21世纪高等学校系列教材

大学物理学习指导

崔觉梅 成 城 王晓颖 编

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书为大学物理课程辅助教材，是编者参阅国家教委最新(1995 年)颁发的《大学物理课程教学基本要求》及多年大学物理教学经验编写而成的。全书共六篇，由 18 章构成，每章均由“基本要求”、“内容体系”、“学习指导”、“典型题解”和“同步习题”五个部分组成，书末附有六套模拟试题及“同步习题”答案和模拟试题答案。本书可作为大学物理课程的通用参考书，对理工科大学非物理专业学生、成教学院学生及自学者预习和复习大学物理具有指导作用，对报考研究生的考生及从事大学物理课程教学的教师亦有参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理学习指导/崔觉梅，成城，王晓颖编.
—西安：西安电子科技大学出版社，2002.1
ISBN 7-5606-1068-4
Ⅰ.大… Ⅱ.①崔… ②成… ③王… Ⅲ.物理学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.04

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 064829 号

责任编辑 马乐惠 马晓娟
出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)
电　　话 (029)8227828　　邮编 710071
http://www.xduph.com　　E-mail：xdupfxb@pub.xaonline.com
经　　销 新华书店
印　　刷 陕西画报社印刷厂
版　　次 2002 年 1 月第 1 版 2002 年 1 月第 1 次印刷
开　　本 787 毫米×1092 毫米 1/16 印张 17.25
字　　数 408 千字
印　　数 1～8 000 册
定　　价 18.00 元
ISBN 7-5606-1068-4/O·0052

XDUP 1339001—1

＊＊＊如有印装问题可调换＊＊＊

前　　言

物理学是十分重要的自然科学基础，是现代科学发展和技术进步的最主要源泉。因此，大学物理是高等理工科院校学生的重要必修课之一，它在培养基础扎实且有创新能力的高素质科技人才的过程中具有重要的作用和深远的意义。

对于初入大学校门的一年级学生而言，学习大学物理这门课时常会感到：一是知识要点难以系统掌握，二是分析应用能力难以从心、解题困难。本书以紧密围绕基本要求，准确理解物理概念，系统把握知识脉络，熟练掌握思想方法，努力培养创新能力为主要编写原则，旨在帮助广大读者掌握得当的学习方法，高效、系统而全面地掌握大学物理知识，逐步培养运用物理思想分析问题和解决问题的综合能力，达到提高创新意识和科学素养的目标。

体现于本书的教学思路是五届师生在教学实践中不断探索、验证和完善的结果。书中每章均由“基本要求”、“内容体系”、“学习指导”、“典型题解”和“同步习题”五个部分组成。各章之首为“基本要求”，基于教学大纲简要列出各章须了解、理解和掌握的主要内容，以便使教学目标明确，要求具体，重点清晰。“内容体系”主要为解决大学物理知识难以全面系统掌握的难题而编写。该部分先以简明文字对其知识结构概括归纳，继之以框图形式给出，以求体系直观，脉络清晰，旨在帮助读者对本章的基本内容及结构脉络有一个纲领性认识，从诸多内容中找出关联，建立系统而直观的知识框架，从而使所学知识系统化，便于理解、掌握和记忆。“学习指导”力求深入浅出地向读者介绍学习各章知识要点和剖析难点症结的基本要领，同时指出学完各章应具备的基本技能，针对性地介绍分析解决相关问题的思路与技巧，点出应注意的误区。目的使读者尽快掌握正确的学习方法和思想方法，提高学习效率。“典型题解”着眼基础，意在引导。共筛选出 240 多个题目，内容覆盖大学物理课程各教学要点。选题以符合要求、难度适中、重点突出为原则，同时注重内容、题型、解法三方面的典型性和综合性。解题突出启发性和灵活性，旨在引导读者掌握正确的解题方法和技巧。“同步习题”选题力图精少，但各练习目标明确，目的在于巩固广大读者的分析和应用技能，并引导其灵活延展，力图使读者既加深理解物理概念及思想方法，又能有针对性地体会和训练用其分析问题和解决问题。附录中列出的六套模拟试题，按顺序

分为三组：A、B 套适合选用马文蔚教授主编的《物理学》(第四版)教材的读者；C、D 套适合选用程守洙教授主编的《普通物理学》(第四版)教材的读者；E、F 套综合性较强，有相当难度，适合准备考研的读者。

