中学数学教学参考丛书

二　次　曲　线

张泽湘　编

上海教育出版社

中学数学教学参考丛书

二 次 曲 线

张泽湘　编

上海教育出版社出版
（上海永福路 123 号）

新华书店上海发行所发行　上海市印刷四厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 6.75　字数 148,000
1981 年 2 月第 1 版　1981 年 2 月第 1 次印刷
印数 1—115,000 本

统一书号：7150·2389　定价：0.56 元

目　录

一、圆锥曲线及其方程

二次曲线又称圆锥曲线．前一名称是从代数方程而来，后一名称则源于它的几何产生方法．二次曲线包括常态的和变态的两种类型．所谓常态的二次曲线指的是椭圆(包括圆)、双曲线和抛物线；而变态的二次曲线则包括两条相交直线、两条平行直线、两条重合直线、点以及种种虚轨迹．二次曲线在理论和实践上都是重要的．

1. 曲线的方程

从中学代数中我们已经知道，在直角坐标系中，平面上的点与有序实数对之间存在着一一对应的关系．从而当一个点的位置已被确定时，它的坐标也就唯一地被确定了；而当点的位置变动时，点的坐标也相应地变动．这样一来，点的变动规律就可以用坐标的变动规律来刻划．点变动时，最常见的是形成某一条曲线．所以曲线可以认为是满足某种条件的动点的轨迹，或者说，满足某种条件的点的集合．根据动点的变动规律(或者说所满足的条件)，求出它的坐标 x 和 y 之间的关系，就可以获得一个关于 x 和 y 的方程．因此曲线与方程就有了一定的对应关系．

定义 设有一条曲线 c 和一个方程

$$F(x, y)=0, \tag{1}$$

如果曲线 c 上任何点的坐标都满足方程 (1)，并且坐标满足

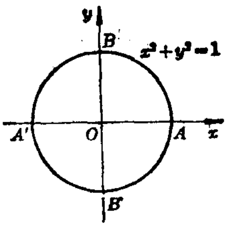
方程(1)的一切点都在曲线 c 上，则称方程(1)是曲线 c 的方程，而称曲线 c 是方程(1)的轨迹或图形。

根据上述定义，要证明一个方程 $F(x, y)=0$ 是某曲线 c 的方程时，必须同时证明以下两个方面：

i) 曲线 c 上任何点的坐标都满足方程 $F(x, y)=0$；

ii) 坐标满足方程 $F(x, y)=0$ 的一切点都在曲线 c 上。

如果不证明 i)，就无法保证曲线 c 上的点的坐标都满足方程 $F(x, y)=0$；如果不证明 ii)，则对于曲线 c 以外是否还存在坐标满足方程 $F(x, y)=0$ 的点也是不知道的。因而，这时就不能说 c 的方程是 $F(x, y)=0$。例如，中心在 O，半径等于 1 的圆的方程应是 $x^2+y^2=1$ 而不是 $y=\sqrt{1-x^2}$。这是因为在 $\overset{\frown}{A'B'A}$ 上的点(图 1.1(a))除端点外，其坐标都不满足方程 $y=\sqrt{1-x^2}$；又如，中心在 O，半径等于 1 的上半圆 $A'BA$(图 1.1(b))的方程应是 $y=\sqrt{1-x^2}$ 而不是 $x^2+y^2=1$，因为 $y<0$ 时满足方程 $x^2+y^2=1$ 的点 (x, y) 都不在上半圆 $A'BA$ 上。总之，要判断一个方程是不是所求曲线的方程，必须同时证明了以上所说的两个方面，才能作出正确的结论。



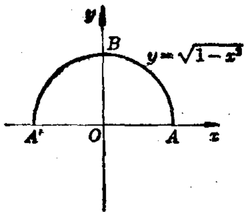


图 1.1

由于一个命题及其逆否命题是同时为真或同时为假的，因此上述条件 i)和 ii)也可分别或同时用它们的逆否命题来

代替:

i′) 坐标不满足方程(1)的点,都不在曲线 c 上;

ii′) 不在曲线 c 上的点的坐标都不满足方程(1). 在处理具体问题时,可以视方便选用.

