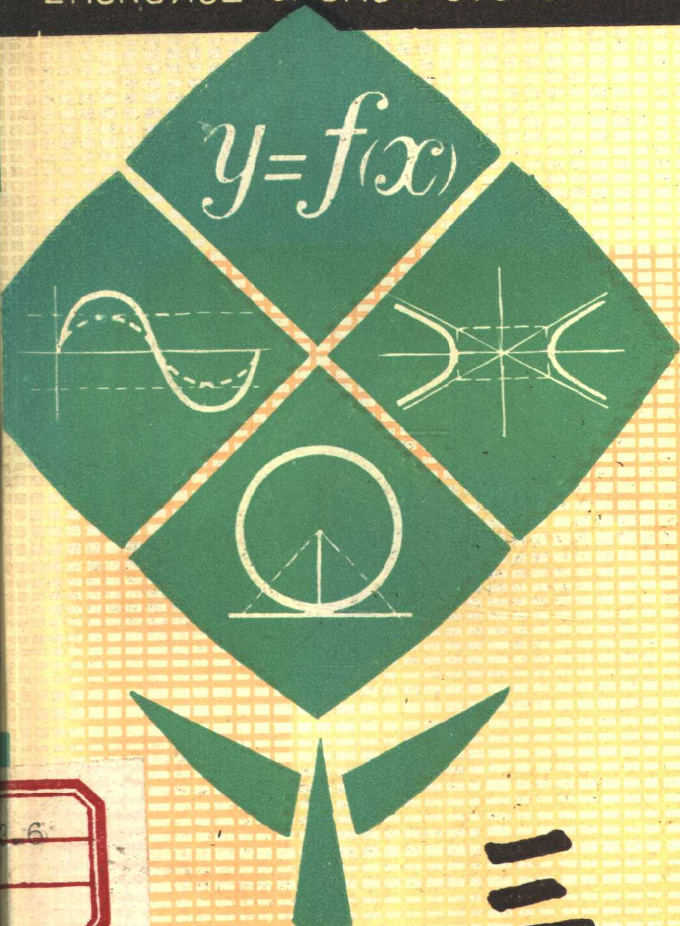
中学数学基础

ZHONGXUE SHUXUE JICHU



三角

孟广烈 胡显承 钱文侠 梁绍鸿 米道生 等编

人民教育出版社

中学数学基础

三角

孟广烈 胡显承 钱文侠
梁绍鸿 米道生 等编

人民教育出版社

内 容 提 要

这套《中学数学基础》目前包括《代数》(上、下册)、《几何》、《三角》、《解析几何》、《公式和数表》，以及前五册的习题解答各一本，它们是在一九七五年出版的一套《初等数学》的基础上编写的。其中代数、几何、三角是重新编写的；解析几何是在原书的基础上，对部分内容进行了修改，增加了习题数量；公式和数表只改正了原书中的错误。这套书加强了基本理论的内容；增加了习题数量；引入了一些近代数学的初步知识。

《三角》内容包括：任意角的三角函数，三角恒等式，反三角函数和三角方程，任意角三角形的解法，向量、复数和正弦波。

这套《中学数学基础》可供广大青年自学相当于中学程度的数学基础知识之用，也可供中小学教师阅读和参考。

中学数学基础
三　角
孟广烈　胡显承　钱文侠
梁绍鸿　米道生　等编
*
人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
人民教育出版社印刷厂印装
*
开本787×1092 1/32　印张 8.75　字数 182,000
1980 年 4 月第 1 版　1980 年10月第 1 次印刷
印数 1—610,000
书号 7012·0119　定价 0.65 元

前　言

这套《中学数学基础》目前包括代数(上、下册)、几何、三角、解析几何、公式和数表,以及前五册的习题解答各一本。这套书是在一九七五年出版的一套《初等数学》的基础上编写的。其中代数、几何、三角是重新编写的;解析几何是在原书的基础上,对部分内容进行了修改,增加了习题数量;公式和数表只改正了原书中的错误。

为了更好地帮助广大青年自学相当于中学程度的基础数学知识,在重新编写和修订这套书的过程中,特别注意以下问题:加强基本理论的内容;介绍一些常用的证明方法和计算方法;增加习题数量;注意习、例题的灵活性和综合性;同时引进一些近代数学的初步知识。

目　录

第一章　任意角的三角函数

第二章　三角恒等式

第三章　反三角函数和三角方程

第四章　任意三角形的解法

第五章　向量、复数和正弦波

第一章　任意角的三角函数

在《几何》第三章中，我们已经学过锐角三角函数．但是，对于实际中许多常见的变化规律以及进一步的学习中，只有锐角三角函数的知识是不够的．在这一章里，我们首先把角的概念推广，然后学习任意角的三角函数．