本书可与马文蔚主编的"面向21世纪课程教材"之《物理学》(第四版)等教材配套使用。

本书的前身为同名讲义，由崔觉梅、成城合编。在本书的改编过程中，第1篇、第2篇、第3篇和第6篇由崔觉梅执笔，第4篇和第5篇由王晓颖执笔，全书由崔觉梅统稿。王小力教授在百忙之中细致地审阅了全稿，提出了许多中肯的修改意见，并提供了宝贵的资料，王彬教授为本书的编写提供了指导性建议，在此谨致以衷心的感谢。

本书在编写和出版过程中，得到了西安工业学院教务处、数理系及物理教研室，西安电子科技大学出版社的大力支持，在此谨致以衷心的感谢。

编者水平有限，书中错误和缺点在所难免，恳请读者批评指正，以便改进提高。

编　者

2001年5月

目　　录

第 1 篇　力 学 基 础

第 2 篇　热 学 基 础

第 3 篇　电　磁　学

第 4 篇　机械振动与机械波

第 5 篇　波 动 光 学

第 6 篇　近代物理基础

附　　录

第 1 篇　力学基础

第 1 章　质点运动学

一、基本要求

1. 掌握位置矢量、位移、速度、加速度、角加速度等描述质点运动和运动变化的物理量。

2. 能借助于直角坐标系计算质点在平面内运动时的速度、加速度及质点作圆周运动时的角速度、角加速度、切向加速度和法向加速度。

3. 熟练掌握质点运动学两类问题的解决方法。

二、内容体系

运动学的主要任务是解决运动的描述问题，本章从一般运动问题出发，引出了描述运动的主要物理量：位置矢量、位移、速度和加速度，强调了这些物理量的瞬时性、矢量性和相对性。并将一般曲线运动的研究方法应用于直线运动、抛体运动和圆周运动等特例中，以便读者能够更好地掌握相关的研究方法。本章的内容体系及研究问题的思路可用图 1 - 1 表示。

三、学习指导

1. 有关质点和参考系的问题。

(1) 质点是一种理想的力学模型。与其他理想模型一样，质点是实际物体在一定条件下的抽象。将复杂的、具体的物体用简单的模型来代替，抓住共性、简化条件，突出其主要因素，以便研究其运动规律，不仅具有一定的实际意义，而且也是一种重要的科学研究方法。一个物体能否视为质点，不是由它的具体线度大小来决定，而是由被研究的问题来决定的。

(2) 对参考系的理解应包含以下三个方面：参考系即为描述物体运动而选的标准物；运动的描述是相对的；时间和空间不因参考系的选择而改变——经典力学中的绝对时空观。

2. 有关位置矢量 $\boldsymbol{r}$、位移 $\Delta\boldsymbol{r}$、速度 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$ 的问题。