在建立曲线的方程时, 我们往往是根据动点所满足的条件,经过一系列化简, 得出所求的方程. 这时 i)或 i′)是自然地满足了的. 所需证明的,只是 ii)或 ii′). 我们要指出的是,如果化简中进行的都是方程的同解变形, 则 ii)或 ii′)也是成立的. 这时,整个的证明步骤就可以省略.

圆锥曲线的定义方法有很多种. 下面的 2, 3, 4 是就椭圆、双曲线、抛物线分别给出的,其定义方法与通常课本中介绍的相同. 5 中介绍的是另一种分别给出的定义. 8 中给出了圆锥曲线的统一定义与方程.

2. 椭圆的定义与方程

如果平面内一个动点到两个定点的距离之和等于常量(大于两定点间的距离), 那么这个动点的轨迹称为椭圆, 这两个定点称为椭圆的焦点.

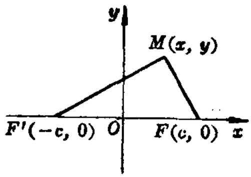


图 1.2

根据上述定义, 在不同的坐标系中可以建立形式不同的椭圆方程. 下面要建立的是在一个特定坐标系中的,称为椭圆的标准方程.

设 F' 和 F 为两定点, M 为动点. 以 $2c$ 表示 F' 和 F 间的距离, 简称焦距. $2a$ 表示动点 M 到点 F' 和 F 的距离之和, 取经过 F' 和 F 的直线为 x 轴, 线段 $F'F$ 的垂直平分线

为 y 轴，它们的正向如图 1.2 所示. 这样就建立了一个平面直角坐标系，在这个坐标系中，定点 F' 和 F 的坐标分别为 $(-c,\ 0)$ 和 $(c,\ 0)$.

设动点 $M(x,\ y)$ 是椭圆上的任意一点，则

$$|MF'|+|MF|=2a, \tag{1}$$

即

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a. \tag{2}$$

化简，得

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2). \tag{3}$$

由

$$|MF'|+|MF|>|F'F|,$$

得 $a>c$. 因此可设 $a^2-c^2=b^2(b>0)$，代入(3)式，得

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

即

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{4}$$

前面说过，由于方程(4)是从等式(1)推导出来的，所以椭圆上任意一点的坐标必然满足方程(4).

下面我们再证明坐标满足方程(4)的点必然在椭圆上，这只要证明这些点能使等式(1)成立就可以了.

设点 $M(x,\ y)$ 满足方程(4)，即

$$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),$$

从而

$$\begin{aligned}|MF'|&=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\\&=\sqrt{(x^2+2cx+c^2)+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}\\&=\sqrt{b^2+c^2+2cx+\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x^2}\\&=\sqrt{a^2+2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2}=\left|a+\frac{c}{a}x\right|.\end{aligned}$$

同理 $|MF|=\left|a-\frac{c}{a}x\right|$.

在方程(4)中,因 $\frac{y^2}{b^2}\geqslant 0$, 故 $\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1$, 即$|x|\leqslant a$, 从而

$$\left|\frac{c}{a}x\right|=\left|\frac{c}{a}\right|\cdot|x|\leqslant\left|\frac{c}{a}\right|\cdot a=c<a,$$

即
$$-a<\frac{c}{a}x<a,$$

由此得
$$a-\frac{c}{a}x>0,\quad a+\frac{c}{a}x>0.$$

于是
$$|MF'|=a+\frac{c}{a}x,\quad |MF|=a-\frac{c}{a}x.$$

相加,得

$$|MF'|+|MF|=\left(a+\frac{c}{a}x\right)+\left(a-\frac{c}{a}x\right)=2a.$$

根据椭圆的定义,可知坐标满足方程(4)的点必在椭圆上. 总之方程(4)确是椭圆的方程,这个方程称为**椭圆的标准方程**.

