高等学校试用教材

# 管理数学

(公路管理工程专业用)

[illegible]

[illegible] 编



人民交通出版社

## 内 容 提 要

本书从水运经济的角度出发，系统地介绍了现代化管理中常用的一些数学方法，内容包括：线性规划、非线性规划、动态规划、排队论、投入产出法等五部分共八章。书中按工科院校学生能接受的程度，在保持数学严谨的基础上，阐述了这些内容的基本理论，并注意结合交通运输部门的实际，详细而具体地介绍了各种实用的方法。书中除配备大量例题外，每章后面均附有一定数量的习题。

本书是为水运经济等专业编写的教科书，也可供其它管理专业的学生和从事管理工作的同志参考。

高等学校试用教材

**管 理 数 学**

（水运管理工程／经济专业用）

上海海运学院

刘大镕 欧阳晋泰 编

人民交通出版社出版

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

人民交通出版社印刷厂印

开本：787×1092 1/16 印张：17.25 字数：430 千

1985年6月 第1版

1985年6月 第1版 第1次印刷

印数：0001—7,000册 定价：3.40元

# 前　言

现代管理是介于社会科学和自然科学之间的一门边缘科学。所谓现代化管理是实现管理工作的最优化与信息化。管理数学就是研究实现最优化和信息化所必须掌握的数学知识，它大体包括“运筹学”（或“系统工程”）、“计量经济学”等内容。

运筹学是二十世纪四十年代开始形成的一门科学。它既是一门理论科学，又是一门应用科学。四十年来，它迅猛发展，不仅分支日益增多，而且应用范围也越来越广。

运筹学主要研究在经济管理或军事活动中产生出来并能用数量来表达的有关运用和筹划问题。它根据问题的要求，通过数量的分析和运算，作出综合性的合理安排，以达到较经济较有效地使用人力、物力，以期发挥最大的效益。运筹学的主要分支有规划论、排队论、网络技术、对策论、决策论、库存论、质量控制、可靠性理论、更新论、搜索论等。

规划论主要是研究计划管理工作中有关安排和估值的问题。一般可以归纳为在满足既定的要求下，寻求某个衡量指标的最优化问题。如果目标函数和描述约束条件的数学方程式都是线性的，则称为“线性规划”，否则称为“非线性规划”。如果考虑的规划问题与时间有关，则称为“动态规划”。如果同时需要考虑多个衡量标准，要求一个兼顾到各方面需求的折衷方案，则称为“多目标规划”。

排队论主要是研究随机服务系统工作过程的数学理论和方法。在这个系统中服务对象何时到达以及占用系统时间的长短均预先不知道，而是一个随机聚散现象。它通过对每个个别的随机服务现象的统计研究，找出反映这些随机现象的平均特性规律，从而提供必要的信息，改进服务系统的工作能力。

网络技术是一种新的计划管理方法。它运用网络分析将构成计划目标的所有任务按其相互的联系与时间的关系组成统一的网络形式，并对网络的各个任务进行分析，提供在某种意义下最优的计划方案。

对策论也称博弈论，它是研究在对抗性竞争局势的数学模型中，寻求最优的对抗策略。在这种竞争局势中，参与对抗的各方都有一定的策略可供选择，并且各方具有相互矛盾的利益，若仅有两方参与，则称为二人对策，若一人所得即为对方所失则称二人零和对策。二人零和对策和线性规划有密切关系。对策论目前在经营管理中应用较多。

决策论是运筹学最新发展的一个重要分支。在经营管理中，人们根据系统的状态信息，可对系统选取不同的策略，决策论提供了这样的方法，使能用来对所选取的策略以及选取这些策略对系统状态所产生的后果进行综合研究，以便按照某种衡量标准选择一个最优策略。

库存论是运筹学的主要分支之一。在经营管理中，为了促进系统的有效运转，往往需要对各种物资、器材、设备、资金以及其它各种消耗品保持必要的储备。库存论就是研究在什么时间、以什么数量，从什么供应源来补充这些储备，使得必要的库存和补充采购的总费用最小。

质量控制是用数理统计的方法，研究在生产过程中控制产品质量的各种问题，及时发现生产过程的不正常，从而预防产生次品和废品。它在工业生产中应用较多，随着生产自动化

程度的提高，其应用将日益广泛。

可靠性理论是研究装置可靠性的数学方法，是应用数学的一个重要分支。所谓装置的可靠性是指在给定的时间区间和规定的使用条件下，一个装置有效地执行任务的概率。

更新论就是研究在设备系统的运行期内，在什么时间、用什么技术措施来改善设备自然"衰减"的运行能力，使之恢复到或者接近于原来状态的有效控制问题。更新的技术措施主要有替换与修理两种。更新论研究的目的在于以技术措施的各种不同结合对设备运行能力进行控制，以期达到最佳的经济效果。