它们是从不同角度来描述质点运动的基本物理量，其共同特征是：具有瞬时性、矢量性、相对性和叠加性。各量之间的关系可参阅图 1 - 1。

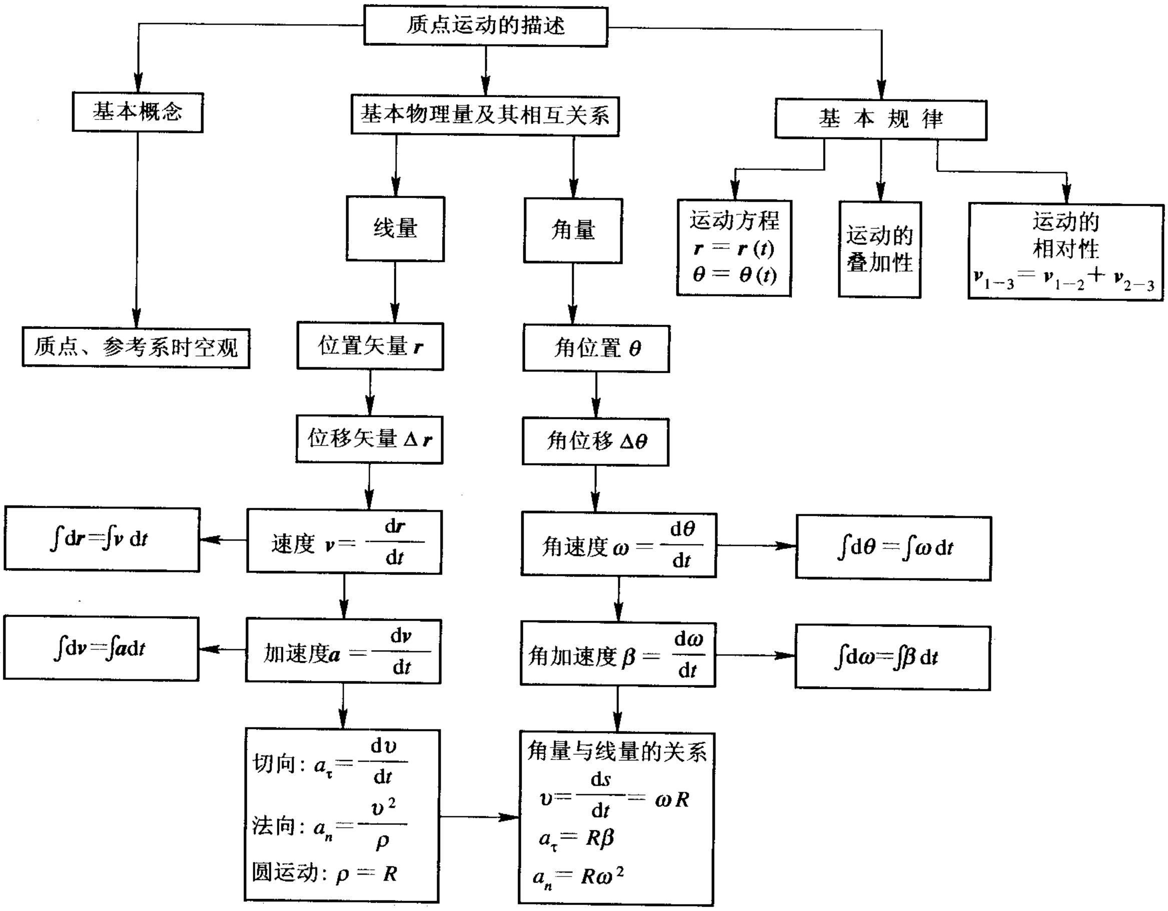

图 1－1

3. 有关位移和路程的问题。

位移是在一定时间内物体从起始位置引向终止位置的有向线段，是矢量；路程是在一定时间内物体所经过路线的总长度，是标量。

4. 自然坐标系与切向加速度 $\boldsymbol{a}_\tau$ 和法向加速度 $\boldsymbol{a}_n$ 的问题。

引入自然坐标系后，对一般曲线运动的 $\boldsymbol{a}_\tau$ 和 $\boldsymbol{a}_n$ 赋予了鲜明的物理意义：$\boldsymbol{a}_\tau$ 反映速度数值的变化，$\boldsymbol{a}_n$ 反映速度方向的变化。

5. 运动学中的两类问题。

(1) 已知运动方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，求速度 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$。对这类问题，只需按运动方程对时间 t 求导数即可(可参阅典型题解 3，7)。

(2) 已知加速度表达式求速度或运动方程。这类问题的解决比第(1)类难度稍大。

(A) 已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$及初始 t_0 时刻条件 $\boldsymbol{v}_0$ 和 $\boldsymbol{r}_0$。则可应用积分法求解(可参阅典型题解 4，8)。

(B) 对某些一维运动 $a=a(x)$或 $a=a(v)$，求 $v(x)$或 $v(t)$，则要先对微分方程进行分离变量或变量代换，再利用积分法求出相应物理量(可参阅典型题解 5，6，10)。

6. 相对运动问题。

在相对运动的有关变换中，最基本的是坐标变换，但常用的是速度变换和加速度变换。在具体计算时，一定要注意它们的方向(可参阅典型题解 9)。

四、典型题解

1. 已知质点的运动方程为 $x=2t$，$y=4-t^2$。式中时间以 s 计，距离以 m 计。试求任一时刻质点的切向加速度和法向加速度。

解：由运动方程可求得质点速度的 x 和 y 分量

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2\ \mathrm{m/s},\quad v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-2t$$

速度的大小
$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=2\sqrt{1+t^2} \tag{①}$$

同样可求得质点加速度的 x 和 y 分量

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=0,\quad a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=-2\ \mathrm{m/s^2}$$

加速度的大小
$$a=|a_y|=2\ \mathrm{m/s^2} \tag{②}$$

对式①求导得切向加速度

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}} \tag{③}$$

由式②和式③得法向加速度

$$a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}=\frac{2}{\sqrt{1+t^2}}$$