当 $a=b$ 时,方程(4)就变为圆的方程

$$x^2+y^2=a^2.$$

因此圆是椭圆的特例.

现在我们要用椭圆的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{4}$$

来研究它的形状,分下面五点来讨论:

对称性 在方程(4)中,如果以 $-y$ 代 y, 以 $-x$ 代 x, 或者以 $-x$ 及 $-y$ 分别代 x 及 y, 方程都不变. 因此椭圆(4)既对称于 x 轴, 又对称于 y 轴, 而且对称于原点. 这就是说, x 轴和 y 轴是椭圆(4)的对称轴, 原点则是它的对称中心, 叫做**椭圆(4)的中心**.

顶点　在方程(4)中，令 $y=0$，得 $x=\pm a$．令 $x=0$，得 $y=\pm b$．因此椭圆(4)与 x 轴的两交点为 $A'(-a, 0)$ 及 $A(a, 0)$，与 y 轴的两交点为 $B'(0, -b)$ 及 $B(0, b)$，A'，A，B'，B 这四点称为椭圆(4)的顶点．因为由 $a^2=b^2+c^2$ 可知 $a>b$，所以长为 $2a$ 的线段 $A'A$ 称为椭圆(4)的长轴，a 就是半长轴的长；长为 $2b$ 的线段 $B'B$ 称为椭圆(4)的短轴，b 就是半短轴的长．焦距 $|F'F|=2c$ 的一半 $c(=\sqrt{a^2-b^2})$ 称为半焦距．半焦距、半短轴、半长轴可以构成一个直角三角形的三条边，而以半长轴为斜边．(见图1.3中 $\triangle BOF$)．

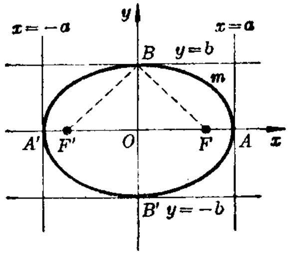


图　1.3

长(短)轴和长(短)轴的长度是不同的概念，但在不会混淆时对它们可以不加区别，例如有时我们也说：长轴 $2a$，短轴 $2b$，等等．

必须注意：由于坐标系建立方法的不同，同样形状、大小的曲线一般有不同的方程．标准方程(4)所表示的椭圆，其中心在原点，长轴和两个焦点 $F'(-c, 0)$，$F(c, 0)$ 都在 x 轴上，短轴在 y 轴上．

图形　由于椭圆(4)的对称性，我们只须研究它在第一象限内的图形就可知道整个形状．

因为在第一象限内 x 和 y 均为正数，故由方程(4)得

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\quad x=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}.$$

当 $x=0$ 时，$y=b$；当 $x=a$ 时，$y=0$；当 x 从0增大到 a 时，y 从 b 减小到0．x 的值不能大于 a，因为，如果 $x>a$，则 y 将为虚数．同样，y 的值不能大于 b．所以椭圆(4)在第一象

限内的图形如图 1.3 中的 $\overset{\frown}{AmB}$ 所示. 再利用对称性，就得到椭圆(4)的整个图形，它是一条封闭的曲线. 如果作一个矩形使它的四条边在 $x=\pm a$, $y=\pm b$ 上，则椭圆(4)的整个图形一定落在这矩形的内部.

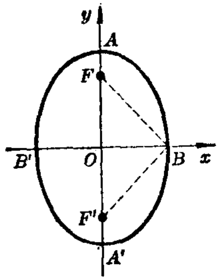


图 1.4

如果椭圆的长轴在 y 轴上，短轴在 x 轴上，且中心在原点，则它的方程为

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1,$$

其中 $a>b$. 这个椭圆的两个焦点 $F'(0, -c)$ 和 $F(0, c)$ 在 y 轴上，如图 1.4 所示.