搜索论就是研究在寻找某种对象（如石油、矿物、潜水艇、沉船等）的过程中，如何合理地使用搜索手段（如用于搜索的人力、物力、资金和时间），以便取得最好的搜索效果。

计量经济学或称数量经济学是我国经济学中的一门新学科，它是在马克思主义经济理论指导下，在质的分析基础上利用数学方法和计算技术，来研究社会主义经济的数量、数量关系、数量变化及其规律性。这一学科的主要内容有国民经济最优计划和最优管理，资源的最优利用问题，远景规划中的预测技术，储备问题的经济数学分析，经济信息的组织管理和自动化系统的建立等。

从长远观点来看，上述各部分内容对管理工作者来讲，都是应该知道的。但鉴于教学时数的限制以及我国目前交通运输的具体情况，我们仅介绍"线性规划"、"非线性规划"、"动态规划"、"排队论"和"平衡计算法"（或称投入产出法）等部分。

"管理数学"是管理工程与经济专业的专业基础课。本书是在我们多年从事本门课程教学的讲义基础上改写而成的。除了考虑教学的特点外，取材上着重于最需要并能够运用的那些内容，而不是详尽无遗的阐述所有有关的理论和方法。为了便于阅读，大部分的理论证明都作了较详细的推导。对于不同的方法，我们主要注意到它的应用，特别是在水运部门中的应用。

阅读本书需要"高等数学"、"线性代数"和"概率论与数理统计"等基础知识。

本书内容在经过充分讨论的基础上分头执笔。其中线性规划（第一、二、三、四章）、排队论（第六章）和平衡计算法（第八章）部分由刘大镕编写；非线性规划（第五章）和动态规划（第七章）部分由欧阳晋泰编写。在整个编写过程中，曾得到教研室的同事们和历届同学们的许多帮助，交通部标准计量研究所王联忠副所长在百忙中审阅了本书，提出了许多宝贵意见，在此表示衷心感谢。

由于编者水平有限，又缺乏实际工作经验，缺点错误一定不少，恳切盼望广大读者批评指正。

编　者

1985年1月

目　录

# 第一章 线性规划中的数学模型与基本定理

## §1.1 线性规划的数学模型

线性规划属于运筹学，它产生于四十年代。最初被应用于军事方面，以后，逐步被应用于工业、农业、交通运输、科学技术以及经济计划、管理等部门。经过许多科学家的努力，线性规划的理论日趋完善。特别是电子计算机的出现，使线性规划解决问题的规模愈来愈大。线性规划应用广，适应性强，计算简单，所以它是运筹学的基本内容之一。

作为生产计划的组织和管理人员，都要研究在一定的生产条件下，如何安排现有的人力、物力、财力，使得生产部门获得最大的经济效益。在水运部门中的问题有：合理的组织运输，港口的规划，以及港、船、厂技术设备的合理使用，最佳的投资效果，船舶运行方式和编队形式的合理选择，船舶配积载的选择等。这些问题中的相当一部分可以用线性规划加以解决。

衡量一个生产部门的经济效益，必须用一个数量指标，如果这个数量指标可以表达为一个函数形式，则我们可以称这个函数为目标函数。同时，我们还要用各种数量指标来反映整个经济活动过程中，各个因素的相互制约作用。如果这些数量指标间的相互关系可以用一组函数不等式表示，则这组函数不等式称为约束条件。有了目标函数，有了约束条件，这就形成一个数学规划问题。也就是说，有了一个数学模型。这样，才有可能用数学方法去解决实际问题。特别在数学规划模型中，如果目标函数和约束条件都是线性的，则此问题就是线性规划问题。

下面，我们通过几个例子来说明线性规划模型。对于水运生产中经常出现的几类问题，我们将在本章最后一节加以阐述。

**例1-1** 设有甲、乙、丙三种货物需要装船，其积载因数分别为1.5、2、1（立方米/吨），舱时量分别为50、100、40（吨/小时），总装货量为1000吨，总容积不大于1400立方米。问该船各装甲、乙、丙三种货物多少吨，才能使装货时间最短？

**解** 设装甲种货物 $x_1$ 吨，

装乙种货物 $x_2$ 吨，

装丙种货物 $x_3$ 吨，

则问题是要求目标函数

$$\min \quad s=\frac{1}{50}x_1+\frac{1}{100}x_2+\frac{1}{40}x_3 \tag{1.1}$$

并且 $x_1$，$x_2$，$x_3$ 要满足如下的约束条件：

$$\begin{aligned}&1.5x_1+2x_2+x_3\leqslant 1400\\&x_1+x_2+x_3=1000\\&x_j\geqslant 0\qquad j=1,2,3\end{aligned} \tag{1.2}$$

