直观的特点，文氏图能直接显示出集合与集合之间的关系，便于正确理解集合的含义和性质.对于复杂问题可从最简单的情形人手，画一张文氏图能起一定的作用.

2. 分类法

对集合作适当的分类是一个常用的技巧，在计数中有重要应用.它可将复杂计数转化为若干个容易计数的子集问题.通常，$|A|$表示集合 A 元素的个数.

3. 对应与映射法

对应的思想是转化思想的一种体现，一般以构造法作为桥梁.

4. 容斥原理法

对于三个集合 A、B、C，容斥原理表述如下：

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|C\cap A|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|.$$

解题指导 1. 图示法

题1 已知集合 $A=\{x|x=a^2+1,a\in\mathbf{N}_+\}$，$B=\{y|y=b^2-6b+10,b\in\mathbf{N}_+\}$，问 A、B 之间的关系怎样？

精析 由 $y=b^2-6b+10=(b-3)^2+1$，知解本题的要点是比较 $(b-3)^2+1$ 与 a^2+1 的值域范围，也就是要比较 $b-3$ 与 a 各自的取值情况.

全解 一方面，对任意 $x\in A$，$x=a^2+1=(a+3-3)^2+1$，且 $a+3\in\mathbf{N}_+$，从而 $A\subseteq B$；另一方面，当 $b=3$ 时，$y=1\in B$，但 $1\notin A$. 所以 $A\subsetneqq B$.

评注 读懂一个集合是前提，其次是要明其意.

题2 设 $a,b\in\mathbf{R}$，$A=\{(x,y)|x=n,y=an+b,n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{(x,y)|x=m,y=3m^2+15,m\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 144\}$ 是平面 xOy 的集合. 试问：是否存在 a 和 b，使得 $A\cap B\neq\varnothing$，且 $(a,b)\in C$.

精析 这是讨论存在性的问题，可先假设存在实数 a,b 使结论成立，找出结论的必要条件，如果存在，再证明它的充分性. 另外 $A\cap B\neq\varnothing$ 有鲜明的几何意义，$(a,b)\in C$ 也是如此.

全解 解法一（数形结合法）：设存在 a,b 使 $A\cap B\neq\varnothing$，且 $(a,b)\in C$，则 a,b 满足的充要条件是

$$\begin{cases} na+b-3n^2-15=0, & ①\\ a^2+b^2\leqslant 144. & ②\end{cases}$$

其中①表示 (a,b) 在直线 $l:nx+y-3n^2-15=0$ 上，而②表示 (a,b) 在圆 $x^2+y^2=144$ 内（包括边界）.

原点 $(0,0)$ 到直线 l 的距离为

$$\frac{3n^2+15}{\sqrt{n^2+1}}=3\sqrt{n^2+1}+\frac{12}{\sqrt{n^2+1}}\geqslant 12,$$

当且仅当 $n^2=3$ 时，等号成立.

又 $n\in\mathbf{Z}$，故 $n^2\neq 3$，从而上述距离必定大于 12，这表明①②不能同时成立（直线与圆相离）.

所以不存在使得 $A\cap B\neq\varnothing$ 且 $(a,b)\in C$ 同时成立的实数 a,b.

解法二（判别式法）：同解法一.

由①，得

$$b=3n^2+15-an.$$

评注 对条件①和②的不同解读，产生了不同的处理方法. 在分析字母的个数、方程（不等式）的个数以及由此导出的可能结果的过程中，充满常量与变量的辩证关系.

代入②,得

$(1+n^2)a^2-2n(3n^2+15)a+(3n^2+15)^2-144\leqslant 0.$

而它的判别式 $\Delta=-36(n^2-3)^2<0(n^2\neq 3)$.

从而不存在 a,b 使①②同时成立(开口向上,$\Delta<0$ 表示所有抛物线上的点在 x 轴上方).

解法三(不等式法):同解法一.

关于 n 的一元二次方程的判别式 $\Delta=a^2+12b-180\geqslant 0$,

即 $$a^2\geqslant -12(b-15).$$

另由②,得 $a^2\leqslant 144-b^2$.

从而 $$144-b^2\geqslant -12(b-15),$$

即 $(b-6)^2\leqslant 0$,得 $b=6$.

当 $b=6$ 时,可得 $a^2=108$,此时,$n^2=\dfrac{a^2}{36}=3$,知 $n\notin\mathbf{Z}$,故不存在同时满足①②的实数 a,b.

例题 集合 A 与 B 的并集 $A\cup B=\{a_1,a_2,a_3\}$,当 $A\neq B$ 时,(A,B) 与 (B,A) 视为不同的对,问这样的 (A,B) 有多少对?

精析 由于 $A\cup B$ 只含三个元素,故可考虑穷尽 A、B 的所有可能情况的讨论;也可利用文氏图构建更加简便巧妙的解法.

全解 **解法一**:对 A 进行分类.

(1)当 $A=\varnothing$ 时,$B=\{1,2,3\}$,此时 $(A、B)$ 有 1 对.

(2)当 $A=\{1\}$ 时,$B=\{2,3\}$ 或 $\{1,2,3\}$,此时 $(A、B)$ 有 2 对.同理当 $A=\{2\}$ 或 $\{3\}$ 时,$(A、B)$ 分别有 2 对.

(3)当 $A=\{1,2\}$ 时,$B=\{3\}$ 或 $\{1,3\}$ 或 $\{2,3\}$ 或 $\{1,2,3\}$,此时 $(A、B)$ 共有 4 对.同理当 $A=\{1,3\}$ 或 $\{2,3\}$ 时,(A,B) 分别有 4 对.