离心率 椭圆的半焦距与其半长轴的长的比，称为椭圆的**离心率**，记为

$$e=\frac{c}{a}.$$

因为 $0\leqslant c<a$, 所以 $0\leqslant e<1$. 由此看出，椭圆的离心率必小于 1.

离心率与椭圆形状有密切关系: 离心率愈大，则椭圆愈扁平，离心率愈小，则椭圆愈圆. 事实上，因为

$$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2},$$

所以
$$\frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2}.$$

当 $e=0$ 时, $b/a=1$, 于是椭圆(4)就变成圆 $x^2+y^2=a^2$. 当 e 从 0 逐渐增大而接近于 1 时, b/a 就逐渐变小，即椭圆逐渐变为扁平.

如果把椭圆的半长轴固定起来，则椭圆形状随 e 的变化的变动情况如图 1.5 所示.

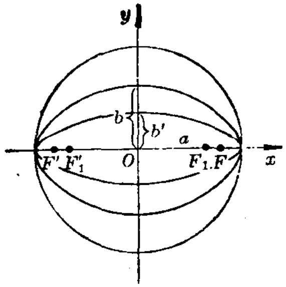


图 1.5

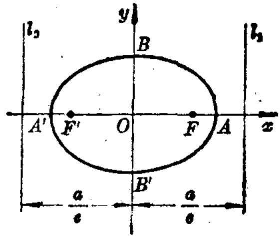


图 1.6

准线　与椭圆的短轴平行，且在短轴两边与短轴相距 $\frac{a}{e}$ 的两条直线 l_1 和 l_2，称为这个椭圆的两条*准线*．同样地，椭圆在坐标系中的位置不同，准线的方程也不同．标准方程(4)的准线如图 1.6，方程为

$$x=\frac{a}{e}\quad 和\quad x=-\frac{a}{e}.$$

第一条准线称为*右准线*，第二条准线称为*左准线*．

因为椭圆的离心率 $e<1$，所以 $a/e>a$，从而可知准线与椭圆不相交，右准线 l_1 在顶点 $A(a, 0)$的右边，而左准线 l_2 在顶点 $A'(-a, 0)$的左边，如图 1.6 所示．注意，如果 e 无限地接近于0，则准线到中心的距离就变为无限地远．当$e=c=0$ 时，准线就不存在．当 e 由 0 逐渐增大而接近于1时，准线到中心的距离就逐渐变小而接近于 a．

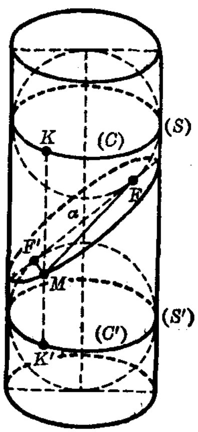


图 1.7

［例 1］　设平面 α 和直圆柱面的母线既不平行也不垂直，则 α 与直圆柱面的截线是椭圆．

证明　在柱面内部、α 的两侧作球

面(S)和(S')，与柱面相切于圆(C)和圆(C')，且与α相切于点F和F'，如图1.7. 设M是α与柱面截线上的任意一点，过点M作柱面的母线与圆(C)和圆(C')相交于点K和K'，则$|KK'|$与点M在截线上的位置无关，即$|KK'|$是一个常数. 连结MF和MF'. 因为MF和MK是由点M到球面(S)的两条切线，长度应相等，所以$|MF|=|MK|$；同样，$|MF'|=|MK'|$，因此

$$|MF|+|MF'|=|MK|+|MK'|=|KK'|\text{（常数）}.$$

就是说，动点M到两定点F，F'的距离和为一常数，根据椭圆的定义，可知这截线是以F，F'为焦点的椭圆.