**例1-2** 根据运输计划，某航运局需要将一些不同类型的货物装上一艘货船，这些货物的重量、体积、冷藏要求，可燃性指数以及运费都不相同，具体数值由表1.1给出。

表1.1

| 货号 | 重量（吨/件） | 体积（立方米/件） | 冷藏要求 | 每件的可燃性指数 | 运费（元/吨） |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 需要 | 0.1 | 50 |
| 2 | 0.5 | 2 | 不需要 | 0.2 | 100 |
| 3 | 1 | 3 | 不需要 | 0.4 | 150 |
| 4 | 1.2 | 4 | 需要 | 0.1 | 100 |
| 5 | 2.5 | 2 | 不需要 | 0.3 | 250 |
| 6 | 5 | 6 | 不需要 | 0.9 | 200 |

假定可以装载的总重量为40000吨，总体积为50000立方米，其中可以冷藏的体积为10000立方米，容许的可燃性指数总和不能超过750。问，该船应装哪几种货物，各装多少件，才能使总的运费收入最大？

**解** 设 $x_i$ 为需要装载的第 $i$ 号货物的件数，$i=1,2,\cdots 6$。

则目标函数

$$\max\ s=50\times 2\times x_1+100\times 0.5\times x_2+150\times 1\times x_3+100\times 1.2\times x_4+250\times 2.5\times x_5+200\times 5\times x_6$$

（希望运费收入最大）

受约束

$$2x_1+0.5x_2+1x_3+1.2x_4+2.5x_5+5x_6\leqslant 40000$$

（总重量不能超过40000吨）

$$2x_2+4x_3+2x_5+5x_6\leqslant 40000$$

（非冷藏的体积不能超过40000立方米）

$$x_1+3x_4\leqslant 10000$$

（冷藏体积不能超过10000立方米）

$$0.1x_1+0.2x_2+0.4x_3+0.1x_4+0.3x_5+0.9x_6\leqslant 750$$

（总的可燃性指数不能超过750）

$$x_j\geqslant 0 \qquad j=1,2,\cdots 6$$

（货物的件数不能是负数）

**例1-3** 假定国家决定在 $A$、$B$、$C$ 等三地建设三个新型电机制造厂，并且建立五个地区性仓库，各厂生产的产品先运到这些仓库存放，然后再向用户供应。三个厂每周生产的电机台数如表1.2。五个仓库每周需要量如表1.3。从各厂运到各仓库的运输费（元/每台）由表1.4给出，现

表1.2

| 工厂 | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 生产台数 | 600 | 400 | 500 |

表1.3

| 仓库 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 需要台数 | 200 | 250 | 300 | 550 | 200 |

要求出一种运输方案使得总的运费达到最小值。

表1.4

| 收点 / 发点 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| $B$ | 4 | 2 | 1 | 3 | 1 |
| $C$ | 2 | 1 | 1 | 3 | 4 |

**解** 令 $x_{ij}$=工厂 $i$ 发送给仓库 $j$ 的台数，其中：$i=A,B,C,j=1,\cdots,5$

于是，总运费为 $s=2x_{A1}+x_{A2}+3x_{A3}+x_{A4}+2x_{A5}+4x_{B1}+2x_{B2}+x_{B3}+3x_{B4}+x_{B5}+2x_{C1}+x_{C2}+x_{C3}+3x_{C4}+4x_{C5}$

从各厂运至各仓库的数量不能超过各厂的生产能力，例如，对于 $A$ 厂应有

$$x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}+x_{A4}+x_{A5}\leqslant 600$$

类似地，对于 $B$ 厂，$C$ 厂有

$$x_{B1}+x_{B2}+x_{B3}+x_{B4}+x_{B5}\leqslant 400$$

$$x_{C1}+x_{C2}+x_{C3}+x_{C4}+x_{C5}\leqslant 500$$

除了上述可供装运数量的几个约束条件外，我们还要保证满足各个仓库的需要。例如，对于仓库1，应有

$$x_{A1}+x_{B1}+x_{C1}=200$$

类似地，对于其余仓库，我们有

$$x_{A2}+x_{B2}+x_{C2}=250 \qquad x_{A4}+x_{B4}+x_{C4}=550$$

$$x_{A3}+x_{B3}+x_{C3}=300 \qquad x_{A5}+x_{B5}+x_{C5}=200$$

运送台数 $x_{ij}$ 也都必须为非负数

因此，问题可叙述为

$$\min \quad s=2x_{A1}+x_{A2}+3x_{A3}+x_{A4}+2x_{A5}+4x_{B1}+2x_{B2}+x_{B3}+3x_{B4}+x_{B5}+2x_{C1}+x_{C2}+x_{C3}+3x_{C4}+4x_{C5}$$

受约束

$$\left.\begin{array}{l}
x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}+x_{A4}+x_{A5}\leqslant 600\\
x_{B1}+x_{B2}+x_{B3}+x_{B4}+x_{B5}\leqslant 400\\
x_{C1}+x_{C2}+x_{C3}+x_{C4}+x_{C5}\leqslant 500\\
x_{A1}+x_{B1}+x_{C1}=200\\
x_{A2}+x_{B2}+x_{C2}=250\\
x_{A3}+x_{B3}+x_{C3}=300\\
x_{A4}+x_{B4}+x_{C4}=550\\
x_{A5}+x_{B5}+x_{C5}=200\\
x_{ij}\geqslant 0 \quad i=A,B,C \quad j=1,\cdots,5
\end{array}\right\} \qquad (1.3)$$