从本题的求解过程可以看出，当质点作一般曲线运动时，用公式 $a_n=\dfrac{v^2}{\rho}$ 求法向加速度是比较麻烦的，因为曲率半径不容易计算。但是先求出质点的切向加速度和总加速度再利用公式

$$a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}$$

求法向加速度却很方便。

2. (未蜕化的直线运动)已知一质点在参考系 XOY 中由静止状态从原点开始运动，其加速度 $\boldsymbol{a}=6\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$，试求：质点的运动速度、运动方程及轨迹方程。

解：由已知条件可知

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=6,\quad a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=4$$

所以
$$v_x=\int_0^t 6\,\mathrm{d}t=6t,\quad v_y=\int_0^t 4\,\mathrm{d}t=4t$$

所以，速度矢量为

$$\boldsymbol{v}=6t\boldsymbol{i}+4t\boldsymbol{j}$$

又因为
$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=6t,\quad v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=4t$$

所以
$$x=\int_0^t 6t\cdot dt=3t^2 \quad ①$$
$$y=\int_0^t 4t\cdot dt=2t^2 \quad ②$$
这样求得运动方程(矢量形式)
$$\boldsymbol{r}=3t^2\boldsymbol{i}+2t^2\boldsymbol{j}$$
由式①,②消去 t,即得轨迹方程 $y=\frac{2}{3}x$,可见其轨迹方程为过原点,斜率为 $\frac{2}{3}$ 的直线。

3. 已知一质点作直线运动,其加速度为 $a=A-Bv$,式中 A,B 为常数,v 为运动速度。若 $t=0$ 时,$v_0=0$,求 $v=v(t)$ 的表示式。

解:由 $a=\frac{dv}{dt}$(直线运动),得
$$A-Bv=\frac{dv}{dt}$$
$$\int_0^v\frac{dv}{A-Bv}=\int_0^t dt$$
$$-\frac{1}{B}\ln(A-Bv)|_0^v=t$$
$$\ln(A-Bv)-\ln A=-Bt$$
$$\frac{A-Bv}{A}=e^{-Bt}$$
$$A-Bv=Ae^{-Bt}$$
$$Bv=A(1-e^{-Bt})$$
$$v=\frac{A}{B}(1-e^{-Bt})$$

4. 质点作圆周运动,总加速度在运动过程中始终与半径交 60° 角,取转动开始时,转角 $\theta=0$,初角速度为 ω_0。试求:

(1) 用角量表示的质点运动方程 $\theta=\theta(t)$。

(2) 角速度 ω 与转角 θ 的关系。

解:(1) 依题意知
$$a_\tau=a_{总}\cdot\sin60°,\quad a_n=a_{总}\cdot\cos60°$$
所以
$$a\cdot\sin60°=\frac{dv}{dt}=R\frac{d\omega}{dt}$$
$$a\cdot\cos60°=\frac{v^2}{R}=R\omega^2$$
两式相除得
$$\tan60°=\frac{d\omega/dt}{\omega^2}$$
即
$$\sqrt{3}\,dt=\frac{d\omega}{\omega^2}\rightarrow\int\sqrt{3}\,dt=\int\frac{d\omega}{\omega^2}$$
依题意 $t=0$ 时 $\omega=\omega_0$,可得

$$\int_0^t \sqrt{3}\ \mathrm{d}t = \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega^2}$$

从而解出

$$\omega = \frac{\omega_0}{1-\omega_0\ \sqrt{3}\,t} \qquad ①$$

又因

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega_0}{(1-\omega_0\ \sqrt{3}\,t)} \rightarrow \int \mathrm{d}\theta = \int \frac{\omega_0}{1-\omega_0\ \sqrt{3}\,t}\,\mathrm{d}t$$

所以，由 $t=0$ 时，$\theta=0$，得

$$\int_0^\theta \mathrm{d}\theta = \int_0^t \frac{\omega_0}{1-\omega_0\ \sqrt{3}\,t}\,\mathrm{d}t$$

解出

$$\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}\ln(1-\sqrt{3}\,\omega_0 t) \qquad ②$$