(4)当 $A=\{1,2,3\}$ 时,B 有 $2^3=8$ 种,此时 (A,B) 有 8 对,

从而所求的 (A,B) 对数为 $1+2+2+2+4+4+4+8=27$.

解法二:作出文氏图可知,在 $A\cup B$ 中共有(最多有)3 个互不相交的区域(如图 1-1).从而 $a_1,a_2,$

评注 解法一是穷举法,其意义明了便于理解.解法二具有一般意义,从中也可以看到文氏图有怎样的妙用.另外,注意 (A,B) 的有序性.如本题改求 $\{A,B\}$ 的个数?请读者自己试一试.

a_3 中的每一个元素填入 $A\cup B$ 中都有 3 种选择，故所求的(A,B)对的个数为 $3^3=27$.

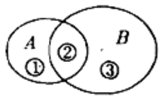

图 1-1

2. 分类法

设 A_1、A_2、…、A_k 是集合 $M=\{1,2,\cdots,10\}$ 的不同子集，它们两两的交集都不是空集，而 M 的其他子集不能与 A_1、A_2、…、A_k 中每一个交集都是非空集合，求 k 的值.

精析 本题涉及的一个关键问题是对 M 的所有子集的研究，而这需从一个特殊的"分类"出发，探求 k 的可能取值.

全解 设 A 为 M 的任一子集. 则 $\complement_M A$ 也是 M 的子集，从而将 M 的所有子集分为 2^9 个不同的集合对 $(A,\complement_M A)$（M 共有 2^{10} 个子集）.

因为 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 中，任意两个集合的交集非空，下面分两种情况讨论：

①若 $k>2^9$，则必有一对 A 和 $\complement_M A$ 含在 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 中（抽屉原理），此时，$A\cap\complement_M A=\varnothing$，矛盾. 故 $k\leqslant 2^9$.

②若 $k<2^9$，则必有一对 A 和 $\complement_M A$ 不同时含于 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 中. 此时，对 A 而言由条件知存在 j，$1\leqslant j\leqslant k$，使得 $A_j\cap A=\varnothing$，从而 $A_j\subseteq\complement_M A$，但是 A_j 与 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 中除 A_j 之外的其余每个集合的交都非空，所以 $\complement_M A$ 与 $A_1,\cdots,A_k$ 中的每一集合的交集都非空，矛盾. 从而 $k\geqslant 2^9$.

综合①②，知 $k=2^9$.

评注 构造集合对 $(A,\complement_M A)$ 是解题的关键.

一个以自然数为元素的集合 C，如果 C 中至少存在两个数，它们的算术平均数仍属于集合 C，则称 C 为"好集". 求证：将自然数任意划分为两个不交的子集，其中至少有一个子集是"好集".

精析 题中已将自然数做出"好集"与不是"好集"的分类，故直接进行构造

解题.

全解　设 A 与 B 是将自然数集任意划分后的两个不交子集,并设集 A 不是“好集”,现证明 B 必是“好集”.

如果 $6,8\in A$,因为 A 不是“好集”,所以 $4,7,10\notin A$. 因此 $4,7,10\in B$. 而 $7=\frac{4+10}{2}$,所以 B 是“好集”;

类似地,若 $6,10\in A$,因 A 不是“好集”,则 $2,8,14\in B$,而 $8=\frac{2+14}{2}$,所以 B 是“好集”;

若 $8,10\in A$,因 A 不是“好集”,则 $6,9,12\in B$. 而 $9=\frac{6+12}{2}$,所以 B 是“好集”;

若 $6,8,10\notin A$,则 $6,8,10\in B$. 而 $8=\frac{6+10}{2}$,所以 B 是“好集”.

因此,在所有可能的情况下,只要 A 不是“好集”,必有集 B 是“好集”,所以两个集合 A、B 中至少有一个是“好集”.

评注　①深刻理解“好集”的含义是解题的关键.

②依题意,取数字 6 与 8 进行逻辑推理,解决此题.

设 $A=\{1,2,\cdots,2n\}$, S 为 A 的适合下述条件的三元子集的集合:若 A_1、$A_2\in S$,则 A_1 中的最大元素不等于 A_2 中的最大元素. 试问:S 中最多有多少个这样的三元集? 为什么? (要求给出最简形式)

精析　因为三元子集的最大元只能为 $3,4,\cdots,2n$ 之一,故按照最大的不同,可将 A 中三元子集分成 $2n-2$ 类,通过试验论证 $2n-2$ 即为所求.

全解　依假设,A 中任意一个三元子集,其最大元只能为 $3,4,\cdots,2n$ 中之一. 将 A 中所有三元子集按照最大元的不同分成 $2n-2$ 类,使这 $2n-2$ 类的三元子集的最大元分别为 $3,4,\cdots,2n$.

如果 S 中有 k 个 A 的三元子集,且 $k\geqslant 2n-1$,那么,由抽屉原理可知,k 个三元集中至少有两个集合属于同一类三元集,于是,它们的最大元相同. 因此,集合 S 的个数不超过 $2n-2$.

如果从这 $2n-2$ 类的子集中的每一类取出一个三元集,显然满足题设条件.

评注　计算离散最值,可先确定其上界或下界,然后论证此界即为所求. 本题先证明集合 S 的个数不超过 $2n-2$,然后证明 $2n-2$ 为本题的解. 在证明中可运用抽屉原理、极端性原理、归纳法或反证法等逻辑推理方法.