[例2] 过椭圆的焦点，作长轴的垂线交椭圆于两点. 若两交点的距离是10，且短轴和焦距相等，求中心在原点，焦点在坐标轴上时该椭圆的方程.

解 这个题目要求的方程没有限定焦点在哪条轴上，故有两解. 先设焦点在x轴上时椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

又设过焦点F垂直于长轴的直线交椭圆于A，B两点，如图1.8(a)，则A，B两点的坐标可分别设为$(c,\ y_1)$和$(c,\ -y_1)$，由

$$\frac{c^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1 \quad \text{和} \quad a^2-c^2=b^2,$$

可得 $y_1=\pm\dfrac{b^2}{a}$. 于是

$$|AB|=\frac{2b^2}{a}=10. \tag{1}$$

又因为$2b=2c$，故$b=c$. 由$a^2=b^2+c^2$，得

$$a^2=2b^2. \tag{2}$$

由(1)、(2)可得 $a^2=100$, $b^2=50$.

故中心在原点,焦点在 x 轴上的椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{50}=1.$$

同理,中心在原点,焦点在 y 轴上的椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{100}=1,$$

如图 1.8(b).

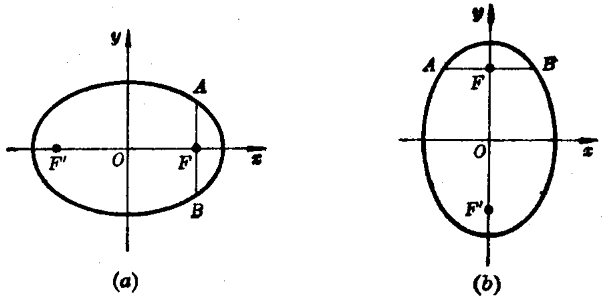


图 1.8

[例 3] 设椭圆的中心为原点,它在 x 轴上的一个焦点与短轴两端的连线互相垂直,且此焦点和长轴较近端点的距离为 $4(\sqrt{2}-1)$,求这椭圆的方程,焦点坐标,离心率和准线方程.

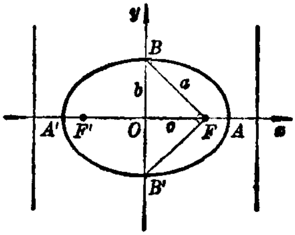


图 1.9

解 设所求的椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

F 是它的右焦点,如图 1.9. 因为 $FB\perp FB'$,所以 $\triangle BFB'$ 是等腰直角三角形,从而

$$c=\frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

$$\therefore \quad |FA|=a-c=a-\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-1)a,$$

又

$$\because \quad |FA|=4(\sqrt{2}-1),$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-1)a=4(\sqrt{2}-1),$$

$$\therefore \quad a=4\sqrt{2},$$

$$b=c=\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 4\sqrt{2}=4.$$

故所求椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{16}=1.$$

焦点坐标为 $F'(-4, 0)$, $F(4, 0)$.

离心率 $$e=\frac{c}{a}=\frac{4}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

准线方程为 $$x=\pm 8.$$

[例 4] 设椭圆的长轴是 $A'A$, 与焦点 F 较近的一条准线是 l_1, M 是椭圆上不同于 A', A 的任意一点, 直线 MA, MA' 分别交准线 l_1 于 P, P', 如图 1.10. 求证 $\angle FP'P+\angle FPP'=90°$.