此即为用角量表示的质点的运动方程。

(2) 由式②知

$$\ln(1-\sqrt{3}\,\omega_0 t) = -\sqrt{3}\,\theta$$

两边取指数得

$$1-\sqrt{3}\,\omega_0 t = \mathrm{e}^{-\sqrt{3}\theta}$$

又因由式 ① 知

$$1-\sqrt{3}\,\omega_0 t = \frac{\omega_0}{\omega}$$

从而可解出 $\omega=\omega_0 \mathrm{e}^{\sqrt{3}\theta}$。

5. 如图 1 - 2，湖中有一只船，系于一绳上，岸上有一人在高于水面 H 处，通过滑轮拉船靠岸，当岸上拉纤人以速度 $\boldsymbol{v}$ 匀速行进时：

(1) 船靠岸的速度 u 与 v 相比哪个大。

(2) 如果 $|\boldsymbol{v}|$ 恒定不变，问船是否匀速运动？

解：如图 1 - 2，将坐标原点选在滑轮处。

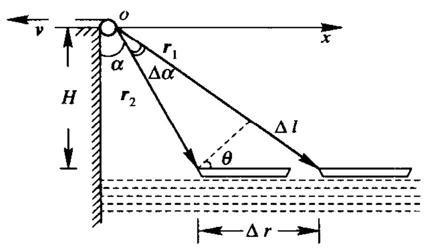

图 1 - 2

(1) 船速

$$\boldsymbol{u} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

大小

$$u = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{\Delta l}{\sin\theta}}{\Delta t} = \lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta\alpha\to 0}}\frac{\frac{\Delta l}{\sin(\alpha+\Delta\alpha)}}{\Delta t}$$

因为 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta l}{\Delta t}=v$，所以 $u=\dfrac{v}{\sin\alpha}$，u 大于 v(方向沿 $\Delta\boldsymbol{r}$ 方向)。

(2) 由上式可知 α 随船靠岸而减小，v 恒量，所以，u 增大，船作加速运动，且加速度为 $a=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$。

设 t 时刻船离 o 点 l 远，离岸 x 远，则 $l^2=H^2+x^2$，$v=\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$，$u=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，由(1)知

$$u=\frac{v}{\sin\alpha}=\frac{l}{x}v$$

即 $ux=lv$，两边同时对时间求导得

$$u\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}+l\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

v 恒定，所以 $$u^2+xa=v^2$$

$$a=\frac{v^2-u^2}{x}=-\frac{u^2-v^2}{x}=-\frac{v^2}{x}\left(\frac{l^2}{x^2}-1\right)=-\frac{H^2v^2}{x^3}$$

"—"号表示沿 ox 轴负方向，即

$$\boldsymbol{a}=-\frac{H^2v^2}{x^3}\boldsymbol{i}$$

6. 已知一质点的运动加速度为 $\boldsymbol{a}=b(1-kt)\boldsymbol{i}$，式中 b、k 均为常数，且 $\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{r}_0=0$，求该质点的运动方程。

解：由 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ 得 $\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\int\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}t$，即

$$\int_{\boldsymbol{v}_0}^{\boldsymbol{v}}\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\int_0^t b(1-kt)\boldsymbol{i}\,\mathrm{d}t$$

而 $\boldsymbol{v}_0=0$，所以

$$\boldsymbol{v}=b\left(t-\frac{k}{2}t^2\right)\boldsymbol{i}$$

又由 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ 得 $\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t$，即

$$\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_0^t b\left(t-\frac{k}{2}t^2\right)\boldsymbol{i}\,\mathrm{d}t$$

因为 $\boldsymbol{r}_0=0$，所以

$$\boldsymbol{r}=\frac{b}{6}t^2(3-kt)\boldsymbol{i}$$

7. 一飞机从 A 处向北飞到 B 处，然后又向南飞回 A 处。已知飞机相对于空气的速度为 $\boldsymbol{v}$，而空气相对地面的速度为 $\boldsymbol{u}$，A、B 之间间距为 L，飞机相对于空气速率 v 保持不变，试证：