式(1.3)所给出的问题，由于系数具有一种非常特殊的结构，它通常被称为运输问题。

通过上面三个例子的讨论，我们可以看出，这些问题都是在条件

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n(\geqslant=\leqslant)b_1$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n(\geqslant=\leqslant)b_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n (\geqslant = \leqslant)\ b_m$$
$$x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \cdots n$$

的约束下，求目标函数

$$s = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

的最大值或最小值。

这就是线性规划问题的一般数学表达式。

## §1.2 线性规划的标准形式

线性规划的标准形式是

$$(LP)\ ❶ \min\ s = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.4}$$

$$\text{s.t.}❷ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i (i = 1, \cdots, m) \tag{1.5}$$

$$x_j \geqslant 0,\ (j = 1, \cdots, n) \tag{1.6}$$

其中，$a_{ij}$，$b_i$，$c_j$ 均为已知常数。

下面我们只对标准形式进行讨论，因为其他形式的问题都可以化成标准形式：

1.若问题是求目标函数 $s$ 的极大值 max $s$，则可化成求 $-s$ 的极小值问题 min $(-s)$。

2.若约束条件中有不等式约束

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leqslant b_i \tag{1.7}$$

则可添加一个新的变量 $\xi_i$，用下面两个约束

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n + \xi_i = b_i \tag{1.8}$$

$$\xi_i \geqslant 0 \tag{1.9}$$

来代替原来的不等式约束。变量 $\xi_i$ 称为松弛变量。

3.若约束条件中有不等式约束

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \geqslant b_i \tag{1.10}$$

则可添加一个新的变量 $\eta_i$，用下面两个约束

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n - \eta_i = b_i \tag{1.11}$$

$$\eta_i \geqslant 0 \tag{1.12}$$

来代替原来的不等式约束，变量 $\eta_i$ 称为剩余变量。

4.若约束条件中出现

$$x_j \geqslant k_j \qquad (k_j \neq 0) \tag{1.13}$$

则令 $\xi_j = x_j - k_j$，以 $x_j = \xi_j + k_j$ 代入消去 $x_j$，再加入约束条件

$$\xi_j \geqslant 0 \tag{1.14}$$

5.若约束条件中无

$$x_j \geqslant 0 \tag{1.15}$$

约束，这种 $x_j$ 称为自由变量，则令

---

❶ linear programming 的缩写意为：线性规划。

❷ subject to 的缩写，意为：受约束于……。

$$x_j = u_j - v_j \tag{1.16}$$

代入消去 $x_j$，并增加

$$u_j \geqslant 0 \text{和} v_j \geqslant 0 \tag{1.17}$$

两个约束。

**例1-4** 把下列线性规划问题化成标准形式

$$\begin{aligned} \max \quad & s = x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 \leqslant 6 \\ & x_1 + 7x_2 \geqslant 4 \\ & x_1 - x_2 = 3 \\ & x_1 \geqslant 0 \end{aligned} \tag{1.18}$$

**解** 可引入松弛变量 $\xi_1$ 和剩余变量 $\eta_2$，并对自由变量 $x_2$ 作替换 $x_2 = u_2 - v_2$，则上述规划问题就可以化成相应的标准形式

$$\begin{aligned} \min \quad & -s = -x_1 - u_2 + v_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 3u_2 - 3v_2 + \xi_1 = 6 \\ & x_1 + 7u_2 - 7v_2 - \eta_2 = 4 \\ & x_1 - u_2 + v_2 = 3 \\ & x_1 \geqslant 0,\ \xi_1 \geqslant 0,\ \eta_2 \geqslant 0, \\ & u_2 \geqslant 0,\ v_2 \geqslant 0 \end{aligned} \tag{1.19}$$

若令 $x = [x_1, \cdots, x_n]^T$，$c = [c_1, \cdots, c_n]^T$

$b = [b_1, \cdots, b_m]^T$，$A = [a_{ij}]$ 为 $m \times n$ 矩阵，则线性规划的标准形式进一步可写成

$$(LP) \min \ s = c^T x \tag{1.20}$$

$$\text{s.t. } Ax = b \tag{1.21}$$

$$x \geqslant 0 \tag{1.22}$$

为了方便，我们还可以不妨假定：（1）$n > m$；（2）$A$ 的秩为 $m$；（3）$b \geqslant 0$。其中 $b \geqslant 0$表示 $b$ 的所有分量都非负，即 $b_i \geqslant 0 \quad i = 1, 2, \cdots m$。