第一节　角的概念的推广

任意大小的角

图 1-1 是曲柄连杆机构的示意图，OA 表示曲柄，AB 表示连杆．当 OA 转动时，连杆 AB 就推动滑块 B 作往复运动．如图，OA 和它的水平位置 OA' 的夹角为 α．我们看到，当 OA 绕着 O 点不停地转动时，α 不但要超过 $90°$，而且还要突破 $360°$ 的界限．

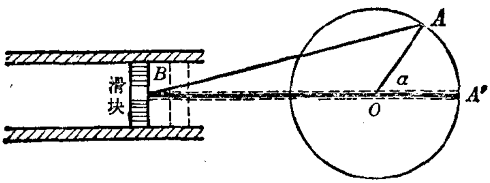


图 1-1

再看图 1-2，两个大小和齿数相同的齿轮互相咬合着，其

中一个旋转某一个角，另一个也就旋转同样大小的角，但它们的旋转方向是不同的.

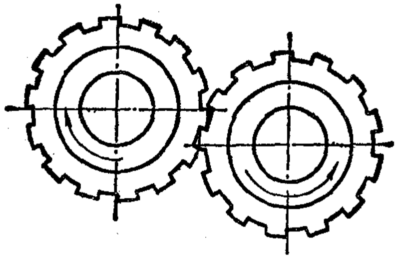


图 1-2

这些例子说明，为了更好地描述某些变化规律，并对它们进行研究，角的概念不但需要加以推广，而且还要把由不同方向旋转形成的角加以区别.

角，可以看成是一条射线从始边出发，绕端点旋转到终边位置而成(图 1-3).

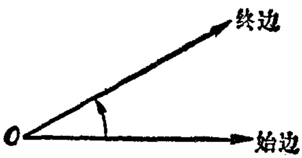


图 1-3

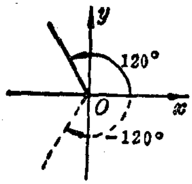


图 1-4

在直角坐标系中，通常取正 x 轴为角的始边，原点为角的顶点(图 1-4).

为了区别射线绕原点旋转的两个方向，把按反时针方向转成的角作为正角，按顺时针方向转成的角作为负角，如图 1-4.

设一条射线从始边转到终边形成的角是 α(如图 1-5,

$\alpha=45°$)．如果从 α 角再按反时针方向转一圈，得到 $360°+\alpha$（如图 1-5，为 405°）的角；转两圈，得到 $2\times360°+\alpha$ 的角；……一般地，从 α 角再按反时针方向转 n 圈，得到 $n\cdot360°+\alpha$ 的角．类似地，从 α 角再按顺时针方向转 n 圈，得到 $-n\cdot360°+\alpha$ 的角．

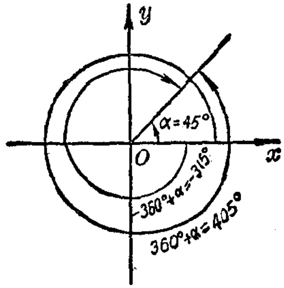


图 1-5

值得注意的是，这些角都有相同的始边和终边．换句话说：对于同一条终边(始边总是取在正 x 轴)，可以形成下述形式的任意转角：

$$n\cdot360°+\alpha\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots)$$

n 取正值时，表示反时针方向旋转；n 取负值时，表示顺时针方向旋转．

角的终边在第几象限，就说这个角是第几象限的角．例如 45°、405°、−315° 都是第一象限的角，120° 是第二象限的角，−120° 是第三象限的角(图 1-5 和图 1-4)．如果角的终边与 x 轴或 y 轴重合，这样的角不属于任何象限，如 0°、90°、180°、270°、360°、−90°、−540° 的角等．

弧度制

由于实际需要，度量各种量往往用不同的单位．例如量长度有时用“米”作单位，有时用“尺”作单位．

度量角也有不同的单位．角度制(即六十分制)是大家熟悉的一种，现在介绍度量角的另一种单位制——弧度制．

如图 1-6, 在射线上任取两点 A、A', 当射线绕 O 点转过 $n°$ 角时, A 和 A' 点就转到 B 和 B', 且形成 $\widehat{AB}$ 和 $\widehat{A'B'}$. 设 $\widehat{AB}$ 和 $\widehat{A'B'}$ 的长分别为 l 和 l', 半径 OA 和 OA' 分别为 R 和 R', 由初等几何可知

$$l=\frac{n\pi R}{180}, \qquad l'=\frac{n\pi R'}{180}.$$

所以 $$\frac{l}{R}=\frac{n\pi}{180}, \qquad \frac{l'}{R}=\frac{n\pi}{180}.$$

因此 $$\frac{l}{R}=\frac{l'}{R}$$

这就是说，当角的大小一定时，不管这个角所对圆弧的半径是多少，弧长与该圆半径的比是一个常数. 也就是说，这个比仅取决于圆心角的大小而与所取圆的半径长短无关. 这样, 我们就可以用圆心角所对弧长与半径的比来表示角的大小.