(1) 若空气静止($u=0$)，则来回飞行的时间 $t_0=\dfrac{2L}{v}$。

(2) 若空气速度由南向北，则来回飞行时间 $t_1=\dfrac{t_0}{1-\dfrac{u^2}{v^2}}$。

(3) 若空气速度由东向西，则来回飞行时间为 $t_2=\dfrac{t_0}{\sqrt{1-\left(\dfrac{u}{v}\right)^2}}$。

解：(1) 因空气静止，故飞机相对于空气速度即飞机相对于地面速度，A 到 B 的时间和由 B 飞回 A 的时间相同，均为$\frac{L}{v}$，所以

$$t_0=\frac{2L}{v}$$

(2) 按速度变换公式，飞机相对地面速度为

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$$

故：由 A 到 B $\quad V=u+v$

由 B 到 A $\quad V=v-u$

所以

$$t_1=\frac{L}{v+u}+\frac{L}{v-u}=\frac{2vL}{v^2-u^2}=\frac{\frac{2L}{v}}{1-\left(\frac{u}{v}\right)^2}=\frac{t_0}{1-\left(\frac{u}{v}\right)^2}$$

(3) $\boldsymbol{u}$ 由东向西：由 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ 知，为了让 $\boldsymbol{V}$ 去时沿 $A\to B$ 方向，回来沿 $B\to A$ 方向，则飞机相对空气的飞行方向就不能是沿 $A\to B$ 方向(见图 1－3(a)、(b))

去的时间为 $\frac{L}{\sqrt{v^2-u^2}}$，回来的时间为 $\frac{L}{\sqrt{v^2-u^2}}$，所以

$$t_2=\frac{2L}{v\sqrt{1-\left(\frac{u}{v}\right)^2}}=\frac{t_0}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{v}\right)^2}}$$

(由上边结果和矢量图都可看出必须有 $u<v$。)

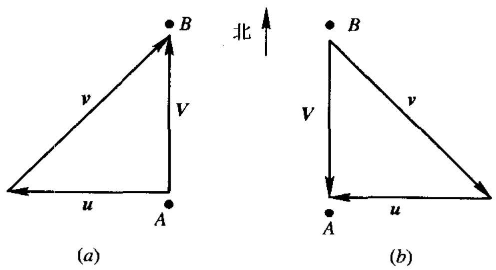

图 1－3

8. 一质点作直线运动，其加速度与位置的关系为 $a=(4.5+4x)$(SI 制)，且 $x_0=v_0=0$，问当 $x=4$ m 时，其速度为多大？

解：对于直线运动有：

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

所以

$$v\,\mathrm{d}v=a\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{v_0}^{v}v\,\mathrm{d}v=\int_{x_0}^{x}a\,\mathrm{d}x$$

即

$$\int_0^{v}v\,\mathrm{d}v=\int_0^{4}(4.5+4x)\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{v^2}{2}=[4.5x+2x^2]\Big|_0^4$$

解得 $v=10\ \mathrm{m/s}$。

9. 一质点在水平面内以顺时针方向沿半径为 2 m 的圆轨道运动，其角速度表示式为 $\omega=kt^2$(SI 制)，式中 k 为待定常数。已知该质点在运动开始后第 2 s 末的线速度为 32 m/s。求任一时刻 t 时，质点的线速度和加速度的大小。

解：首先确定常数 k：

由 $t=2$ s 时，$v=32$ m/s 及 $\omega=kt^2$ 和 $v=R\omega$，可得

$$k=\frac{\omega}{t^2}=\frac{v}{Rt^2}=\frac{32}{2\times 2^2}=4\ (\mathrm{s^{-3}})$$

故有

$$\omega=4t^2$$

则

$$v=R\omega=8t^2$$

由

$$\begin{cases} a_\tau=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=16t \\ a_n=\dfrac{v^2}{R}=\dfrac{(8t^2)^2}{2}=32t^4 \end{cases}$$

得

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\sqrt{(16t)^2+(32t^4)^2}=16t\sqrt{1+4t^6}$$

10. 一质点从静止开始作直线运动，开始加速度为 a，此后随时间均匀增加，经过时间 τ 后，加速度为 $2a$，经过时间 2τ 后，加速度为 $3a$，…，求经过时间 $n\tau$ 后，该质点的加速度和走过的距离。

解：根据题意可知，t 时刻质点的加速度为

$$a(t)=\left(1+\frac{t}{\tau}\right)a \qquad ①$$

(1) 当 $t=n\tau$ 时，则 $a(n\tau)=(1+n)a$。

(2) 由式①可得

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\left(1+\frac{t}{\tau}\right)a$$