**定义1.1** 集合 $K = \{x \mid Ax = b,\ x \geqslant 0\}$称为（$LP$）的能行域。

若 $x \in K$，则称 $x$ 是（$LP$）的可行解。

若 $x^* \in K$，且

$$c^T x^* = \min_{x \in k} c^T x$$

则称 $x^*$ 是（$LP$）的最优解。

下列形式称为线性规划的典则形式

$$\begin{aligned} (LP) \min \quad & s = c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \geqslant b \\ & x \geqslant 0 \end{aligned} \tag{1.23}$$

## §1.3 线性规划问题的几何解释

解($LP$)就是要从（$LP$）的全部可行解 $x$ 中，挑选使目标函数 $s = c^T x$ 达到极小值的解

$x^*$。由于可行解是能行域 $K=\{x|Ax=b,\ x\geqslant 0\}$中的点，所以，我们现在要对 $K$ 的几何形状以及最优解 $x^*$在 $K$ 中的位置有一个直观的了解。

**例1-5** 考虑下列线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & s=2x_1+5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1+2x_2\leqslant 16 \\ & 2x_1+x_2\leqslant 12 \\ & x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \end{aligned} \tag{1.24}$$

将它化成标准形式，可得

$$\begin{aligned} \min \quad & -s=-2x_1-5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1+2x_2+x_3 \quad =16 \\ & 2x_1+\ x_2 \quad +x_4=12 \\ & x_j\geqslant 0,\ j=1,2,3,4 \end{aligned} \tag{1.25}$$

式(1.24)共受四个不等式约束，每个约束都代表一个半平面，它的能行域就是此四个半平面之交，为一个凸多边形（见图 1）。对某个固定的值 $s_0$，方程 $s_0=2x_1+5x_2$ 所表示的直线称为目标函数 $s=2x_1+5x_2$ 的等值线。对于不同的 $s_0$ 值，其等值线为一族平行直线。在图 1 中用虚线表示。目标函数 $s=2x_1+5x_2$ 的梯度

$$\nabla s=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial s}{\partial x_1} \\ \\ \dfrac{\partial s}{\partial x_2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{1.26}$$

它与所有的等值线都垂直，且它指向目标函数值增大的方向，因而我们从图 1 中可看出式(1.24)的目标函数 $s$ 将在多边形 $K$ 的顶点 $x^*=[0,8]^T$处达到它的最大值，$x^*$ 即为(1.24)的最优解。

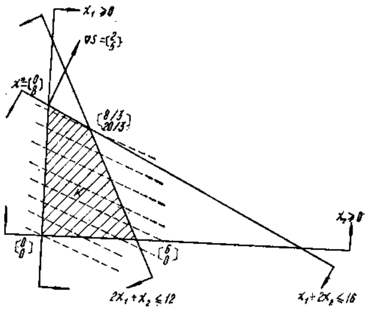

图 1

一般（$LP$）的能行域是由若干超平面所围成的凸多面体（有界或无界）。从几何直观来看（$LP$）问题可能具有以下几种情况：

1. 具有唯一的最优解 $x^*$，它的最优值 $|s^*|<+\infty$。这时 $x^*$ 必为 $K$ 的某一顶点（见图 2）。

2. 最优解 $x^*$不唯一，但最优值 $|s^*|<+\infty$。这时 $x^*$为 $K$ 的边界点（见图 3 以及参阅习题1-4）。

3. 在 $K$ 中目标函数 $s$ 无下界，这时 $K$ 也必然无界（见图 4 及习题 1-6）。

4. $K\neq\phi$（空集）时，（$LP$）无解（见习题1-7）。

因此，当 $K=\phi$ 且 $K$ 中目标函数有下界时，（$LP$）的最优解 $x^*$一定可从 $K$ 的顶点中找到。后面我们将给予严格的论证。

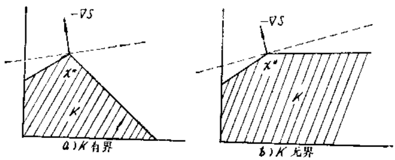


图 2

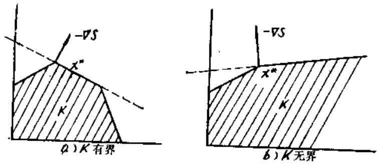


图 3

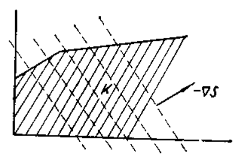


图 4

# §1.4 凸 集

## 一、凸 集

直观地看，平面上的三角形、矩形是凸多边形，而五角星不是凸多边形（见图5），图6中的形状是凸的，而图7中的形状不是凸的。凸图形的特征是：图形中任意两点的联线全部落在该图形中（见图6）。我们利用这一特征来定义凸集。