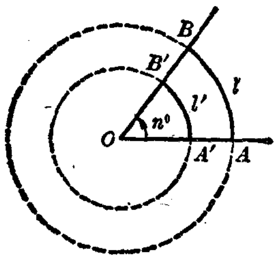


图 1-6

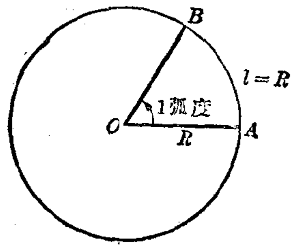


图 1-7

如图 1-7，当弧长等于半径（就是弧长与半径的比为 1）时, 这条弧所对的圆心角叫做 **1 弧度的角**.

用弧度作单位来度量角(或弧)的制度叫**弧度制**.

很明显, 如果半径为 R, 弧长为 l, 那么这条弧所对圆心角的弧度数 α 为

$$\alpha=\frac{l}{R}$$

整个圆周所对的圆心角是$\frac{2\pi R}{R}$弧度，即 2π 弧度，而这个角在角度制中是 $360°$，因此 $360°=2\pi$ 弧度. 由此可以得到:

角　度	$360°$	$270°$	$180°$	$90°$	$60°$	$45°$	$30°$	$0°$
弧　度	2π	$\frac{3\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

由于 $180°=\pi$ 弧度，所以

$$1°=\frac{\pi}{180}\text{弧度}\approx0.017453\text{ 弧度}$$

$$1\text{ 弧度}=\frac{180°}{\pi}\approx57°17'44.8''$$

利用上面的关系式，可以进行角度与弧度的换算.

例 1　把 $67°30'$ 化成弧度.

解: $\because\quad 67°30'=67\frac{1}{2}$度

$$\therefore\quad 67°30'=\frac{\pi}{180}\text{弧度}\times67\frac{1}{2}=\frac{3\pi}{8}\text{弧度}\approx1.18\text{ 弧度}$$

例 2　把 1.5 弧度化成度.

解: $1.5\text{ 弧度}=\frac{3}{2}\times\frac{180°}{\pi}=\frac{270°}{\pi}\approx85°57'$

弧度和度之间的换算还有表可查，见《公式和数表》.

在用弧度来度量角时，“弧度”二字通常略去不写. 例如，$\angle AOB=1$ 弧度，可以写成 $\angle AOB=1$；$\alpha=\frac{\pi}{2}$弧度（约 1.57 弧度）可以写成 $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

如果角α的单位是弧度，那么和角α有同一条终边的任意角，可以写作

$$2n\pi+\alpha \quad (n=0, \pm1, \pm2, \cdots\cdots)$$

当角的大小用弧度表示时，计算弧长的公式就变得简单了。由 $\alpha=\frac{l}{R}$立即得到

$$l=\alpha R$$

这就是说，弧长等于圆心角的弧度数乘以这个圆的半径。

例3 试求地球表面赤道上的一点在地球自转中的角速度ω和线速度v.（地球平均半径约为6371公里）

解：因为地球自转中的角速度是单位时间内它旋转的弧度数，而地球24小时(24×3600秒)自转一周，所以

$$\omega=\frac{2\pi}{24\times3600}\approx0.000073(\text{弧度/秒})$$

又因为地球自转中的线速度是赤道上一点在单位时间内所经过的弧长，已知地球平均半径为6371公里(6371000米)，所以

$$v=\omega R=0.000073\times6371000\approx465(\text{米/秒})$$

习　题

1. 在直角坐标系中作出下列各角，说明它们各是第几象限的角：
   $30°,\ 120°,\ 210°,\ 300°,\ 530°,\ 1050°,$
   $-60°,\ -390°,\ -240°,\ -620°$

2. 第一象限的角都是锐角吗？如果α是第一象限的角，$\frac{\alpha}{2}$一定在第一象限吗？举例说明。

3. 写出和下列各角有相同终边的一切角:

$0°$, $30°$, $90°$, $120°$, $-45°$, $-70°$, $390°$

4. 指出下列各角所在象限:

(1) $4\times360°+30°$　　(2) $-3\times360°+150°$

(3) $n\cdot360°-30°$ ($n=0$、±1、±2、±3、……)

5. 把下列各角写成 $n\cdot360°+\alpha$ 的形式($0°\leqslant\alpha<360°$, n 是整数):

(1) $1350°$　(2) $3250°$　(3) $-2860°$　(4) $-3000°$

6. 下列各角始边相同, 判断哪些角有相同终边:

$30°$, $105°$, $-75°$, $465°$, $-615°$, $285°$, $-1410°$

7. 一条弦等于半径, 这条弦所对的圆心角是不是 1 弧度的角? 这个圆心角等于多少度? 合多少弧度?