所以

$$\int_0^v \mathrm{d}v=\int_0^t\left(1+\frac{t}{\tau}\right)a\,\mathrm{d}t$$

$$v=a\left(t+\frac{t^2}{2\tau}\right)$$

又 $v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$(直线运动)，即

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=a\left(t+\frac{t^2}{2\tau}\right)$$

$$\int_0^s \mathrm{d}s=\int_0^{n\tau}a\left(t+\frac{t^2}{2\tau}\right)\mathrm{d}t$$

$$s=a\left(\frac{n^2\tau^2}{2}\right)+\frac{a}{2\tau}\left(\frac{n^3\tau^3}{3}\right)=\frac{a}{6}n^2\tau^2(3+n)$$

11. 一质点按顺时针方向沿半径为 R 的圆周运动，路程与时间关系为 $s=v_0t-\dfrac{1}{2}bt^2$，式中 v_0 和 b 都是常量。

(1) 求 t 时刻质点的加速度。

(2) t 为何值时，加速度的值恰等于 b? 此时质点已沿圆周运行了多少圈?

(3) 质点何时开始按逆时针方向运动?

解: (1) 由 $s=v_0t-\frac{1}{2}bt^2$，得

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v_0-bt$$

故
$$\begin{cases}a_\tau=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-b\\[2ex] a_n=\dfrac{v^2}{R}=\dfrac{(v_0-bt)^2}{R}\end{cases}$$

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_\tau+\boldsymbol{a}_n:\begin{cases}\text{大小}: a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\dfrac{1}{R}\sqrt{(v_0-bt)^4+R^2b^2}\\[2ex] \text{方向}: \text{与}\ \boldsymbol{v}\ \text{夹角}\ \varphi=\arctan\dfrac{a_n}{a_\tau}=\arctan\dfrac{(v_0-bt)^2}{-bR}\end{cases}$$

(2) 要 $a=b$，即

$$\frac{1}{R}\sqrt{(v_0-bt)^4+R^2b^2}=b$$

即 $t=\frac{v_0}{b}$，此时

$$s_t=v_0\frac{v_0}{b}-\frac{1}{2}b\left(\frac{v_0}{b}\right)^2=\frac{v_0^2}{2b}$$

已转圈数
$$N=\frac{s_t}{2\pi R}=\frac{v_0^2}{4\pi bR}$$

(3) 当 $v=0$ 时，$t=\frac{v_0}{b}$，此时，质点开始按逆时针方向转动。

12. 一物体从静止开始，先以 α 大小的切线加速度运动一段时间后，紧接着就以 β 大小的切线减速度运动直至停止。若物体整个运动时间为 T，试证明：物体运动的总路程为

$$s=\frac{\alpha\beta}{2(\alpha+\beta)}T^2$$

证明: 设物体在 $0<t<t_0$ 时间内，切向加速度为 $a_\tau=\alpha$；在 $t_0<t<T$ 时间内，切向加速度为 $a_\tau=\beta$。则由题意知其运动的 $v-t$ 关系可用图 1-4 表示。

由图可知，速率 v 存在一极大值 v_m，且有

$$\begin{cases}\dfrac{v_m}{t_0}=\alpha\\[2ex] \dfrac{v_m}{T-t_0}=\beta\end{cases}$$

由此可解得
$$v_m=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}T$$

由于物体运动的总路程为

$$s=\int_0^T v\,\mathrm{d}t$$

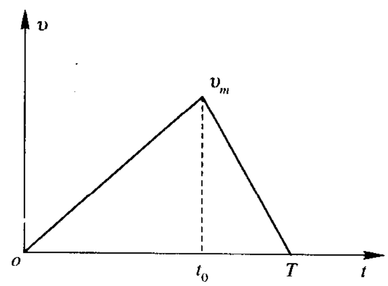

图 1-4

借助于 $v-t$ 图可知，$\int_0^T v\,\mathrm{d}t$ 大小等于曲线下面积，即

$$s=\frac{1}{2}Tv_m=\frac{\alpha\beta}{2(\alpha+\beta)}T^2$$

13. 一质点作平面运动，已知加速度为 $a_x=-A\omega^2\cos\omega t$，$a_y=-B\omega^2\sin\omega t$，其中 A，B，ω 均为正常数，且 $A\neq B$，$A\neq 0$，$B\neq 0$。初始条件为 $t=0$ 时，$v_{0x}=0$，$v_{0y}=B\omega$，$x_0=A$，$y_0=0$。试求该质点的运动轨迹。

解：由加速度的定义得

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t},\quad a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$$