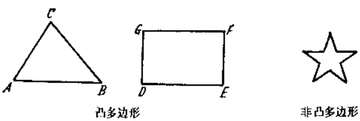


图 5

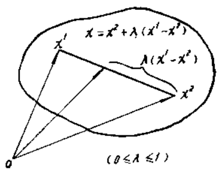


图 6

**定义1.2** 设 $A$ 为 $n$ 维欧氏空间中的点集，如果对于任意的 $x^1$、$x^2 \in A$，以及数 $\lambda \in (0,1)$，均有

$$\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in A$$

则称 $A$ 为凸集。

**定理1.1** 能行域 $K = \{x \mid Ax = b,\ x \geqslant 0\}$ 是凸集。

**证明** 对任意的 $x^1$，$x^2 \in K$，则

$$Ax^1 = b,\ x^1 \geqslant 0$$
$$Ax^2 = b,\ x^2 \geqslant 0$$

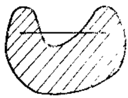

图 7

于是，对任意$\lambda \in (0, 1)$，有

$$A(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) = \lambda Ax^1 + (1-\lambda)Ax^2 = \lambda b + (1-\lambda)b = b$$

$$\text{又}\quad \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \geqslant 0$$

因此，$\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in K$，$\therefore K$ 是凸集。

### 二、顶　点

图 5 中的点 $A$，$B$，$C$，$D$，$E$，$F$，$G$ 通常被称为顶点。这些点都有这样的特征：它们中的任何一个都不能成为凸集中任何一条线段的内点。这一特征完全刻画了这类特殊的点。

**定义1.3** 若 $x$ 是凸集 $A$ 中的一点，且不存在 $A$ 中两个不同的点 $x^1$ 和 $x^2$，使得

$$x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \qquad (0<\lambda<1)$$

则称 $x$ 为凸集 $A$ 的顶点。

应特别注意，这里的 $\lambda$ 只能取（0，1）之间的数，而不能取 0，或 1。

显然，根据定义，圆周上的每一点都是圆的顶点。

## §1.5　基 本 定 理

给定线性规划（$LP$），若它的能行域 $K=\{x \mid Ax=b,\ x\geqslant 0\}$ 非空，则称（$LP$）是可行的，否则称（$LP$）是不可行的。当 $K \neq \phi$ 时，（$LP$）存在最优解 $x^* \in K$ 使得 $c^T x^* = \min\limits_{x\in K} c^T x$，或是存在解无界。

以下我们以 $a_1$，$a_2$，…，$a_n$ 分别表示 $A$ 的 $n$ 个列向量，即

$$A = [a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n] \tag{1.27}$$

由于 $A$ 的秩为 $m$，因此一定可从 $a_1$、$a_2$、…、$a_n$ 中选出 $m$ 个线性无关的向量 $a_{B_1}$，$a_{B_2}$，…，$a_{B_m}$，它们组成一个 $m$ 阶非异阵

$$B = [a_{B_1},\ a_{B_2},\ \cdots a_{B_m}] \tag{1.28}$$

称为($LP$)的基底。令指标集

$$I_B = \{B_1,\ B_2,\ \cdots,\ B_m\} \tag{1.29}$$

$$I_D = \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\} \setminus I_B \tag{1.30}$$

经过适当的次序调整，矩阵 $A$，向量 $x$ 和 $c$ 可以写成

$$A = [B,\ D] \tag{1.31}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_D \end{bmatrix},\quad c = \begin{bmatrix} c_B \\ c_D \end{bmatrix} \tag{1.32}$$

其中 $x_B = (x_{B_1},\ x_{B_2},\ \cdots,\ x_{B_m})^T$，$c_B = (c_{B_1},\ c_{B_2},\ \cdots,\ c_{B_m})^T$。变量 $x_{B_k}$（$k=1,2,\cdots,m$）称为关于基底 $B$ 的基本变量，变量 $x_j$（$j\in I_D$）称为关于 $B$ 的非基本变量，因而有

$$Ax = [B,\ D]\begin{bmatrix} x_B \\ x_D \end{bmatrix} = Bx_B + Dx_D = b \tag{1.33}$$

由于 $B$ 非异，即 $B^{-1}$ 存在，故

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Dx_D \tag{1.34}$$

如果取 $x_D=0$，则得

$$x_B = B^{-1}b \tag{1.35}$$

称 $x=[x_B^T,\ x_D^T]^T=[[B^{-1}b]^T,\ 0]^T$ 为（$LP$）关于基底 $B$ 的基本解。如果 $B^{-1}b\geqslant 0$，则称基本解 $x=[[B^{-1}b]^T,\ 0]^T\geqslant 0$ 为（$LP$）关于基底 $B$ 的基本可行解（显然 $x\in K$）。如果 $x$ 为（$LP$）的基本可行解，而 $x_B$ 中存在等于 0 的分量，就称 $x$ 为退化的基本可行解，否则就称 $x$ 为非退化的基本可行解。

**例1-6** 已给($LP$)

$$\begin{aligned}
\min\ & s=2x_1+x_2\\
\text{s.t.}\ & x_1+x_2+x_3 = 5\\
& -x_1+x_2+x_4 = 0\\
& 6x_1+2x_2+x_5=21\\
& x_j\geqslant 0,\ j=1,2,3,4,5
\end{aligned} \tag{1.36}$$