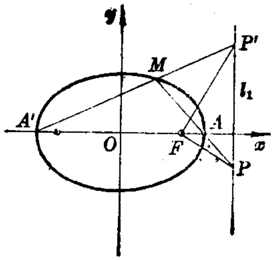


图 1.10

证明 设椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

则 A', A 和 F 的坐标分别为 $(-a, 0)$, $(a, 0)$ 和 $(c, 0)$, 其中 $c=ea$, 而准线 l_1 的方程为

$$x=\frac{a}{e} \quad 或 \quad ex-a=0.$$

设点 M 的坐标为 (x_1, y_1), 则直线 MA 的方程(两点式)为

$$y=\frac{y_1}{x_1-a}(x-a),\quad 或\quad y_1x-(x_1-a)y-ay_1=0.$$

直线 FP 的方程可用直线束形式先写为

$$ex-a+\lambda[y_1x-(x_1-a)y-ay_1]=0. \tag{1}$$

把点 F 的坐标 $(c,\ 0)$ 代入(1)，并利用 $c=ea$，得

$$(e^2-1)a+\lambda y_1a(e-1)=0,$$

$$\therefore\quad \lambda=-\frac{e+1}{y_1}. \tag{2}$$

将(2)代入(1)，可知直线 FP 的方程为

$$-x+\frac{x_1-a}{y_1}(e+1)y+ae=0. \tag{3}$$

同理，直线 FP' 的方程为

$$x+\frac{x_1+a}{y_1}(e-1)y-ae=0. \tag{4}$$

由(3)得 FP 的斜率

$$K_{FP}=\frac{y_1}{(x_1-a)(e+1)},$$

由(4)得 FP' 的斜率

$$K_{FP'}=\frac{-y_1}{(x_1+a)(e-1)},$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad K_{FP}\cdot K_{FP'}&=-\frac{y_1^2}{(x_1^2-a^2)(e^2-1)}\\&=\frac{-a^2y_1^2}{(x_1^2-a^2)(e^2a^2-a^2)}=\frac{-a^2y_1^2}{(x_1^2-a^2)(c^2-a^2)}\\&=\frac{a^2y_1^2}{(x_1^2-a^2)b^2}=\frac{a^2y_1^2}{b^2x_1^2-a^2b^2}=\frac{a^2y_1^2}{-a^2y_1^2}=-1,\end{aligned}$$

从而 $\qquad FP\perp FP',\quad \angle PFP'=90^\circ,$

故 $\qquad \angle FP'P+\angle FPP'=90^\circ.$

练 习 一

1. 设一圆以两条互相垂直的直径为坐标轴，将圆周上任一点的纵坐标按一个定比缩小（或扩大），而不改变横坐标，求证所得的点的轨迹是一个椭圆.

2. 已知 $\triangle ABC$ 的周长是 32，其中底边 AB 的长是 12. 当底边的位置固定时，求第三个顶点 C 的轨迹方程.

3. 求椭圆 $16x^2+25y^2=400$ 的长轴和短轴的长，焦点坐标，离心率和准线方程，并画出它的图形.

4. 已知椭圆的两焦点是 $F(3,0)$ 和 $F'(-3,0)$，离心率是 $\frac{3}{5}$，求它的标准方程.

5. 求证：圆在一个平面（不与圆所在的平面垂直）上的正射影是椭圆.

6. 从椭圆的一个焦点看短轴的两个端点，设(1)视角是 90°，(2)视角是 120°，分别求出椭圆的离心率.

7. 已知 M 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的一点，OM 的斜角为 α，求证 $OM=\frac{b}{\sqrt{1-e^2\cos^2\alpha}}$.

8. 若平面 α 与圆柱直截面（垂直于轴的截面）相交成 θ 角，且 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，求证圆柱面与平面 α 的交线是椭圆，这椭圆的半短轴的长等于圆柱底半径 r，半长轴的长等于 $\frac{r}{\cos\theta}$.

9. 已知 A，B 和 C 都是正数，而且 $A<B$，求椭圆 $Ax^2+By^2=C$ 的焦点.

10. 若 k 取不同的正值，则方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=k$ 所表示的椭圆的中心和离心率相同，而且它们的轴有相同的比.

11. 求证：方程 $\frac{x^2}{a^2+k}+\frac{y^2}{b^2+k}=1$ 对于 k 的不同的值所表示的椭圆，都有相同的焦点.