分别积分上式，并代入初始条件，得

$$v_x=v_{0x}+\int_0^t a_x\,\mathrm{d}t=0+\int_0^t(-A\omega^2\cos\omega t)\,\mathrm{d}t=-A\omega\sin\omega t \tag{①}$$

$$v_y=v_{0y}+\int_0^t a_y\,\mathrm{d}t=B\omega+\int_0^t(-B\omega^2\sin\omega t)\,\mathrm{d}t=B\omega\cos\omega t \tag{②}$$

由速度的定义得

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\quad v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

分别积分上式，并代入初始条件和式①、式②，得

$$x=x_0+\int_0^t v_x\,\mathrm{d}t=A-A\int_0^t\omega\sin\omega t\,\mathrm{d}t=A\cos\omega t \tag{③}$$

$$y=y_0+\int_0^t v_y\,\mathrm{d}t=0+B\int_0^t\omega\cos\omega t\,\mathrm{d}t=B\sin\omega t \tag{④}$$

式③和式④为质点运动的运动学方程，消去参数 ωt，即得质点的运动轨迹方程

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$$

这一结果表明，质点运动的轨迹为椭圆。

14. 一质点以初速度 v_0 作直线运动，所受阻力大小为 $k\sqrt{v}$，其中 k 为正常数，v 为任一时刻质点的运动速度，试求：

(1) 质点运动速度从 v_0 到 $v=0$ 所需的时间 T。

(2) 在(1)中所求时间内运动的距离。

解：质点作直线运动，故可假设质点在 ox 轴上 $x=0$ 处，在 $t=0$ 时刻以初速度 v_0 开始运动。

(1) 由题意，质点的加速度可表示为

$$a=-k\sqrt{v}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-k\sqrt{v}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v}}=-k\,\mathrm{d}t$$

令 $\sqrt{v}=u$，则 $v=u^2$，$\mathrm{d}v=2u\,\mathrm{d}u$，故有

$$\frac{2u\,\mathrm{d}u}{u} = -k\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}u = -\frac{k}{2}\,\mathrm{d}t$$

由初始条件 $t=0$ 时，$v=v_0$，$u_0=\sqrt{v_0}$，得

$$\int_{\sqrt{v_0}}^{\sqrt{v}} \mathrm{d}u = -\frac{k}{2}\int_0^t \mathrm{d}t$$

积分得

$$\sqrt{v} = \sqrt{v_0} - \frac{k}{2}t$$

即

$$v = v_0 - k\sqrt{v_0}\,t + \frac{k^2t^2}{4}$$

令 $v=0$，可得

$$t = T = \frac{2}{k}\sqrt{v_0}$$

(2) 由(1)可得

$$v_0 - k\sqrt{v_0}\,t + \frac{k^2t^2}{4} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

由初始条件 $t=0$ 时 $x=0$，积分得

$$\begin{aligned}x_T &= \int_0^T \left(v_0 - k\sqrt{v_0}\,t + \frac{k^2t^2}{4}\right)\mathrm{d}t \\ &= v_0T - \frac{k\sqrt{v_0}}{2}T^2 + \frac{k^2T^3}{12} \\ &= v_0\frac{2}{k}\sqrt{v_0} - \frac{k\sqrt{v_0}}{2}\left(\frac{2}{k}\sqrt{v_0}\right)^2 + \frac{k^2}{12}\left[\frac{2\sqrt{v_0}}{k}\right]^3 \\ &= \frac{2}{3k}v_0^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

五、同步习题

1 - 1　质点在 xoy 平面内运动，运动方程为：$x=2t$，$y=19-2t^2$(SI)。求：

(1) 质点运动的轨迹方程。

(2) $t=1$ s 时的速度和加速度。

(3) $t=2$ s 时的位置矢量。

(4) $t=1$ s 到 $t=2$ s 的位移矢量。

(5) 何时位置矢量与速度矢量相互垂直?

1 - 2　当一列火车以 10 m/s 的速率向东行驶时，若相对于地面竖直下落的雨滴在列车的窗子上形成的雨迹偏离竖直方向 30° 角。求雨滴相对于地面的速率及雨滴相对于列车的速率。

1 - 3　一炮弹自原点开始沿抛物线 $2y=x^2$ 运动，它在 ox 轴上的速度分量为一恒量，其值为 $v_x=4.0$ m/s。求其切向加速度和法向加速度与 x 的关系。