如果取基底 $B_1=[a_1,\ a_2,\ a_3]$，即

$$B_1=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 6 & 2 & 0\end{bmatrix} \tag{1.37}$$

这时 $I_{B^1}=\{1,2,3\}$，$I_{D^1}=\{4,5\}$。取 $x_{D^1}=(x_4,\ x_5)^T=(0,0)^T$，则可得 $x_{B^1}=[x_1,x_2,x_3]^T=(21/8,\ 21/8,\ -1/4)^T$。由于 $x_3=-\dfrac{1}{4}$ 不满足 $x_3\geqslant 0$ 因此相应的基本解 $x^1=(x_{B^1},\ x_{D^1})^T=(21/8,\ 21/8,\ -1/4,\ 0,\ 0)^T$ 不是基本可行解。

如果取基底

$$B_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{1.38}$$

这时 $I_{B^2}=\{3,4,5\}$，$I_{D^2}=\{1,2\}$，取 $x_{D^2}=(x_1,x_2)^T=(0,0)^T$，则可得 $x_{B^2}=(x_3,\ x_4,x_5)^T=(5,\ 0,\ 21)^T$，因此，相应的基本解 $x^2\geqslant 0$ 是一个基本可行解，然而是一个退化的基本可行解。

如果取基底

$$B_3=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 6 & 2 & 0\end{bmatrix} \tag{1.39}$$

这时 $I_{B^3}=\{1,2,4\}$，$I_{D^3}=\{3,5\}$，取 $x_{D^3}=0$，则可得 $x_{B^3}=(x_1,x_2,x_4)^T=(11/4,9/4,1/2)^T$，因此相应的基本解 $x^3$ 是一个非退化的基本可行解。

**定理1.2** （线性规划的基本定理）

若（$LP$）存在可行解，则一定也存在一个基本可行解；

若（$LP$）存在最优解，则一定也存在一个基本最优解。

**证明** 先证前半部分。

设 $x$ 为（$LP$）的一个可行解，则

$$Ax=[a_1,\ \cdots,\ a_n]\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=x_1a_1+\cdots+x_na_n=b \tag{1.40}$$

设 $x_i$ 中恰好有 $p$ 个大于零（其余均为零）。若 $p=0$，则 $x$ 即为退化的基本可行解；否则不妨设它们为前面 $p$ 个，因而有

$$x_1a_1+\cdots+x_pa_p=b \tag{1.41}$$

这时 $a_1$，…，$a_p$ 可能线性无关，也可能线性相关。

若 $a_1$，…，$a_p$ 线性无关，由于 $A$ 的秩为 $m$，所以 $p\leqslant m$。若 $p=m$，则 $x$ 即为非退化的基本可行解。否则 $x$ 即为退化的基本可行解。

若 $a_1$，…，$a_p$ 线性相关，则存在不全为 0 的实数 $y_1,\cdots,y_p$(不妨设其中至少有一为正）使得

$$y_1a_1+\cdots+y_pa_p=0 \tag{1.42}$$

再将此式乘以 $\varepsilon$，并从式(1.41)中减去所得的结果，有

$$(x_1-\varepsilon y_1)a_1+\cdots+(x_p-\varepsilon y_p)a_p=b \tag{1.43}$$

令 $y=(y_1,\ \cdots,\ y_p,\ 0,\ \cdots,\ 0)^T$ 为一 $n$ 维向量，则对任何 $\varepsilon$

$$x^1=x-\varepsilon y \tag{1.44}$$

都是方程组 $Ax=b$ 的解，而且当 $\varepsilon=0$时，$x^1$即为 $x$ 是$(LP)$的一个可行解（$x^1\geqslant 0$）。现令

$$\varepsilon\ =\min\left\{\frac{x_i}{y_i}\middle|y_i>0,\ 1\leqslant i\leqslant p\right\} \tag{1.45}$$

显然这时 $x^1$ 仍为（$LP$）的可行解，且这时最多只有 $p-1$ 个为正的分量。

把上述手续重复对 $x^1$ 进行，直至有关列向量是线性无关或为正的分量个数 $p=0$ 为止。这样便得到（$LP$）的基本可行解。

再证后半部分。

设 $x$ 为（$LP$）的最优解，同样设它有 $p$ 个分量为正，它们为 $x_1$，$x_2$，…，$x_p$，若 $p=0$，则 $x$ 本身已为退化的基本最优解，否则当 $a_1$，…，$a_p$ 线性无关时，可知 $x$ 即为基本最优解。当$a_1$，…，$a_p$ 线性相关时，可知当$|\varepsilon|$充分小时，式(1.44)的 $x^1=x-\varepsilon y$ 都是（$LP$）的可行解。又这时有