8. 用弧度制表示下列各角(写成多少 π 的形式):

(1) $18°$　(2) $22°30'$　(3) $75°$

(4) $120°$　(5) $135°$　(6) $150°$

(7) $210°$　(8) $240°$　(9) $315°$

(10) $-270°$　(11) $-480°$　(12) $360°$ 的 k 倍

9. 用角度制表示下列各角:

(1) $\frac{\pi}{12}$　(2) $\frac{11\pi}{6}$　(3) $\frac{5\pi}{3}$

(4) $\frac{7\pi}{10}$　(5) 3　(6) 1.85

10. 设 θ 和 ϕ 分别是等腰三角形的顶角和底角, 写出 θ 和 ϕ 的范围. (用弧度表示)

11. 指出下列各式中的 α、β、γ、δ 各是第几象限的角:

$$2n\pi<\alpha<\frac{\pi}{2}+2n\pi$$

$$\frac{\pi}{2}+2n\pi<\beta<(2n+1)\pi$$

$$(2n+1)\pi<\gamma<\frac{3}{2}\pi+2n\pi$$

$$\frac{3}{2}\pi+2n\pi<\delta<2(n+1)\pi \quad (n \text{ 是整数})$$

12. 设皮带轮的直径为 1.2 米，每分钟旋转 300 次，求

(1) 皮带轮的角速度(弧度/秒)，

(2) 皮带轮上一点的线速度(米/秒)，

(3) 旋转一周所需时间.

13 两皮带轮的半径是 $R_1=20$, $R_2=30$，求它们的转速的比.

14. 在半径为 R 的圆中，一个扇形的圆心角为 θ 弧度，求证这个扇形面积为 $\frac{1}{2}R^2\theta$.

15 已知扇形的周长等于它所在圆的周长的一半，求这个扇形角的大小.

第二节 任意角的三角函数

先看一个实际例子.

图 1-8 是一个偏心驱动机构的示意图. 这种机构能把圆周运动转化为往复的直线运动, 小型油泵和小型冲床常用这种机构.

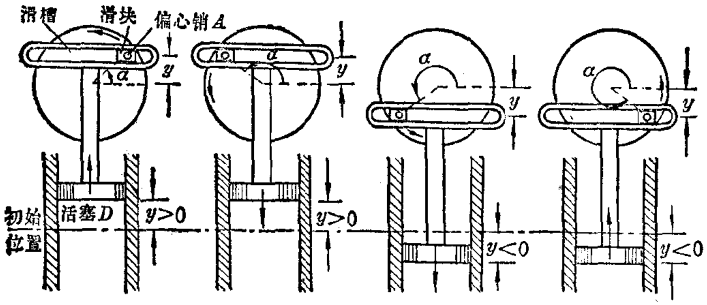


图 1-8

它的结构是: 在圆盘上有个偏心销 A, 穿在滑槽里的滑块中, 和滑槽固定连接在一起的是活塞 D, 活塞只能在一个圆筒中作往复直线运动.

工作原理是: 电机带动圆盘转动时, 偏心销 A 通过滑块带动滑槽上下运动, 滑槽又带动活塞在圆筒中作往复直线运动.

如图 1-8, 当转角 α 从 $0°$ 转到 $90°$, 活塞上升; 当 α 从 $90°$ 转到 $180°$, 活塞下降; 当 α 从 $180°$ 转到 $270°$, 活塞继续

下降；当 α 从 270° 转到 360°，活塞又回升，最后回到起始位置. 再继续转下去，活塞又重复地按上述方式运动. 这是一种周期运动.

可以看出：在活塞的运动过程中，转角 α 和活塞位移 y 都是变量，并且，对于 α 所取的每一个值，都对应着 y 的一个确定的值.

正如在《代数》中所指出的那样：如果有两个变量 x 和 y，对于 x 所允许取的每一个值，都对应着 y 的一个确定的值，就叫 y 是 x 的函数*，x 是自变量.

在活塞运动过程中，位移 y 是转角 α 的函数，y 与 α 的函数关系从数量方面刻划了这个运动的规律.

那么，怎样具体地写出这个函数关系呢？

建立直角坐标系，由图 1-9 可以看出，活塞的位移和偏心销 A 的纵坐标相等，都记作 y. 因此，只要分析 A 的纵坐标 y 随转角 α 变化的规律就行了.

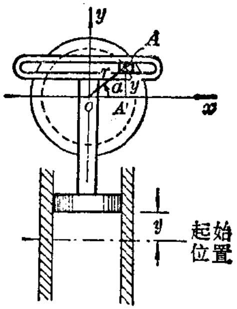


图 1-9

---

* 关于函数概念的进一步叙述，可参看《代数》下册。