$$c^Tx^1=c^Tx-\varepsilon c^Ty \tag{1.46}$$

若 $c^Ty>0$时取 $\varepsilon>0$，若 $c^Ty<0$ 时取 $\varepsilon<0$ 均可得到 $c^Tx^1<c^Tx$ 的结果，这将与 $x$ 为（$LP$）的最优解的假设矛盾。因而必有

$$c^Ty=0 \tag{1.47}$$

即

$$c^Tx^1=c^Tx \tag{1.48}$$

$x^1$也为（$LP$）的最优解。重复证明前半部分中的手续，使 $x^1$中为正的分量比 $x$ 要少。最后得到：或者为正的分量个数 $p=0$，或者那些为正的分量所相应的列向量线性无关为止，这样就得到（$LP$）的基本最优解。

这个定理告诉我们，解（$LP$）问题可以只在基本可行解中去寻找最优解。若（$LP$）的所有基本解都是不可行的，则（$LP$）就是不可行的；若（$LP$）存在最优解，那么，一定存在一个基本最优解。由于对具有 $n$ 个变量 $m$ 个方程的标准形式线性规划来说，最多有

$\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$个基本解。因此，我们可以通过有限次（而不是无限次）迭代步骤求得最优解。这就是后面单纯形法的理论根据。

**定理1.3** （能行域 $K$ 的顶点与基本可行解对应定理）

$x$ 为（$LP$）的基本可行解的充要条件为：$x$ 是（$LP$）的能行域——凸多面体 $K=\{x\mid Ax=b,\ x\geqslant 0\}$ 的顶点。

**证明** 必要性：设 $x$ 为关于基底 $B=[a_{B_1},\cdots,a_{B_m}]$ 的基本可行解，则由(1.33)可知

$$Ax=Bx_B+Dx_D=Bx_B=b \tag{1.49}$$

若 $x$ 可写成 $K$ 中两点 $y$ 和 $z$ 的凸组合

$$x=\lambda y+(1-\lambda)z \quad 0<\lambda<1 \tag{1.50}$$

对于 $j\in I_D$，有

$$x_j=\lambda y_j+(1-\lambda)z_j=0 \tag{1.51}$$

又因为 $y$，$z$ 在 $K$ 中，所以 $y_j\geqslant 0$，$z_j\geqslant 0$，而 $\lambda>0$，$1-\lambda>0$，因此由上式可得

$$y_j=z_j=0,\ j\in I_D \tag{1.52}$$

又由 $y$，$z$ 在 $k$ 中可知

$$Ay=By_B+Dy_D=By_B=b \tag{1.53}$$

$$Az=Bz_B+Dz_D=Bz_B=b \tag{1.54}$$

由于 $a_{B_1}$，$a_{B_2}$，$\cdots$，$a_{B_m}$是线性无关的，因而由式(1.49)、(1.53)和(1.54)可得到

$$x_j=y_j=z_j \quad j\in I_B \tag{1.55}$$

由式(1.52)和(1.55)可知

$$x=y=z \tag{1.56}$$

它说明 $x$ 不可能被写成 $K$ 中两个不同点 $y$ 和 $z$ 的凸组合（其中 $0<\lambda<1$），即 $x$ 为 $k$ 的顶点。

充分性：设 $x$ 为 $K$ 的顶点，且不妨设 $x$ 的非零分量为前面 $p$ 个，即 $x_1$，$\cdots$，$x_p$。因而有

$$x_1a_1+\cdots+x_pa_p=b \tag{1.57}$$

当 $p=0$或 $a_1$，$\cdots$，$a_p$ 为线性无关时，$x$ 即为基本可行解。当 $a_1$，$\cdots$，$a_p$ 为线性相关时，则存在不全为零的数 $y_1$，$\cdots$，$y_p$，使得

$$y_1a_1+\cdots+y_pa_p=0 \tag{1.58}$$

令 $y=(y_1,\cdots,y_p,0,\cdots,0)^T$为一 $n$ 维向量。因为 $x_i>0$，$1\leqslant i\leqslant p$，因此，当$|\varepsilon|$充分小时可使

$$x+\varepsilon y\geqslant 0,\ x-\varepsilon y\geqslant 0 \tag{1.59}$$

而且由式(1.57)和(1.58)可知

$$A(x+\varepsilon y)=Ax+\varepsilon Ay=b \tag{1.60}$$

$$A(x-\varepsilon y)=Ax-\varepsilon Ay=b \tag{1.61}$$

因此 $x+\varepsilon y$，$x-\varepsilon y$ 为 $K$中两不同点。但此时

$$x=\frac{1}{2}(x+\varepsilon y)+\frac{1}{2}(x-\varepsilon y) \tag{1.62}$$

这就与 $x$ 为 $K$ 的顶点相矛盾，因而 $a_1$，$\cdots$，$a_p$ 不可能线性相关。

由上述定理，我们很自然地得到一种解题方法：先求出能行域 $K$ 的所有顶点，然后计